Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Řešení algebraických úloh v historii a ve třídě

Solving algebraic problems in history and in the classroom

Josef Vojáček

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc.
Studijní program: Učitelství pro střední školy
Studijní obor: Navazující magisterské studium

Praha 2021

Odevzdáním této diplomové práce na téma Řešení algebraických úloh v historii a ve třídě potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V .... dne ....

Podpis autora

Touto cestou bych chtěl poděkovat paní učitelce, v jejíž třídách jsem prováděl výzkum. Dále děkuji svojí ženě Aničce, za podporu při psaní a možnost si s ní o práci povídat. Děkuji též vedoucímu mé práce prof. RNDr. Ladislavu Kvaszovi, DSc. za náměty, podnětné připomínky a rady.

Název práce: Řešení algebraických úloh v historii a ve třídě

Autor: Josef Vojáček

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá porovnáním historických řešení slovních úloh s řešeními žákovskými. Jejím cílem bylo popsat, jak žáci řeší historické slovní úlohy a přitom hledat analogie mezi řešeními žákovskými a historickými. Tento záměr mne vedl k lepšímu pochopení žákovských řešení. V teoretické části práce jsou popsány důležité pojmy pro algebraické slovní úlohy, jako jsou proměnná, algebraický výraz nebo algebraická slovní úloha. V historické části chronologicky popisuji vývoj algebry od starověku přes středověk a renesanci, až po baroko. V každém období zmiňuji důležité matematiky tehdejší doby a představuji několik řešených slovních úloh. Tato řešení ve většině případů rozebírám z pohledu dnešní matematiky. Teoretická část popisuje výzkum, který proběhl na osmiletém gymnáziu. V rámci výzkumu jsem zadal žákům 6 historických úloh napříč historickými obdobími a následně jsem rozebral způsoby, jakými žáci úlohy řešili. Přitom jsem zjistil, že u většiny úloh se mezi žákovskými řešeními vyskytovaly řešení podobná řešením historickým. Některé historické postupy se objevovaly velice často. Příkladem je využití sčítání místo násobení, nebo dělení, jako jej užívali Egypťané.

Klíčová slova: slovní úlohy, historie matematiky, algebra, historický vývoj algebry, fylogeneze algebry

Title: Solving algebraic problems in history and in the classroom

Author: Josef Vojáček

Department: Department of Mathematics and Mathematical Education

Supervisor: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc., Department of Mathematics and Mathematical Education

Abstract: This diploma thesis deals with the comparison of historical solutions of word problems with student solutions. Its aim was to describe how students solve historical word problems, while looking for analogies between student and historical solutions. This intention led me to a better understanding of student solutions. The theoretical part of the thesis describes important concepts for algebraic word problems, such as a variable, algebraic expression or algebraic word problem. In the historical part I describe chronologically the development of algebra from antiquity through the Middle Ages and the Renaissance to the Baroque. In each period, I mention important mathematicians of the time and present several solved word problems. In most cases, I analyze these solutions from the perspective of today's mathematics. The theoretical part describes the research that took place at the eight-year grammar school. As part of the research, I gave students 6 historical tasks across historical periods and then analyzed the ways in which students solved problems. I found that for most of the tasks, there were solutions similar to the historical solutions among the student's solutions. Some historical methods appeared very often. An example is the use of addition instead of multiplication, or division, as used by the Egyptians.

Keywords: word problems, history of mathematics, algebra, historical development of algebra, phylogeny of algebra

Obsah

Úvod **3**

1 Teoretická část **5**

1.1 Vymezení pojmů 5
1.2 Jazykové prostředky a historické zadání úloh 9
1.3 Paralela historie a učebního procesu 10
1.4 Pilíře výuky algebry a jejich vztah k historii matematiky 12

2 Historie algebry **15**

2.1 Rhindův matematický papyrus 18
2.1.1 Tři úlohy z Rhindova papyru 18
2.1.2 Společné rysy úloh Rhindova papyru 21
2.2 Babylonská algebra 22
2.2.1 Společné rysy babylonských úloh 27
2.3 Řečtí matematici 29
2.3.1 Eukleides z Alexandrie 29
2.3.2 Diofantos z Alexandrie 31
2.3.3 Společné rysy Diofantových úloh 35
2.4 Arabský středověk a al-Chvárizmí 36
2.4.1 Al-Chvárizmího doba 36
2.4.2 Aritmetický a algebraický traktát 37
2.5 Středověká Evropa 43
2.5.1 Leonardo Pisánský – Fibonacci 43
2.5.2 Shrnutí Fibonacciho práce 49
2.6 Vývoj symboliky algebry během renesance 50
2.6.1 Johannes Regiomontanus 1436 – 1476 51
2.6.2 Luca Pacioli 1445 – 1517 52
2.6.3 Giralomo Cardano 1501 – 1576 53
2.6.4 Rafaele Bombelli 1526 – 1572 54
2.6.5 Vývoj symboliky a jeho paralela s její výukou 55
2.7 Matematika na počátku baroka 56
2.7.1 Francois Viéte 1540 – 1601 56
2.7.2 René Descartes 1596 – 1650 56

3 Výzkumná část **61**

3.1 Pojetí výzkumu 61
3.1.1 Cíle výzkumu 61
3.1.2 Výzkumné otázky 61
3.1.3 Výzkumný vzorek 61
3.1.4 Pilotní test 62
3.1.5 Výběr testovacích úloh pro hlavní šetření 64
3.1.6 Popis sběru dat 67
3.2 Rozbor žákovských řešení 68
3.2.1 Úloha 1 – *Rhindův papyrus* 68
3.2.2 Úloha 2 – Babylonská úloha 71

3.2.3 Úloha 3 – O dělení na části (al-Chvárizmí) 75
3.2.4 Úloha 4 – O pracujícím (al-Chvárizmí) 77
3.2.5 Úloha 5 – Diofantova hádanka 81
3.2.6 Úloha 6 – Lev, leopard a medvěd (Fibonacci) 84
3.2.7 Závěry z výzkumu 87

Závěr **89**

Seznam použité literatury **91**

Seznam obrázků **95**

Seznam tabulek **97**

A Přílohy **98**
A.1 Zadávaný test 98

Úvod

Slovní úloha byla velmi důležitá pro vývoj matematiky v historii. S trochou nadsázky by se dalo říct: „Na počátku matematiky byla slovní úloha,“ protože v dobách, kdy měli lidé omezené možnosti zápisu, se mohly šířit matematické problémy pouze slovně. Možná je to dnes těžko představitelné, ale matematika byla součástí ústní lidové slovesnosti. Postupem času se vyvinuly různé formy písma a symboliky, což výrazně přispělo i k vývoji matematiky.

Cílem této práce je popsat vývoj algebry, která je základem pro mnohá jiná odvětví matematiky, a hledat v historii algebry momenty, které jsou zajímavé z pohledu dnešní didaktiky matematiky. Přitom hlavní roli v historickém vývoji algebry hrají dlouhou dobu právě slovní úlohy, proto provedu rozbor konkrétních historických řešení historických slovních úloh z dnešního pohledu.

Zaměřuji se zejména na vývoj řešení historických slovních úloh a didaktický přístup jednotlivých autorů k matematice. Historické matematické texty měly totiž ve většině případů hlavní cíl sloužit jako učebnice matematiky tehdejší doby. Jednotlivá historická řešení slovních úloh vysvětluji z pohledu dnešní doby a doplňuji je řešením, kterým bychom je pravděpodobně dnes řešili.

Dalším cílem práce je, zjistit, jakými způsoby žáci řeší historické slovní úlohy se zaměřením na ty, které vedou na řešení pomocí algebraických rovnic. Na základě teorie epistemologických překážek, kterou v didaktice matematiky využívá Guy Brousseau, jsem hledal zdroj k lepšímu pochopení ontogenetického vývoje žáků v algebře pomocí historických řešení matematických slovních úloh. Tato řešení jsem ve výzkumné části porovnal s řešeními žákovskými. Před samotným sběrem dat, jsem nejprve udělal rešerši historického vývoje algebry, kde jsem se zaměřil nejen na podstatné kroky z pohledu výsledků, jakými jsou například objevení vzorce pro výpočet kubických rovnic, ale také vývoj algebraické symboliky, která je pro matematiky klíčovým nástrojem, bez kterého si už dnešní matematiku ani neumíme představit.

Slovní úloha hraje nezastupitelnou roli i v dnešní výuce algebry, protože propojuje matematický svět čísel a rovnic s realitou. Žáci díky slovním úlohám můžou řešit běžné životní problémy pomocí matematiky a uvědomovat si její užitečnost v jejich životech.

Práce je rozdělena do tří částí. V teoretické části popisuji důležité pojmy využité v diplomové práci. Ukazuji dva přístupy k ústřednímu pojmu algebry, kterým je proměnná. Z proměnných, čísel a operací se skládají algebraické výrazy. Pokud se algebraický výraz položí roven jinému algebraickému výrazu, tak vznikají algebraické rovnice, které se využívají při matematizaci slovních úloh. Tyto základní pojmy popisuji na začátku teoretické části. V teoretické části dále uvádím filozofické myšlenky, na kterých je založeno hledání žákovských problémů v historii zkoumané oblasti matematiky. Této tématice se věnuje podkapitola 1.3.

Druhou částí je shrnutí historického vývoje algebry. V této části chronologicky popisuji její vývoj. V jednotlivých etapách uvádím příklady řešených úloh, které komentuji vzhledem k dnešní didaktice matematiky. Z mého pohledu lze v historii algebry identifikovat čtyři hlavní etapy. Vývoj před *Algebraickým traktátem*, který je považován za první knihu o algebře. Druhým obdobím je období rétorické algebry, do kterého spadá zejména al-Chvárizmí a později Leonardo Pisánský. Toto období se vyznačuje slovním popisem řešení algebraických úloh, kde operace ale někdy i samotná čísla a neznámé byly zapisovány slovně. Následuje etapa synkopické algebry, ve které se začíná rodit symbolická algebra a slova jsou zkracována pomocí různých zkratek. Posledním obdobím je symbolická algebra, ve kterém matematici již využívají znaky a písmena, podobně jako je využíváme dnes.

Třetí část se věnuje výzkumu, ve kterém rozebírám žákovská řešení 6 historických úloh. Ve výzkumu jsem tyto úlohy zadal 77 žákům 2. – 4. ročníku osmiletého gymnázia. V rozboru žákovských řešení popisuji jakými způsoby je žáci řešili, a uvádím konkrétní příklady řešení, které reprezentují typ řešení, který využila celá skupina žáků. Zejména mne pak zajímají řešení, která se nějakým způsobem podobají řešením historickým.

1. Teoretická část

Tato práce porovnává vývoj algebraického myšlení žáka a vývoj algebry. Na začátku je ale potřeba upřesnit některé pojmy a jejich význam, jak je budu v práci užívat. Například pojem *algebra* lze vnímat z mnoha úhlů pohledu. Pokud bychom zkoumali její historický vývoj, tak není zřejmé, jestli začít už v roce 300 n.l., kdy již Diofantos pracuje s něčím, co by se dalo považovat za algebraický výraz, nebo jestli je relevantní zkoumat historii algebry od vzniku knihy, jejíž jméno je původcem tohoto slova, tedy od vzniku knihy Al-Kitáb al-Muchtasar min hisáb al-džabr wa´l-muqábala[1], jež napsal Al-Chvárizmí v knize (al-Chvárizmí, počátek 9. st.) na přelomu 8. a 9. století.

1.1 Vymezení pojmů

V matematice a zejména v algebře používáme pro zápis mnoho symbolů, kterými jsou číslice, písmena a různé další symboly, jako je znamení rovnosti nebo znaky pro různé operace. Vymezení pojmu neznámá a jejího vztahu k proměnné není v literatuře úplně jednotné. Jedno ze zmiňovaných rozdělení významů symbolů je dělení na proměnné a konstantní symboly.

Proměnná a konstantní symboly

Konstantní symboly jsou symboly, jejichž význam se v matematice nemění. Jako příklad můžeme uvést znaky pro operace, číslice nebo znak rovnosti.

$$\sqrt{}, \quad +, \quad 2, \quad =$$

Proměnná, v dnešní době většinou písmeno[2], může reprezentovat různé hodnoty nebo jiné matematické objekty[3]. Význam proměnné můžeme dále rozdělit do dalších dvou kategorií.

- parametr (koeficient)
- neznámá

Parametr odkazuje v matematice na celou skupinu hodnot, kterých může nabývat. Při řešení rovnic jej považujeme za známou hodnotu a nesnažíme se je tedy vypočítat. Díky parametru p můžeme například reprezentovat všechny přímky procházející počátkem pomocí rovnice $y = px$. Pokud popisujeme všechny kvadratické rovnice, pak píšeme, že to jsou rovnice tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde jsou písmena a, b koeficienty kvadratického, resp. lineárního členu. Písmeno c nazýváme absolutním členem.

[1] Český překlad: Krátká kniha o redukci a vzájemném rušení

[2] Může se však jednat o hvězdičku, křížek nebo jenom prázdný obdélníček, který se často používá například jako propedeutika využití písmena v matematice

[3] Například v zápisu

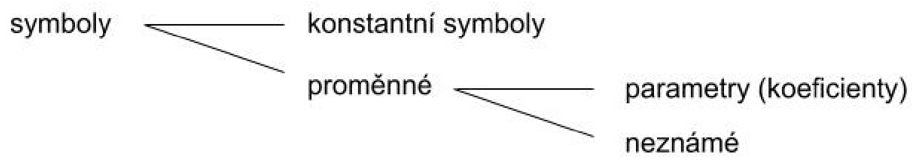
$$f(x) = g'(x),$$

reprezentuje písmeno f nějakou funkci proměnné x, která se rovná derivaci jiné funkce g stejné proměnné. Derivaci značí konstantní symbol apostrofu za písmenem g. Proměnná však může reprezentovat třeba také matice.

V učebnicích je **neznámá** vysvětlována například tímto způsobem:

Proměnná zastupuje neznámé číslo[4]*, které je třeba určit. Nazývá se neznámá; nejčastěji se označuje písmenem x. Užívají se však i jiná písmena.* (Herman a kol., 1999, str. 10)

Následující obrázek ukazuje hierarchické rozvržení výše zmíněných pojmů.



Obr. 1.1: Symboly diagram

Lze se setkat také s přístupem, ve kterém jsou proměnná a neznámá vnímány jako pojmy rovnocenné. Termín **proměnná** se nejčastěji používá pro písmeno, případně znak, který nahrazuje nějaké číslo, jež se mění. Oproti tomu **neznámá** reprezentuje určitou, i když v dané chvíli neznámou, kvantitu, která se nemění. Může reprezentovat i více čísel, která hledáme a dají se z daných vztahů zjistit.

Tento přístup je často využíván v didaktice matematiky. Využívá jej například profesorka Vondrová, pojmy proměnná a neznámá vysvětluje na příkladu následovně.

„Proměnná zastupuje dosud nespecifikované hodnoty, které se na rozdíl od neznámé mohou měnit. Např. v rovnici $y = x - 5$ jsou x i y proměnné, hodnota y se mění v závislosti na hodnotě x. Pokud jedno z nich určíme, pak se z druhého stane neznámá.“ (Vondrová, 2019a, str. 117)

Proměnná je zde chápána jako pojem, který není nadřazený pojmu neznámá. Myslím, že tento přístup vede k jednoduššímu pochopení pojmů žáky.

Algebraický výraz

Algebraický výraz je stavebním kamenem pro tvorbu algebraických rovnic. Žáci se v rámci matematiky učí jak algebraické výrazy upravovat, zjednodušovat a porovnávat. Tyto dovednosti jsou velmi důležité pro jejich zvládnutí dalších odvětví matematiky. Algebraický výraz je většinou definován následujícím způsobem.

„Algebraický výraz je zápis skládající se z čísel a z písmen (označují proměnné), která jsou spojována znaky operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování. Algebraický výraz obsahuje popřípadě také závorky určující pořadí naznačených operací.“ (Smida a kol., 1985, str. 26)

[4] Autor zde má na mysli neznámé číslo ve výrazu s proměnnou, která je součástí nějaké rovnice.

Lze dodat, že na základní škole žákům ve většině případů stačí pracovat s algebraickými výrazy, ve kterých se vyskytují pouze čísla celá.[5]
Algebraické výrazy jsou například:

$$x^5 + 1, \quad 5a^2 - \sqrt{2x}, \quad \frac{x+y}{\sqrt{c}}, \quad \left(x - \frac{5}{2}\right) : y.$$

Při tomto pojetí algebraického výrazu tak můžeme říct, že poslední výše zmíněný výraz se skládá ze dvou proměnných x, y a čísel 5 a 2. Tyto proměnné a čísla jsou propojena algebraickými operacemi dělení a odčítání.

Algebraická rovnice

Při řešení slovních úloh je velmi důležitá jejich matematizace, ta v mnoha případech vede na řešení nějaké algebraické rovnice.

Descartes definuje rovnice ve své *Geometrii* následovně.

„To je to, co se nazývá rovnicí, neboť členy získané jedním z těchto dvou způsobů jsou rovny členům získaným způsobem druhým. A je třeba najít tolik takových rovnic, kolik je neznámých. Když jich tolik nalézt nelze a nic z požadovaného jsme nevynechali, pak to svědčí o tom, že tato úloha není zcela určená; a místo těch neznámých, jimž neodpovídá žádná rovnice, lze vzít libovolné známé úsečky. Jestliže i pak jich zůstane několik, je nutné použít po řadě každou ze zbývajících rovnic a zkoumat ji samostatně nebo v porovnání s ostatními, a získat tak každou z neznámých úseček, a rozmotávat tak dlouho, až zbude jen jedna, a která se bude rovnat nějaké známé, nebo jejíž druhá, třetí, čtvrtá, pátá, šestá atd. mocnina bude rovna tomu, co se dostane sečítáním nebo odečítáním dvou nebo více jiných veličin, z nichž jsou jedny známy, a jiné jsou složeny z nějakých středních úměrných mezi jednotkou a touto druhou, třetí, čtvrtou atd. mocninou, násobených jinými známými veličinami.“

Dále zde uvedu vysokoškolskou definici algebraické rovnice. Na střední škole se žáci setkají pouze s konkrétními příklady těchto rovnic, jako jsou rovnice lineární, kvadratické, případně kubické.
Algebraickou rovnicí n-tého stupně nazýváme rovnici

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

kde a_0,$a_1, \dots$,a_n jsou reálná, resp. komplexní čísla. (Rektorys, 2000, str. 37)

V následujícím textu budu však zkoumat mnohem menší skupinu algebraických rovnic, a to konkrétně algebraické rovnice s celočíselnými koeficienty. Budu tedy předpokládat, že čísla a_0,$a_1, \dots$,a_n jsou celými čísly.

Slovní úloha

Slovní úlohy jsou nedílnou součástí výuky matematiky na základní i střední škole. Představují důležitý most mezi matematickým světem a praktickým životem. Řešení slovních úloh odpovídá na častou žákovskou otázku „K čemu to je?“

[5]Celkem zásadní výjimkou je číslo π, které se využívá například při výpočtu obsahu kruhu. Díky tomu, že součástí algebraických výrazů může být i znak pro dělení, tedy zlomková čára, tak se jedná v podstatě o algebraické výrazy s čísly racionálními.

Slovní úloha je tedy dobrým prostředkem pro vzbuzování vnitřní motivace žáků. Tento názor opírám například o text profesorky Vondrové.

„*Slovní úlohy tvoří neopominutelnou součást matematiky už od starověku. Byly a jsou využívány jako názorná ukázka skutečnosti, že zvládnutí matematických operací, získávané ve výuce matematiky od raného školního věku, může být pomůckou pro porozumění okolní realitě, zejména však může sloužit jako nástroj pro řešení praktických životních situací a úkolů. Měly by mj. dokazovat, že znalost a zvládnutí matematiky je užitečnou a využitelnou schopností, přinejmenším v tom okruhu témat, která se probírají na základní, resp. nižší střední škole.*“ (Vondrová, 2019a, str. 9)

V tomto textu profesorka Vondrová mimo jiné zmiňuje i důležitost slovních úloh v historii matematiky. Zároveň si je potřeba uvědomit, že slovní úlohy stojí za vznikem matematiky jako takové. Kdyby nebyla potřeba řešit úlohy z běžného života, tak by nikdy nevznikla matematika jako prostředek jejich řešení. Dnes slovní úlohy definujeme například tímto způsobem.

„*Slovní úlohy jsou úlohy, v nichž je obvykle popsána určitá reálná situace (např. s ekonomickou, přírodní, fyzikální, společenskou či jinou tematikou) a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky.*“ (Kuřina, 1990, str. 61)

Někdy se definuje slovní úloha jako matematický problém formulovaný slovy s kontextem z běžného života. Tuto ani výše zmíněnou definici by nesplňovaly některé úlohy, které v *Algebraickém traktátu* uvádí arabský matematik al-Chvárizmí[6]. V této práci je však za slovní úlohy budu považovat.

Algebraická slovní úloha

Tato diplomová práce se zabývá specifickým typem slovních úloh, který je nazýván „Algebraická slovní úloha“. Můžeme říct, že je to typ slovních úloh, který mezi slovními úlohami výrazně převažuje. Uvedu zde upřesnění tohoto pojmu.

Algebraickou slovní úlohou budu rozumět každou slovní úlohu, jejíž matematizace (matematický zápis) může vést na řešení algebraické rovnice.

Algebra

Na otázku „Co je to Algebra?“ neexistuje úplně jednoduchá odpověď. Jedním z matematiků, kteří na ní odpovídají, je profesor van der Waerden. Slovo algebra vniklo z arabského výrazu „al-djabr wa'l muquabāla“, který vyjadřuje dvě základní operace pro práci s termy při řešení rovnic.[7] Během středověku tak byla algebra vnímána jako umění řešení rovnic. Tento přístup k algebře se nezměnil

[6] Jedná se například o úlohu: Rozdělil jsi deset na dvě části, potom jsi dělil jednu druhou a jejich podíl je 4. Jak velké jsou tyto dvě části. (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 161), ve které žádný kontext není. Al-Chvárizmí uvádí velmi jednoduché úlohy, nejspíše proto, aby byly pro čtenáře co nejpřístupnější.

[7] Více jsou tyto operace popsány v sekci 2.4.1 na straně 36 této práce. Stručně lze říci, že jde o přičtení nebo odečtení výrazu z obou stran rovnice.

ani po rozšíření jejích myšlenek do Evropy. Jediným rozdílem bylo, že se na období několika set let změnil její název, který vycházel z italského slova „cosa“ neboli věc. Italští, ale i němečtí matematici o algebře mluvili jako o „umění věci“. Cardano, významný italský matematik období renesance, se zasloužil o průlom v algebře (řešení kubické rovnice). Knihu, ve které tento výsledek publikuje, nazývá *Ars Magna*[8] v překladu „Velké umění“. Čímž stále myslí umění řešit rovnice. (van der van der Waerden, 1983, str. 70-71)

Pro dnešní matematiky je slovo *Algebra* mnohem širším pojmem. Jistě pod tento pojem patří i výše zmíněný obsah, ale v dnešní době již algebra získala mnoho různých tvarů a některé běžně známé můžeme vyjmenovat

- Elementární algebra – zabývající se algebraickými rovnicemi prvního, druhého a popřípadě třetího stupně.
- Lineární algebra – zkoumající lineární rovnice, vektorové prostory a matice
- Polynomická algebra – jejíž obsahem jsou polynomy a jejich vlastnosti
- Abstraktní algebra – popisující základní vlastnosti algebraických struktur, jako jsou grupy, pole a okruhy, a zkoumající jejich vlastnosti.
- Počítačová algebra – která se zabývá zkoumáním vývoje počítačových algoritmů, které pracují s matematickými strukturami a objekty.

Tato práce se věnuje pouze „Elementární algebře“, což je také nejbližší výraz pro „Algebru“ jak byla vnímána od jejího vzniku až minimálně do doby Descarta, u kterého končí moje historická část této práce. Proto algebrou budu myslet v této práci vždy „Elementární algebru“.

Podobně jako vnímám algebru v této práci, ji také poměrně výstižně popisují v Ottově naučném slovníku, kde ji dělí na dva okruhy:

Dříve rozuměla se slovem algebra pouze nauka o řešení rovnic, což původ svůj mělo ve významu arabského slova algebra. Algebra dělí se nyní v algebru nižší a vyšší, jejich meze však nejsou přísně vytčeny; obecně lze říci, že algebra nižší jest přípravou netoliko pro algebru vyšší ale i pro matematickou analýzu, počítaje v to i některá odvětví geometrie, jako jsou: analytická geometrie, trigonometrie atd.; (Ottův slovník naučný, str. 846)

Tato citace shrnuje dobře důvody, proč je algebra velmi důležitou součástí středoškolské matematiky. Je totiž základem pro pochopení mnoha dalších odvětví matematiky nejen na střední škole.

1.2 Jazykové prostředky a historické zadání úloh

Slovní úlohy jsou jedním z nejčastějších prostředků formulování matematických problémů v historii. Většinou jsou součástí takzvané vědecké literatury, která se v každém období a prostoru, ve kterém byla vytvořena, obvykle liší jazykovými prostředky, jež jsou pro její tvorbu použity. Jazykovými prostředky, které lze u slovních úloh zkoumat, jsou zejména:

[8] Výsledek, který v této knize publikuje, ale pravděpodobně není jeho objevem. Více se tomuto tématu věnuji v kapitole 2.6.3.

1. **rod**, ve kterém je text psán,
2. **osobu**, ke které vypravěč mluví,
3. **čas**, ve kterém „příběh probíhá“.

V historii matematiky se můžeme setkat s různými typy zadání slovních úloh, které se významně liší ve slovesné formě. Setkat se můžeme s trpným rodem, který je užíván ve staroegyptské matematice, kde často užitým spojením je podle Vymazalové například „má se učinit“, které podle ní vyjadřuje nutnou akci. (Vymazalová, 2006a)

Část těchto zvláštností v zadání se přitom ztrácí v překladu, případně překladech, pokud překlad původního textu do češtiny je získán skrz překlad do jiného jazyka. Proto jsem se snažil v následujícím textu čerpat z primárních překladů, jakým je například práce (Vymazalová, 2006b), ve které autorka zachovává nejen obsah *Rhindova papyru*, ale i charakter textu. Podobně kvalitním překladem je (Neugebauer, 1935), který uvádí nejen překlad babylonských textů, ale i přepis klínového písma do latinky. U obou textů je navíc původní text přímo propojen s jeho překladem pomocí čísel řádků.

1.3 Paralela historie a učebního procesu

Fylogeneze algebry je historický vývoj tohoto okruhu matematiky. V této práci mě zejména zajímá, jaký krok v jejím vývoji trval dlouhou dobu (stál hodně úsilí), a pokusím se nahlédnout, z jakého důvodu se jej podařilo učinit. Budu hledat podmínky, které pomohly k překonání nějaké překážky, která stála v dalším vývoji matematiky, jako jsou možnosti zápisu, vyjadřovací prostředky autorů nebo ekonomické či cestovní podmínky doby.

Ontogeneze algebry je vývojem algebry v myšlení žáka. Zkoumáme v ní, jak se zdokonaluje a rozvíjí žákovo matematické myšlení. Jak žák chápe jednotlivé algebraické pojmy, jak umí matematizovat[9] algebraické slovní úlohy, ale i jak je následně schopen využívat matematický zápis pro jejich řešení. Podobné věci můžeme zkoumat i u historických řešení algebraických úloh, které známe z historických pramenů. Historické řešení se můžeme také snažit pochopit a zjistit, jak při nich autoři postupovali. Pokud zadáme podobné úlohy žákům, tak můžeme sledovat, v čem se jejich řešení liší od některého z historických. Následně vyvstává zásadní otázka.

Pokud najdeme nějaký krok ve vývoji algebry, který bylo v historii matematiky těžké překonat, můžeme takovouto těžkost očekávat i ve vývoji žákova myšlení? Můžeme najít stejné chyby v žákovských řešeních, kterých se dopouštěli matematici v historii?[10] Je možné využít zkoumání historie matematiky pro hlubší pochopení ontogeneze jednotlivých matematických pojmů? Samozřejmě nejsem první, kdo by si takovouto otázku kladl, a pokud na ni hledáme odpověď, tak zjistíme, že snadná není.

V dalších odstavcích této kapitoly se budu věnovat některým filozofickým směrům, které odpovídají na obecnější otázku. Věnují se souvislosti intelektuálního

[9]Někdy se též používá termín algebraizovat. Oba termíny znamenají převedení slovní úlohy do matematického (algebraického) zápisu, tj. zápisu pomocí rovnice.

[10]Nemusí se zde jednat přímo o chyby. Hledat se dá i nevhodná strategie řešení, nebo příliš složitý zápis.

vývoje jedince a jeho historického vývoje. Uvedu ale také některé představitele, kteří podobnou úvahu, jakou výše uvádím, aplikují ve filosofii svých učebnic matematiky.

Genetický zákon

Jinak také biogenetický, resp. rekapitulační zákon je původně biologický princip z přelomu 19. a 20. století, který tvrdí, že vývoj jedince je zkráceným vývojem lidstva. Jde tedy o představu, že jedinec se vyvíjí od „divocha“ po vzdělaného kulturního člověka dnešní doby a postupně prochází etapami historie lidstva. Hlavními představiteli tohoto směru byli Ernst Haeckel a Granville Stanley Hall. Z tohoto směru se vyvinula teorie genetické paralely. (Krátká, 2009)

Princip genetické paralely – Jean Piaget

Princip genetické paralely omezuje výše uvedený přístup. Nevidí v ontogenetickém vývoji opakování historie lidstva, pouze srovnává způsoby přechodů mezi jednotlivými stádii vývoje. Tato ontogenetická stádia definoval Jean Piaget a nachází je i ve fylogenetickém vývoji lidstva. (Krátká, 2009)

V československé literatuře můžeme považovat za zastánce genetické paralely prof. Hejného:

„Analýzou historie matematiky můžeme získat užitečné představy o genezi myšlení a ty potom zkusit aplikovat při vyučovaní. Tuto tezi budeme nazývat metodou genetické paralely. …růst stromu matematických znalostí v hlavě jednoho člověka bude úspěšný jen tehdy, když v určité míře zopakuje historii rozvoje této vědy.“[11] (Hejný a kol., 1990, str. 25)

Tato myšlenka vyjadřuje i Hejného vnímání chyby jako součásti učebního procesu žáka. Chyba Hejným není vnímána negativně, ale jako nedílná součást cesty k dalšímu poznání.

„V naší škole je chyba často vnímána jako jev nežádoucí, jako něco, čeho je nutno se vystříhat, jako něco, čeho se bojí nejen žáci, ale i učitelé. V zemích s dlouhou demokratickou tradicí je chyba vnímána spíše jako přirozená součást učení se.“ (Hejný, 2004, str. 63)

Podle principu genetické paralely lze tedy hledat obtíže ve vývoji matematiky v historii, a díky tomu obdobné chyby očekávat u žáků. Zkoumání historie matematiky tak může být prostředkem pro lepší pochopení žáka.

Sociální psychologie – Lev Semionovič Vygotskij

Oproti principu genetické paralely stojí tzv. sociální psychologie, jejímž hlavním tématem je vliv prostředí na jedince, což vede automaticky ke sporu s principem genetické paralely, protože dnešní jedinec žije v úplně jiném prostředí, než

[11] Profesor Hejný využívá historických úloh (Egyptské dělení chleba) například k zavedení zlomů v učebnici (Hejný a kol., 2015, 21), využívá toho, že Egypťané počítali pouze s kmenovými zlomky.

tomu bylo v historii.

Nesouhlasíme s Piagetem jen v jediném, ale za to důležitém bodě. On totiž předpokládá, že vývoj a výuka jsou naprosto odloučené, neporovnatelné procesy, že totiž funkce vyučování je především v uvedení do myšlení dospělých, které je v rozporu s myšlením vlastním dětem a které ho má nakonec nahradit.[12] (Vygotskij, 1962, str. 116 citováno v (Krátká, 2009, str. 17-18));

Na tuto výtku odpovídá následující teorie, která hledá části vývoje, které byly v historii těžko překonatelné, a ty následně srovnává s obtížemi žáků ve výuce.

Teorie epistemologických překážek – Guy Brousseau

Epistemologie je obor, který zkoumá lidské poznání, jeho vznik, proces a předmět. Epistemologické překážky lze definovat jako negativní stádia poznání, která je třeba překonat. Můžou jimi být způsoby uvažování, různá pravidla nebo přesvědčení, které blokují další vývoj v poznání. Původním otcem této myšlenky je Gaston Bachelard. Brousseau však tuto myšlenku přenáší do oblasti didaktiky matematiky.

Chyby nejsou jen účinkem nevědomosti, nejistoty, náhody, jak je podporují empirické nebo behavioristické teorie učení, ale také účinkem předchozího poznání, které bylo zajímavé a úspěšné, ale které je nyní odhaleno jako falešné nebo jednoduše nepřizpůsobené. Chyby tohoto typu nejsou nevypočitatelné a neočekávané, představují překážky. ...chyba je součástí významu získaného poznatku. (Brousseau, 2002, str. 81)

Stejně jako Hejný tak Brousseau chápe chybu jako přirozenou součást vývoje. Brousseau dále popisuje, že epistemologické překážky lze hledat v historickém vývoji konceptů.

Překážky skutečně epistemologického původu jsou překážky, před nimiž nelze uniknout, a to kvůli jejich formativní roli v hledaném poznání. Mohou být nalezeny v historii samotných konceptů. (Brousseau, 2002, str. 87)

Tento moment je jednou z motivací proč zkoumat historii matematiky. Na základě těchto myšlenek se domnívám, že historie matematiky může být prostředkem k hlubšímu pochopení matematického myšlení žáků.

1.4 Pilíře výuky algebry a jejich vztah k historii matematiky

Ve výuce matematiky na základní škole lze identifikovat tři základní pilíře algebry, kterými jsou:

[12]Překlad Magdalena Krátká původní text: *„Our disagreement with Piaget centers on one point only, but an important point. He assumes that development and instruction are entirely separate, incommensurate adult ways of thinking, which conflict with the child's own and eventually supplant them.process, that the function of instruction is merely to introduce"*

- aritmetika
- zobecňování
- geometrie

Pilíře algebry ve výuce

Profesorka Vondrová tyto tři pilíře popisuje v Metodickém materiálu ke Standardům pro základní vzdělávání následovně:

„Problematika proměnné a algebraických výrazů spočívá na třech pilířích. Tím prvním jsou číselné výrazy a jejich ***aritmetika****. Někdy se o algebře říká, že je to zobecněná aritmetika. To však není úplně přesné, protože algebraické procesy se v mnoha ohledech od aritmetických liší.…Druhým pilířem algebry je* ***geometrie****, resp. korespondence mezi obrazci a vzorci pro obsah, obvod apod.…Třetím pilířem algebry jsou úlohy na* ***zobecňování****. Tím myslíme úlohy, v nichž je dáno několik prvních členů číselné řady a žáci mají nejprve najít další členy a nakonec obecné vyjádření libovolného členu.“* (Zelendová, 2016, str. 26)

V **Geometrii** žák často poprvé využívá proměnné pro výpočty. Je to jedno z míst matematiky, ve kterém je potřeba pojmenovat geometrické útvary pomocí písmen. Od toho už je jen krůček k vyjadřování obsahů definovaných útvarů a nejrůznějším vzorcům, které žáci v geometrii odvozují. Nedílnou součástí těchto vzorců jsou samozřejmě proměnné v roli písmen. Pokud dva žáci vyjádří stejný vzorec jiným způsobem, tak lze tyto dva vzorce porovnávat, a tím se žáci snadno přenesou přes geometrii k algebře. Například jeden žák odvodí obvod obdélníku o stranách a, b jako $2a + 2b$ a druhý jako $2(a + b)$.

Aritmetika tvoří základ pro práci s algebraickými výrazy. V tomto odvětví se žáci učí, jak fungují základní operace, jako je sčítání, odčítání, násobení a dělení. Může být ale také překážkou. Některé zkušenosti z aritmetiky totiž v algebře najednou neplatí. Například není vždy potřeba konkrétní výsledek, někdy je výsledkem algebraický výraz ve tvaru součtu. Dalším obtížným místem je práce se závorkami. V aritmetice byli žáci zvyklí nejprve řešit závorku a až později dopočítat zbytek číselného výrazu. V algebře oproti tomu musí využívat distributivní zákon.

Posledním pilířem je **zobecňování**, v tomto případě jde o trochu jiný význam tohoto slova, než v historickém vývoji algebry. Jde o úlohy, v nichž je dáno několik prvních členů číselné řady a žáci mají nejprve nalézt další členy a nakonec najít vyjádření členu obecného. Někdy ani není potřeba do úloh zadávat požadavek na jeho hledání, stačí, když je zadán dostatečně vzdálený člen tak, aby žáky úloha nutila k hledání jiné než číselné reprezentace. Jedná se tedy o řešení konkrétních úloh, kde výsledkem má být číslo, které postupně přeroste v hledání obecného pravidla, při kterém je potřebné zavést nějaký druh proměnné. Tento koncept je důležitý i z hlediska žákova chápání zobecnění libovolného problému.

Pilíře algebry v historii

Tyto tři pilíře můžeme nalézt i v historickém vývoji algebry. Babylonská, egyptská, indická a později arabská **aritmetika** byla prvním nástrojem pro výpočet jednoduchých úloh. Dávala lidem tehdejší doby prostředek pro zjištění odpovědí na jednoduché matematické otázky, které doba vyžadovala. Ať už se jednalo o výpočet mzdy, kterou měl stavitel rozdělit svým pracovníkům, nebo chléb, které místodržící města rozdělit mezi své občany. Zjednodušení aritmetiky číselných výrazů, ke kterému došlo díky vývoji matematického symbolického jazyka ve vrcholném středověku a na počátku renesance, pak vedlo k dalšímu posunu ve vývoji algebry samotné. Bylo potřeba, aby se vyvinuly základní symbolické prvky, jako jsou závorky určující pořadí operací nebo symbol pro mocninu a odmocninu, aby bylo možné pohodlně pracovat s jednotlivými algebraickými termy.

Symbolického jazyka by ale možná vůbec nebylo potřeba, kdyby nedošlo ke zkoumání toho, jak fungují výpočty, které vedou na zodpovídání těch jednoduchých matematických otázek zmíněných v předchozím odstavci. Nástrojem pro toto zkoumání je **zobecnění**, neboli hledání širší odpovědi než té, která přímo odpovídá na otázku pouhým číselným výsledkem. Tento proces vedl ke zkoumání matematických problémů, které se začínaly vzdalovat od praktických aplikací matematiky. Začínal se tak budovat matematický svět rovnic, který může existovat nezávisle na realitě. Tento svět jako první popsal al-Chvárizmí v algebraickém traktátu.

Geometrie byla prvním odvětvím matematiky, které bylo od základů systematicky vybudováno. Zásluhu na tom měli řečtí matematici. Navíc je to oblast matematiky, kde matematici využívali jako první písmena, v tomto případě pro popis délky úseček. Geometrie se později stala matematickým základem pro práci s rovnicemi. Al-Chvárizmí svoji algebraickou teorii opírá právě o geometrii, kterou využívá k dokazování řešení kvadratických rovnic.

2. Historie algebry

Hlavní motivací pro rozvoj matematiky bylo řešení základních problémů, na které lidé v minulosti naráželi. Tyto problémy byly zpočátku formulované slovně a lidé neměli prostředky, kterými by je zapsali (dalo by se tedy mluvit o slovních úlohách). To se ale postupem času zlepšovalo. Nejprve zápis probíhal formou psaní do písku, později na hliněné tabulky a papyrus a nakonec na papír, jak to děláme dodnes. V Egyptě se při tom psalo hieroglyfy a pro zapisování čísel používali nepoziční desítkovou soustavu (téměř každý znak tak představoval jedno číslo), oproti tomu v Mezopotámii se rozvinulo klínové písmo a poziční šedesátková soustava. V Řecku se následně psalo pomocí řeckých písmen, která sloužila i pro zápis čísel (s využitím jejich nadtržení pro rozeznání od písmen). K sjednocení těchto prostředků došlo až mnohem později. Nebylo běžné sdílení vědeckých poznatků mezi jednotlivými kulturami. Překážkou nebyla jen vzdálenost, ale i jazyk a písmo. V období, kdy se psalo na papír, existuje ještě jeden podstatný krok, a to je vynález knihtisku, který měl vliv na sjednocení matematické symboliky.

V následujícím textu postupně projdu historii algebry od roku zhruba 3000 let př. Kr. po období bitvy na Bílé hoře, jejímž účastníkem byl podle historiků i René Descartes. Tuto historii nelze obsáhnout celou proto jsem se snažil do textu zařadit zlomové okamžiky v tomto vývoji.

Velká část slovních úloh vede dnešní řešitele k využití algebraického jazyk. Ukážu, jak byly tyto slovní úlohy řešeny v dávné, ale i bližší historii a jak se pohled na jejich řešení s využitím algebry postupně měnil.

Stejně jako v jiných odvětvích vedla k vývoji algebry nutnost odpovědět na konkrétní otázky. Po zodpovězení základních otázek bylo potřeba jejich zobecnění a zjištění principu, jakým zobecnění funguje. K tomu už je ale potřeba určitá míra abstrakce, která se musela v přemýšlení řešitelů postupně vyvinout.

Pro vývoj algebry měl zásadní význam způsob, jakým byla zapisována, potažmo míra abstrakce a symboliky, která byla jednotlivými matematiky používána. S pouhým řešením ústně formulovaného problému a snahou o jeho řešení bez tužky a papíru vede řešitele práce na jeho řešení spíše zkusmo ke konkrétním výsledkům. Možná proto je na počátku historie matematiky většina úloh řešena pouze samostatně a je podáván konkrétní návod jak docílit výsledku. Často dokonce tak, že postup není ani zdůvodněn[1].

Na otázku, od kdy datujeme vznik matematiky, odpovídá Hejný.

„Objav matematiky v dnešnom zmysle slova, t.j. objav deduktívnej argumentácie, prináleží Grékom.“ (Hejný a kol., 1990, str. 294)

Což potvrzuje i (Kvasz, 2008, str. 29), který tvrdí o egyptských a babylonských matematicích, že byli spíše okouzlení početními operacemi a šlo jim zejména o výsledek. Neměli tak potřebu hledat obecné metody řešení.

Proto do té doby nebyla poptávka po argumentaci a deduktivním dokazování, která později vychází z řeckého způsobu zkoumání a filozofie. Deduktivní dokazování se stalo základem nejen matematiky, ale vědeckého přístupu obecně.

[1] Jako je tomu například v Rhindově papyru nebo na Babylonských hliněných tabulkách

Za otce algebry jsou považováni různými historiky dva významní matematici, jimiž jsou Diofantos a al-Chvárizmí. První z nich předběhl dobu v symbolice zápisu, jak rozvedu v samostatné kapitole 2.3.2. Zapisoval neznámou a její mocniny speciálními znaky a dokonce používal znak pro zaznamenání operace odčítání[2]. Druhý sepsal významnou práci systematicky shrnující řešení rovnic druhého stupně včetně důkazu takového řešení. Důkaz přitom uvádí geometrický, po vzoru řeckých matematiků. Povedlo se mu tak propojit arabskou, spíše mechanickou aritmetiku s řeckým deduktivním myšlením.

Na tom, zda zakladatelem algebry byl Diofantos nebo al-Chvárizmí, není mezi historiky shoda. Například van der Waerden o Diofantově řešení jedné z úloh píše:

„Operace, které tu vysvětluje, jsou vlastně základními operacemi al-Chvárizmího: al-jabr a al-muquabala. Al-jabr je přidání sobě rovných termů[3] *k oběma stranám rovnice kvůli eliminaci záporných členů. Al-muquabala je odečtení sobě rovných termů od obou stran rovnice.“*[4] (van der Waerden, 1983, str. 98, vlastní překlad)

Naopak Vopěnka v komentáři knihy (al-Chvárizmí, počátek 9. st.) o arabském kalkulu píše

„Pravidla kalkulací v tomto kalkulu[5] *jsou totiž odvozena z chování těch algebraických operací s kladnými reálnými čísly, které do evropské matematiky vstoupily prostřednictvím al-Chvárizmího Algebraického traktátu.“* (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 65)

Po tomto období, ve kterém vznikla idea manipulace s jednoduchými termy, ve smyslu přičítání nebo odčítání od obou stran rovnosti, docházelo k dalšímu vývoji v arabském světě (zhruba v 9.-10. století). Do Evropy se toto umění dostává až společně s arabskými překlady a nakonec s Fibonaccim, který získal vědomosti napříč Středozemím a sepsal knihu *Liber Abaci*, ve kterém jej shrnuje a doplňuje mnoha slovními úlohami.

Fibonacci započal nové období vývoje algebry, ve kterém se začíná vyvíjet symbolický zápis. Toto období je popsáno v podkapitole 2.6, ve které jsem se snažil shrnout genezi tohoto stěžejního nástroje pro dnešní matematiku.

Symbolika také umožnila další důležitý matematický výsledek, kterému zpočátku ani jeho objevitelé příliš nerozuměli. Tím výsledkem je řešení kubické rovnice, při kterém ale narazili na imaginární čísla. Přitom relativně problematická pro tehdejší matematiky byla i možnost záporných kořenů rovnice. Ti totiž z počátku přijímali pouze kladné unikátní hodnoty jako výsledek rovnic. Tento pohled na algebraický svět možných výsledků rovnic se ale změnil.

[2] Což se znovu objevuje až v Itálii ve 14 st. tedy o 1100 let později.

[3] Termem zde myslí nejspíš neznámou, která je případně doplněná o nějakou konstantu. Konkrétním příkladem může být přičtení 5 kořenů k obou stranám rovnice, kde kořen vyjadřuje v dnešní matematice neznámou označenou například písmenem x.

[4] Původní text: *„The operations explained here are just the fundamental opearations of al-Khwarizmi: al-jabr and al-muqabala. Al-jabr is the addition of equal terms to both sides of an equation in order to eliminate negative terms. Al-muqabala is the subtraction of equal terms from both sides of an equation.“*

[5] Myšleno v arabském kalkulu.

„To znamenalo, že ne jenom ‚pravdivé', což byly kladné kořeny, které mají přímý vztah k realitě[6], ale také (Descartem používaný termín) ‚falešné' a také ‚imaginární' kořeny.“ [7] (Kvasz, 2008, str. 162, vlastní překlad)

Název pro záporné kořeny rovnic (‚falešné') a samotné slovo ‚imaginární' dává dobrou představu o tom, jakou revoluci tyto objevy v oblasti algebry způsobovaly. Přitom pro dnešní matematiky je kubická rovnice něco relativně běžného a zdá se nám, že tento krok od rovnice kvadratické je relativně malý. Bez symboliky by byl ale v podstatě nemožný. K pochopení tohoto tvrzení stačí zkusit zapsat pomocí „rétorické algebry“[8] obecné řešení již zmíněné kubické rovnice.

V následujících podkapitolách rozeberu podrobněji výše uvedený vývoj a doplním jej o historický kontext a konkrétní úlohy. U většiny úloh uvedu řešení historické i dnešní[9] a pokusím se srovnat oba přístupy.

[6] Zde je myšleno, že jdou snadno reprezentovat geometricky nebo jsou často výsledkem nějaké slovní úlohy.

[7] Původní text: *„This meant that not only the „true“, that is, positive solutions, those with a direct relation to reality, were accepted but also (to use Descartes' term) the „false“ and even the „imaginary“ ones.“*

[8] Tak byla nazývána epocha vývoje algebry, ve které matematici popisovaly rovnice pomocí slov. Představiteli jsou například Fibonacci nebo al-Chvárizmí. Příkladem takového zápisu je třeba „Kořen je rovný kvadrátu a číslu.“

[9] Bude se jednat o moje autorské řešení. Samozřejmě je určitě možné úlohy řešit i jinými způsoby. Pokusím se volit pravděpodobné řešení dnešního učitele matematiky, který už zná její aparát a nemá problém využívat symbolického zápisu a algebraického jazyka.

2.1 Rhindův matematický papyrus

Jedná se o nejznámější staroegyptský matematický papyrus, který byl nalezen v oblasti dnešního Luxoru. Jeho stáří je odhadováno na 3600 let a pochází tedy z období egyptských faraónů, konkrétně faraona 15. dynastie Apopiho, který žil v 16. století př. Kr. Papyrus je uložen v Britském museu, jedna jeho část je 190 cm dlouhá a zhruba 32 cm široká, druhá je celkem 323 cm dlouhá a 33 cm široká. Text, který obsahuje, je čistě matematický a je psaný dvěma barvami, černou a červenou, kde červená se používá pro zvýraznění důležitých částí textu. Jednu matematickou úlohu zde přikládám pro představu, jak zápis vypadá na obrázku 2.1, podstatnou část papyru si lze prohlédnout na webových stránkách The British Museum.

Obr. 2.1: Část Rhindova matematického papyru

2.1.1 Tři úlohy z Rhindova papyru

Následující úlohy jsou přepisem překladu *Rhindova papyru*. Uvedu je se stejným označením, jako je uvádí docentka Hana Vymazalová v knize (Vymazalová, 2006b). Autorka v této knize zachovává i barevnost textu[10], což umožňuje lepší orientaci v původním textu. V této době se v zápisu úloh nevyskytují žádné nám dnes známé symboly pro operace, a proto nelze vždy přesně z textu odvodit, jak autor při výpočtu postupoval. U většiny úloh je pouze stručný nadpis, který popisuje problém úlohy, za ním následuje výsledek a zápis výpočtu. Nakonec autor většinou uvádí potvrzení o tom, že výsledek vyšel tak, jak měl. V překladu najdeme například slova „celkem“ následované číslem, které je výsledkem úlohy.

Na začátku *Rhindova papyru* je uvedeno několik aritmetických úloh, ve kterých autor uvádí zejména příklady na násobení a dělení, které popisuje Vymazalová v knize (Vymazalová, 2006a) následujícím způsobem.[11]

[10]Nadpisy nebo důležité části textu jsou v papyru zapsány červenou barvou

[11]Vymazalová používá pro zápis tohoto příkladu $15 \cdot 13$ a $43 \div 8$, pro větší autenticitu jsem příklad modifikoval podle toho, jak píše v kapitole o jazykových prostředcích Rhyndova papyru (Vymazalová, 2006a, str. 14-15).

Př: sečti 15 13krát	\1	15	Př: Počítej s 8 dokud nenajdeš 43	\1	8
	2	30		2	16
	\4	60		\4	32
	\8	120		\ $\frac{1}{8}$	1
				\ $\frac{1}{4}$	2

Slova „sečti 15 13krát" dobře vyjadřují princip, na kterém fungoval výpočet. První říká, že násobení fungovalo jako opakované sčítání. To co dnes chápeme jako dělení, Egypťané formulují úplně jinak. Postupně hledají násobky dělitele, které se nakonec sečetly, a tím se získal výsledek, což popisuje věta „počítej s 8 dokud nenajdeš 43".

V levém sloupečku jsou označena čísla pomocí znaku „\", která byla potřeba sečíst, abychom dostali výsledek. Ve výše zmíněných příkladech to znamená, že počtář pro nalezení „$15 \cdot 13$" hledal postupně násobky čísla 15, dokud jejich součet nebyl hledaných 13, nakonec je sečetl a výsledkem byl tedy součet „$15+60+120$". U dělení hledal násobky 8, dokud nedostal číslo 43.

Nejprve uvedu dvě úlohy, ve kterých je hlavním tématem rozdělení chlebů mezi muže. Úloh na toto téma bychom našli v *Rhindově papyru* celkem 12, jak píše Imhausen ve svém článku (Imhausen, 2003). Úlohy jsou navíc rozmístěny napříč celým papyrem ve třech skupinách. Tvoří tak jeho podstatnou část.

Úloha R5

Počítání 8 chlebů pro 10 mužů.
Počítej s $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{30}$ 10krát, vyjde 8.

Postup:	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$
	\2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$
	4	3	$\frac{1}{5}$	
	\8	6	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

celkem 8 chlebů, je to totéž.

Z knihy (Vymazalová, 2006b, str. 111).

Rozbor

U této úlohy je vidět, jak Egypťané aplikovali výše uvedený postup dělení, nebo v tomto případě spíš násobení. Hned na počátku úlohy prozrazují výsledek a pak pomocí hledání jeho násobků a jejich sčítání potvrzují, že je správný.

Dnes bychom takovou úlohu řešili jednoduchou rovnicí pro výpočet hledané části. K tomu vede následující úvaha: Pokud vynásobím hledanou část chleba počtem mužů, dostanu 8 chlebů.

$$10 \cdot x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{5}$$

Egypťané ale neznali zlomek $\frac{4}{5}$.[12] Ke svému výpočtu používali pouze kmenové

[12] Zlomek $\frac{4}{5}$ odpovídá součtu zlomků $\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$.

zlomky[13] a zlomek $\frac{2}{3}$. Tyto zlomky se ukazují jako velmi vhodné pro didaktiku zlomků. Podobná úloha může být také propedeutikou pro algebraické úlohy, což dokládá využití těchto úloh tvůrci učebnic[14]. Egypťané také neuměli zapsat neznámou, neměli symbolické znaky pro násobení, sčítání, odčítání ani znak rovnosti.

Úloha R39

Metoda výpočtu rozdílu.
100 chlebů pro 10 mužů, 50 pro 6
a 50 pro 4. Jaký je rozdíl?

1	4	1	6	1	$12\frac{1}{12}$	1	$8\frac{1}{3}$	rozdíl je $4\,\frac{1}{6}$
$\backslash 10$	40	2	12	1	$12\frac{1}{12}$	1	$8\frac{1}{3}$	
$\backslash 2$	8	4	24	1	$12\frac{1}{12}$	1	$8\frac{1}{3}$	
$\backslash\frac{1}{2}$	2	$\backslash 8$	48	1	$12\frac{1}{12}$	1	$8\frac{1}{3}$	
		$\backslash\frac{1}{3}$	2			1	$8\frac{1}{3}$	
						1	$8\frac{1}{3}$	

Z knihy (Vymazalová, 2006b, str. 123-124)

Rozbor

Výše zmíněná úloha už je o něco složitější. Hledá se v ní, o kolik méně dostane prvních 6 mužů chlebů, kteří si jich rozdělí 50, než zbylí 4 muži, kteří si rozdělí zbylých padesát.

Úvaha, kterou zde Egypťané pro výpočet použili, mohla být následující. Pokud najdu násobek čísla 4, který bude mít hodnotu 50, tak mi stačí zjistit, čím jsem číslo 4 vynásobil, a dostanu množství chleba, které připadne na jednoho ze 4 mužů.

Vidíme tedy, že pro čísla využitá v prvním sloupci označená znakem „\“, dá součet čísel v druhém sloupci přesně 50. Vynásobím-li součet $10 + 2 + \frac{1}{2}$ číslem 4 (počet mužů), opravdu obdržím číslo 50. Jeden muž tedy dostane 12,5 chlebu. Podobně najdeme, kolik získá jeden ze 6 zbylých mužů, a zjistit rozdíl těchto čísel už není složité.

[13]Kmenové zlomky jsou zlomky ve tvaru $\frac{1}{n}$, kde n je přirozené číslo.
[14]Například H-mat využívá tento typ úloh v učebnici Hejný a kol. (2015).

Úloha R62

Metoda výpočtu pytle s mnohými drahými kovy. Řekne-li se ti:
pytel, v němž je zlato, stříbro a cín.
Tento pytel může být získán za 84 šatej. Co je to, co přísluší každému kovu, když za deben zlata se dá 12 šatej, (za) stříbro to je 6 šatej a (pro) deben cínu to je 3 šatej.
Sečti to, co se dá za šatej všech kovů, vyjde 21. Počítej s těmi 21, až najdeš 84 šatej. To je, za co je možné získat tento pytel. Vyjde 4. To dáš za každý kov.

Postup: Počítej se 4 12krát, vyjde: zlato je 48, to je to, co mu přísluší.

6	stříbro 24
3	cín 12
21	celkem 84

Z knihy (Vymazalová, 2006b, str. 133).

Rozbor

Řešení této úlohy se skládá ze sečtení cen všech typů kovu za jednotku a následného „dělení“ celkové sumy (84) tímto součtem (12). Tak řešitel snadno zjistil, že každý kov bude vážit 4 „debeny“. Úloha by byla zajímavější, kdyby v ní nebyla podmínka, že každého kovu má být stejně, která je vyjádřená následující větou „Co je to, co přísluší každému kovu, když...“. V tu chvíli by se z celkem jednoduché úlohy stala úloha vedoucí na lineární diofantickou rovnici, která má více řešení. Tento typ úloh se objevuje zejména v Řecku o zhruba 2000 let později.

Úloha R62 je jedna z mála ve *Rhindově papyru*, která nevede jenom na nějaký jednoduchý výpočet. Jde z ní přejít k vyjádření jednotlivých věcí v pytli pomocí neznámé nebo jiné reprezentace třeba pomocí obrázků, což může být bráno jako etapa před zavedením neznámé. Proto si myslím, že je tato úloha vhodná pro pozorování, jak žáci uvažují nad algebraickými úlohami. Navíc, jak jsem uváděl v kapitole 1.3, předpokládám, že pokud zadám „algebraickou“ úlohu z doby, kdy nebyla vyvinuta algebra, současným žákům, kteří se s algebrou také nepotkali, pak můžu snáze pozorovat jejich „přirozený proces“ algebraického myšlení.

2.1.2 Společné rysy úloh Rhindova papyru

Úlohy ve *Rhindově matematickém papyru* jsou z velké části pouhým zápisem nějakého aritmetického výpočtu, který se vztahuje k praktickým potřebám té doby. Tématicky jde o rozdělování mzdy, chleba nebo bohatství. Každá úloha má uvedené zadání a výsledek, za kterým je uveden postup výpočtu.

Autor při řešení nevyužívá dnešní způsoby výpočtu součinu ani podílu, ale snaží se „uhodnout“ výsledek. Při dělení přitom umně využívá výpisu všech možných násobků dělitele, dokud jejich součtem není dělenec.

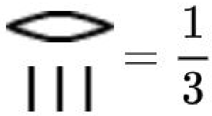
Pokud se na dílo budeme dívat z pohledu didaktiky, tak se autor snaží předat postup, který ale nijak nevysvětluje. Primárně mu tedy nejde o to, aby čtenář pochopil princip řešení úlohy, ale aby zvládnul reprodukovat postup. Ústup od tohoto přístupu vidíme až mnohem později u řeckých myslitelů pár set let před naším letopočtem.

2.2 Babylonská algebra

Tento odstavec vychází zejména z článku historicko-matematického archivu MacTutor autorů (O'Connor a Robertson, 2000a). Babyloňané pochází z Mezopotámie, což je prostor mezi dnešním Irákem a Iránem. Město Babylon se nacházelo poblíž dnešního Bagdádu, který byl později také důležitým centrem vzdělanosti. Osídlení v Mezopotámii se datuje od roku 3500 př. Kr. V té době zde bydleli Sumeřané, jejichž výpočty byly založeny na poziční šedesátkové soustavě. Později se v tomto prostoru prosadili Babyloňané, kteří založili novou říši, jejíž centrem byl Babylon. Jednalo se o civilizaci semitského původu. Babylonská matematika převzala po Sumeřanech klínové písmo a poziční šedesátkovou soustavu, o které budu více mluvit později. Dochované texty na hliněných tabulkách pochází z období 1700 – 100 př. Kr. V této době se tato matematická tradice nijak nezměnila, dokonce nebyla ani ovlivněna Řeckou tradicí, která ke konci tohoto období vznikala. (van der Waerden, 1983, str. 64)

Pro následující kapitolu jsem čerpal informace zejména z knihy (van der van der Waerden, 1954, str. 37–80). Základním rozdílem mezi egyptskou a babylonskou matematikou je systém, jakým byla zapisována čísla. Egypťané měli velmi primitivní systém zápisu, jednalo se o systém znaků popisující jednotky, desítky, stovky, atd., které se uváděly za sebou a jejich hodnotu neovlivňovala pozice znaku. Například tři čárky napsané vedle sebe znamenaly číslo tři.

Jak jsem již výše zmínil, Egypťané používali pouze kmenové zlomky, zapisovali je jako číslo se znakem „  “ nad sebou. Jak vypadal takový zápis, je vidět na obrázku 2.2.



Obr. 2.2: Egyptský zápis jedné třetiny, Dostupné na: https://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_fraction

Oproti tomu Babyloňané využívali poziční šedesátkovou soustavou, která je pro následující řešení úloh často jednodušší než přepis do soustavy desítkové. Je pravděpodobné, že příklady byly uzpůsobeny tak, aby hezky vycházely, tak jako to děláme dnes ve výuce matematiky. Příklady uvádím v této soustavě, protože její využití umožňuje nahlédnout na další složitosti s počítáním. Například hledat sedminu čísla v šedesátkové soustavě[15]. Oproti babyloňanům však využívám arabská čísla, což je malinko matoucí v tom, že některé pozice jsou jednociferné a jiné dvouciferné. Pro oddělení řádů proto používám čárky a desetinou čárku představuje středník.

Pro snazší čtení uvedu jedno číslo v šedesátkové soustavě a výpočet jeho hodnoty v soustavě desítkové.

$$3,4;10,10 = 3 \cdot 60^1 + 4 \cdot 60^0 + 10 \cdot 60^{-1} + 10 \cdot 60^{-2} =$$

[15] V následujících příkladech se přesně tato skutečnost vyskytuje, čtenář si může zkusit takovýto výpočet.

$$60 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + \frac{10}{60} + \frac{10}{3600} = 64 + \frac{7}{36} = 64.19\overline{4}$$

Na tomto příkladu je také vidět, že čísla, jejichž zápis je v soustavě šedesátkové jednoduchý, může být v desítkové soustavě obtížnější. Samozřejmě to platí i naopak. V tomto konkrétním případě jsme došli od čísla, které nevypadá nijak záludně, k číslu periodickému, s kterým se o poznání hůře pracuje.

Následující text značený jako **AO 8862** pochází z města Larsa z doby vlády dynastie Chammurapiho. Jeho přepis z klínového písma a překlad do němčiny po jednotlivých řádcích textu uvádí (Otto Neugebauer, 1935, str. 108-123). Zjednodušený přepis zde dále uvádím, nezachovávám v něm například čísla řádků textu. Při rozboru, který následuje, jsem čerpal z knihy (van der Waerden, 1954).

Zadání úlohy AO 8862:

Délka, šířka. Vynásobil jsem délku a šířku, čímž jsem získal plochu. Pak jsem k ploše přidal rozdíl délky a šířky: 3,3. Navíc jsem sečetl délku a šířku: 27. Hledaná je délka, šířka a plocha.[16]

Je dáno:	27 a 3,3 součty	
Výsledek:	15 délka	3,0 plocha
	12 šířka	

Řešení:

Následuj tento postup: $\Downarrow$
27 je součet délky a šířky,
k tomu 3,3 přidej - to dá 3,30 [17]
2 přidej k 27 - to dá 29
vem polovinu z 29
$14;30$ krát $14;30$ je $3,30;15$
od $3,30;15$ odečti 3,30 - rozdíl je $0;15$
$0;15$ má $0;30$ jako kvadrát
za prvé $0;30$ přidáme k $14;30$
dostaneme 15 jako délku
za druhé $0;30$ odebereme od $14;30$
dostaneme 14 jako šířku
2 jsme přidali k 27
od 14, té šířky, odečteš ty 2
12 je konečná šířka
15 krát 12 dá 3,0 plochu
15 délka nad 12 šířku dá 3
3 k 3,0 ploše přidáno
3,3 je výsledek.

(Neugebauer, 1935, str. 113–114)

Dnešní zápis

Následuj tento postup:

$$27 + 3{,}3 = 3{,}30$$

$$2 + 27 = 29$$[18]

Vezmi polovinu z 29 to je 14;30.

$$14;30 \times 14;30 = 3{,}30;15$$

[16] Vlastní překlad: Length,width. I have multiplied length and width, thus obtaining the area. Than i added to the area, the excess of length over the width: 3,3. Moreover, I have added length and width: 27. Required Length. Width and Area. (van der Waerden, 1954, str. 63–64)

[17] V desítkové soustavě to znamená $27 + (3 \cdot 60 + 3) = (3 \cdot 60 + 30)$, což je $27 + 183 = 210$

[18] Zde Babyloňané vlastně zavádí novou proměnnou. Původní hodnotu součtu zvyšují o dva

$$3{,}30;15 - 3{,}30 = 0;15$$

Odmocnina z 0;15 je 0;30

$$14;30 + 0;30 = 15 \text{ délka}$$

$$14;30 - 0;30 = 14 \text{ šířka}$$

Odečti 2, což bylo přidáno k 27, od šířky 14. 12 je aktuální šířka. Vynásobil jsem 15 a 12.

$$15 \times 12 = 3{,}0$$

$$15 - 12 = 3$$

$$3{,}0 + 3 = 3{,}3$$

Zobecněný zápis a dnešní řešení

Tento odstavec se opírá o práci profesora van der Waerdena z knihy (van der Waerden, 1954, str. 63–66). Pokud zvolím x jako délku a y jako šířku, pak rovnice vycházející ze zadání vypadají následovně

$$xy + x - y = A, \tag{2.1}$$

$$x + y = B, \tag{2.2}$$

kde $A = 3{,}3$ a $B = 27$. Vyjádřím-li z druhé rovnice y a dosadím-li do první, dostanu

$$x^2 - (2 + B)x + A + B = 0.$$

Pokud zavedeme novou proměnnou $y' = y + 2$, pak upravené rovnice 2.1 a 2.2 budou mít po dosazení a odečtení 2.2 od 2.1 tvar

$$xy' = A + B, \tag{2.3}$$

$$x + y' = 2 + B. \tag{2.4}$$

Tuto soustavu rovnic už Babyloňané uměli řešit, řešení které, následně uvedu používají u mnoha úloh. Nevíme, jak k němu došli, ale z pohledu dnešní matematiky ho umíme snadno zdůvodnit. Protože tento postup znají, snaží se vždy převést rovnice na tvar podobný rovnicím 2.3 a 2.4. Obecně tedy na tvar

$$wz = P, \tag{2.5}$$

$$w + z = Q. \tag{2.6}$$

Pak postupovali podle tohoto postupu. Našli polovinu z Q a od jejího čtverce odečetli P. Z toho, co vyšlo, získali odmocninu (kořen) a přičetli a odečetli polovinu Q. To bychom dnes zapsali takto:

$$w = \frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - P}$$

$$z = \frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - P}$$[19]

Pokud budeme pátrat po tom, jak k takovému výsledku došli, začneme tím, že vyjádříme z rovnice 2.6 a dosadíme do rovnice 2.5. Dostaneme tak kvadratickou rovnici, kterou můžeme vyřešit pomocí diskriminantu.

$$w(Q - w) = P \quad \Rightarrow \quad w^2 - Qw + P = 0$$

Řešením rovnice pro w a z dojdeme k výsledku

$$w_{1,2} = \frac{Q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - P},$$

$$z_{1,2} = \frac{Q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - P}.$$

Vidíme tedy, že Babyloňané znali jen jedno ze dvou možných řešení. Dosadíme-li do našeho řešení indexovaného číslem 2, zjistíme, že druhé řešení vychází následovně.[20]

$$x_2 = 14{,}5 + \sqrt{14{,}5^2 - 210} = 14$$[21]

$$y_2' = 14{,}5 - \sqrt{14{,}5^2 - 210} = 15 \Rightarrow y_2 = 15 - 2 \Rightarrow y_2 = 13$$

Druhé řešení tedy je 14 délka a 13 šířka. Toto řešení Babyloňané neznali.

Samozřejmě obě řešení dávají smysl jen v případech, že výsledkem jsou dvě kladná čísla. Babyloňané totiž záporná čísla neznali a navíc podobné úlohy používali pro výpočet obsahu a rozměrů nebo pro výpočet mzdy. U žádné z takto zadaných úloh nedává smysl, aby výsledkem bylo záporné číslo.

Zadání úlohy VAT 8389:

Na jednom „bùr“ pole jsem sklidil 4 „gur“ obilí. Na jednom „bùr“ druhého pole jsem sklidil 3 „gur“ obilí. Sklizeň z prvního pole byla o 8,20 větší než z pole druhého. Obě pole dohromady byly velké 30,0. Jak velké je každé z polí?

Ke správnému pochopení úlohy je třeba vyjasnit práci s jednotkami. Babyloňané zde totiž používají různé jednotky. Součet rozlohy dvou polí je zde uveden v jednotce SAR, pro kterou platí 1 bùr = 30 SAR. Pro rozdíl ve velikosti sklizně používají jednotku „sila“, kde 1 gur = 5 sila. SAR a sila byly „základními metrickými jednotkami“ tehdejšího systému. Proto v úloze nejsou explicitně zapsány. Úloha opět pochází z knihy (van der Waerden, 1954, str. 66-67) v následujícím textu ji popíšu slovně podobně, jako je to v původním textu. Rovnice, které van der Waerden uvádí, Babyloňani neznali, jak je vidět v překladu a přepisu Otto Neugebauera v knize (Neugebauer, 1935, str. 323–326), budu je uvádět pouze pro

[19] Toto řešení uvádí profesor van der Waerden v knize (van der Waerden, 1954, str. 65)

[20] První řešení je uvedené výše v původním babylonském řešení.

[21] Následující výpočty vychází moc pěkně protože $(14{,}5)^2 = 210{,}25$ a proto odmocnina z uvedeného rozdílu je $\frac{1}{2}$.

doplnění a lepší pochopení principu úloh.

Velmi zajímavé na této úloze je, že její variantu[22], která se vyskytuje v tomtéž babylonském textu, řeší Babyloňané jiným způsobem, a to vyjádřením neznámé z jedné rovnice a dosazením do rovnice druhé.

V následujícím řešení je třeba si uvědomit, že Babyloňané ve své době neměli takové vyjadřovací prostředky, jako je dnešní symbolický algebraický zápis. Postup byl vyjádřen podobně jako v řešení předchozího příkladu 2.2. Pro lepší pochopení budu následující řešení o dnešní symbolický zápis doplňovat.

Řešení:

Pro zde uvedený příklad tedy platí, že na 30,0 SAR prvního pole sklidí 20,0 sila obilí a na 30,0 SAR druhého pole sklidí 15,0 sila obilí. Celkový rozdíl ve sklizni na dvou polích je 8,20 sila.

Celou tuto úvahu bychom dnes zapsali rovnicí

$$\frac{20{,}0}{30{,}0}x - \frac{15{,}0}{30{,}0}y = 8{,}20. \tag{2.7}$$

Obě pole dohromady byla velká 30,0 SAR lze vyjádřit jako

$$x + y = 30{,}0. \tag{2.8}$$

Babyloňané řešili úlohu následujícím způsobem. Nejprve předpokládali, že obě pole jsou stejně velká. Z předpokladu, že součet jejich velikostí je 30,0 SAR, dostávají, že každé z nich je velké 15,0 SAR. Tím je splněna druhá rovnice. Pokud bychom zapsali slovně jejich další postup, vypadal by asi následovně:

Převrácená hodnota 30,0 je tedy vynásobena 20,0 dostáváme, že na 1 SAR získáme $0;40$ sila. Takže za 15 SAR získáme **10** sila obilí. Podobně převrácenou hodnotu 30,0 vynásobili 15,0, dostali $0;30$ a to celé následně násobili 15,0 a dostali **7,30** sila obilí. Odečetli **7,30** od **10,0** a získali 2,30. Mělo však vyjít 8,20 podle rovnice 2.7.

Dnes bychom zápis tohoto postupu popsali takto. Do levé strany rovnice 2.7 dosadíme zvolených 15 pro x i y a dostaneme:

$$\frac{20}{30} \cdot 15 - \frac{15}{30} \cdot 15 = 0;40 \cdot 15 - 0;30 \cdot 15 = 10 - 7{,}30 = 2{,}30$$

V následujícím kroku zjistili, jaký je rozdíl od výsledku, který měl vyjít podle zadání, tj. odečetli 2,30 od 8,20, čímž dostali **5,50**. V textu se pak píše „Toto si zapamatuj“. Dále text pokračuje následovně.

Protože z 1 SAR z prvního pole je výnos $0;40$ a z druhého pole $0;30$ celkem za jeden SAR z jednoho pole a druhého pole dostaneme 1,10 „sila“.

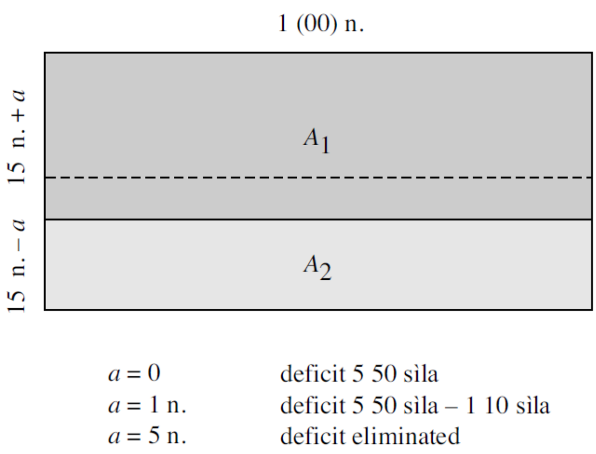
Pokud vynásobíme 5 krát 1,10 dostaneme **5,50**, což odpovídá našemu hledanému rozdílu. Pokud tedy k 15 přičteme 5 a odečteme 5 dostaneme 10 a 20, kde

[22] Druhá varianta se liší pouze v tom, že je uveden rozdíl velikostí polí místo součtu, tedy v zadání je: „Jedno pole je o 10,0 větší než druhé“ místo „Obě pole dohromady byly velké 30,0“. Pro zjednodušení oba postupy uvedu na stejné úloze.

20 SAR je velikost prvního pole a 10 SAR velikost druhého pole.

Pomocí druhé rovnice se tak dopočítali k tomu, co je potřeba přidat do té první, abychom dostali předpokládané množství. Profesor Van Waerden píše, jak by to nejspíš vysvětloval učitel svému žáku na základní škole:

„Pokud by mělo každé pole plochu 15 *SAR, rozdíl v jejich výnosu by byl* 2,30. *Podle zadání by to mělo být* 8,20, *rozdíl naší představy od zadání je tedy* 5,50. *Za každou přidanou jednotku plochy k poli prvnímu a odebranou od pole druhého, první pole bude produkovat o* 0;40 *více a druhé o* 0;30 *méně. Takže rozdíl se zvětší o* 1;10. *Pokud toto učiním* 5,0 *krát dostanu přesně* 5,50. *Pokud tedy* 5,0 *přidám k prvnímu poli a odeberu od druhého získám požadovaný výsledek."*[23] (van der Waerden, 1954, str. 67)



Obr. 2.3: Úloha VAT 8389 z knihy Friberg (2007)

Je potřeba dodat, že přestože tato úvaha není úplně snadná, byla nejspíš bližší pro řešení Babyloňanů než dnešní řešení pomocí vyjádření jedné neznámé a dosazení do rovnice druhé. Musíme si také uvědomit, že zde je text popsán více slovy než v původním babylonském textu. Ten by čtenář mohl najít v textu (Neugebauer, 1935, str. 323). Pokud bychom babylonský text brali jako učebnici, můžeme říct, že pravděpodobně nemá ambici vysvětlit princip, proč výpočet funguje, ale spíše naučit postup, kterým lze dojít k výsledku. Jak píše v rozboru stejné úlohy Friberg v knize (Friberg, 2007, str. 335) je možné, že vysvětlení této úlohy je geometrické. Obrázek, který ve své knize uvádí ale spíše jen vizuálně kopíruje základní úvahu.

Friberg na obrázku 2.3 značí A_1, A_2 obsahy polí, která jsou obě široká 1 ninda, což je délková jednotka, kde 1 ninda čtvereční = 1 SAR. Pokud přesouvá dělící čáru o a ninda, tak může dopočítávat, jak se mění velikost výtěžku z obou polí. To je naznačeno v popisku pod obrázkem.

2.2.1 Společné rysy babylonských úloh

Babylonská matematika je založena na následování určitých postupů, jejichž potřeba je založená na problémech z reálného života. Jako jsou chrámové hospodářství, zemědělství nebo stavebnictví. Neměla systematický základ a chyběla

[23] Vlastní překlad: *If each of the fields had an area of* 15,0 *SAR, the difference in yield would be* 2,30. *It has to be* 8,20, *so that* 5,50 *has to be added. For every unit of area, added to the first field and subtracted from the second, the first would produce* 0;40 *more and the second* 0;30 *less, so that the difference would be increased each time by* $0;40 + 0;30 = 1;10$. *This has to be taken* 5,0 *times to obtain exactly* 5,50. *Hence the first area must be* $15,0 + 5,0 = 20,0$ *and the second* $15,0 - 5,0 = 10,0$.

jí potřeba dokazování a zdůvodňování postupů. Mohli bychom jí nazvat matematikou „algoritmickou“. Zároveň už ale můžeme vidět důležitý princip převodu neznámého problému na problém známý, který se vyskytoval při řešení úlohy **VAT 8389**. Babyloňané také byli první kulturou, která přináší problémy, jejichž řešení vede na kvadratické rovnice.

2.3 Řečtí matematici

Řecká matematika, jejíž medailonek v podobě dvou konkrétních představitelů a jejich příkladů zde zmíním, je období vývoje matematiky v oblasti zejména Alexandrie, které trvá od 6. stol. př. Kr. do zhruba 6. stol. n. l. Řecká matematika bez pochyby navazuje na starší matematickou tradici, ať už výše zmíněnou egyptskou nebo babylonskou. Zápis řešení problémů je, jak jsem výše ukázal na několika příkladech, založen na řešení konkrétních postupů pro řešení příkladů. Tyto postupy jsou často doplněny o jednoduchou formu ověření. Někdy bychom mohli možná dokonce mluvit o důkazu v dnešním slova smyslu. Je také možné, že tyto postupy odrážejí ve skutečnosti obecné pochopení principů, ale až s řeckou matematikou byla tradice na tomto základním kameni založena. Šír o řecké matematické formě hovoří následovně:

„Jedná se o složitý a rozsáhlý deduktivní systém obecně formulovaných definic, postulátů a vět. Zároveň je tematizována problematika důkazů a prvních principů. Toto pojetí matematiky, obecně přijaté již v době Platónově a přijímané ve své podstatě dodnes, vzniklo pouze jednou v historii, neboť pozdější tradice byly již vždy vlivem řeckým.“ (Zbyněk Šír, 2011, str. 16)

Tato doba a tento přístup je obecně spjat se vznikem „vědeckého přístupu“ na kterém je založen dnešní svět.

2.3.1 Eukleides z Alexandrie

Eukleides z Alexandrie je považován za vůbec nejvlivnějšího matematika všech dob. Jeho *Základy* patří mezi vůbec nejdéle používané „učebnice“ světa a byly překládány do mnoha jazyků. Ještě na konci středověku[24] byly součástí studijních osnov.

„V Praze se přednášel například půlroční běh o prvých knihách Eukleidových ‚Základů‘, za jehož navštěvování student musel zaplatit 8 grošů.“ (Juškevič, 1978, str. 400)

Ze *Základů* se zmíníme pouze o II. knize, která obsahuje 2 definice a 14 vět. Ty, jak zmiňuje Šír, *„mohou být chápány jako náhrada za algebraické vzorce, a proto jsou někdy nazývány ‚geometrickou algebrou‘“.* (Šír, 2011, str. 105)

Uvedu zde jednu větu z knihy Eukleidových *Základů*, jejichž části uvádí dvojjazyčně ve své knize (Šír, 2011, str. 136-137). Ostatní věty této knihy vypadají podobně. Vždy je nejprve vysloveno tvrzení, které je následně dokázáno a většinou je doplněno obrázkem.

Kniha II, Věta 6

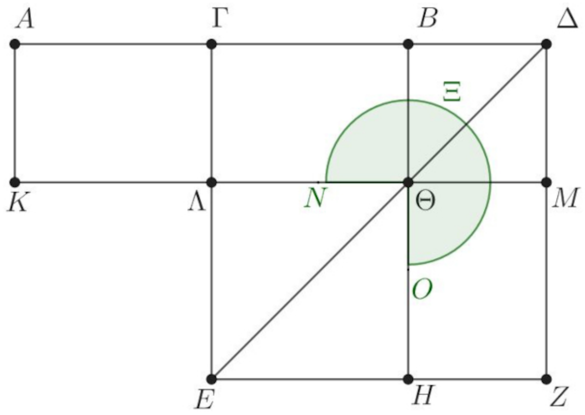
„Jestliže se přímá čára rozdělí napůl a zpříma se k ní přiloží nějaká jiná přímá, pak se obdélník, který svírá celá přímá dohromady s přiloženou přímou a přiložená přímá, spolu se čtvercem, který je nad polovinou přímé, rovná čtverci, který je nad přímou složenou z poloviny přímé a z přiložené přímé“

[24] V druhé polovině čtrnáctého století

Řešení

„Budiž nějaká přímá AB rozdělena napůl v bodě Γ a budiž k ní přiložená nějaká přímá $B\Delta$; tvrdím, že obdélník sevřený $A\Delta$ a ΔB spolu se čtvercem nad ΓB se rovná čtverci nad $\Gamma\Delta$.

Budiž tedy nad $\Gamma\Delta$ narýsován čtverec $\Gamma EZ\Delta$ (viz. Obr. 2.4), budiž vedena spojnice ΔE, budiž bodem B vedena přímá KM rovnoběžná s $E\Gamma$ i ΔZ, budiž bodem Θ vedena přímá KM rovnoběžná s AB i EZ a dále budiž bodem A vedena přímá AK rovnoběžná s $\Gamma\Lambda$ i ΔM.



Obr. 2.4: Základy - Kniha II, Věta 6

Protože je tedy $A\Gamma$ rovna ΓB, je i obdélník $A\Lambda$ roven $\Gamma\Theta$. Obdélník $\Gamma\Theta$ je však roven ΘZ. A tak je obdélník $A\Lambda$ roven ΘZ. Budiž k oběma přidán obdélník ΓM;potom je celý obdélník AM roven gnómonu $N\Xi O$. AM je však obdélník sevřený $A\Delta$ a ΔB – ΔM je totiž rovna ΔB–, takže i gnómón $N\Xi O$ je roven obdélníku sevřenému $A\Delta$ a ΔB. Budiž k oběma přidán čtverec ΛH, jenž je roven čtverci nad $B\Gamma$; potom se obdélník sevřený $A\Delta$ a ΔB spolu se čtvercem nad ΛB rovná gnómonu $N\Xi O$ spolu se čtvercem ΛH. Gnómón $N\Xi O$ a ΛH však dohromady dávají celý čtverec $\Gamma EZ\Delta$, jenž je nad $\Lambda\Delta$; obdélník sevřený $A\Delta$ a ΔB spolu se čtvercem nad ΓB se rovná čtverci nad $\Gamma\Delta$.

Jestliže se tedy přímá čára rozdělí napůl a zpříma se k ní přiloží nějaká jiná přímá, pak se obdélník, který svírá celá přímá dohromady s přiloženou přímou a přiložená přímá, spolu se čtvercem, který je nad polovinou přímé, rovná čtverci, který je nad přímou složenou z poloviny přímé a z přiložené přímé. A to se mělo dokázat.“ (Šír, 2011, str. 136–137)

Dnešní řešení

U této úlohy je dobře vidět, jak silným nástrojem je symbolický zápis. Dnes bychom platnost této identity dokazovali pouhým roznásobením a umocněním. Za předpokladu, že přímou z předchozího příkladu označíme a a přiloženou přímou jako b, můžeme celý problém zapsat jako následující rovnost

$$(a+b)\cdot b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}+b\right)^2.$$

Po roznásobení, umocnění a správném seřazení členů dostaneme

$$ab + b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = ab + b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

čímž je tvrzení dokázáno.

Rozbor

Strategie, jakou Eukleides dokazoval podobné algebraické vzorce, je sestrojit základní geometrické objekty. O těchto objektech ukazuje, že jejich obsah je shodný na základě vět, které formuloval v předešlých částech *Základů*. Navíc se nejedná o nějaký konkrétní příklad, ale o obecný důkaz rovnosti dvou algebraických výrazů. To je zásadní rozdíl oproti předchozím textům, které pocházejí ze starší doby. Cílem textu je vysvětlit princip, na základě kterého daná matematická identita platí. Není tady pouze ukázán výsledek a postup řešení. Lze ale předpokládat, že čtenář, který princip příkladu pochopil, bude schopen svoji obecnou znalost aplikovat v konkrétním příkladu.

Je dobré si uvědomit, že v tomto textu se nevyskytují žádné z dnes používaných technik pro řešení algebraických rovnic. Autor neodečítá od obou stran nějaké stejné množství ani nepřevádí „výrazy“ z jedné strany rovnosti na druhou. Pouze upravuje (vysvětluje, rozebírá) jednu a druhou stranu rovnosti do té doby, dokud není schopen tvrdit, že rovnost platí. To je asi základním důvodem, proč nelze toto konání považovat za algebraické úpravy rovnic.

Eukleides nám ale ukazuje jeden velmi důležitý přístup k algebře, který se dodneška využívá v didaktice matematiky. Dnes jej nazýváme geometrická algebra.

2.3.2 Diofantos z Alexandrie

Diofantos z Alexandrie byl řecký matematik žijící kolem roku 300 n.l. Z jeho díla se dochovaly části dvou děl. Z prvního z nich *„O mnohoúhelníkových číslech“* se dochovaly pouze fragmenty. Oproti tomu z díla *„Aritmetika“* máme hned 10 z 13 knih, které v úvodu Diofantos zmiňuje. Šest z nich jsou řecké přepisy a čtyři arabské nalezené až v roce 1968. Šest knih, které se dochovaly v řečtině obsahuje celkem 187 příkladů. Nejdříve se myslelo, že řecké rukopisy tvoří prvních šest knih, po objevení arabského překladu dalších čtyř se však zdá, že posloupnost knih je jiná. První tři knihy jsou řecké, pak následují čtyři dochované v arabštině. Ostatní dvě řecké knihy není snadné zařadit. (Šír, 2011, str. 492)

O Diofantově životě toho není příliš dochováno. Nejdetajlnější informace, které máme, jsou možná fiktivní a pocházejí ze sbírky řeckých literárních děl (Paton, 1918, str. 93-94, č. 126), kterou sestavil kolem roku 500 n.l. Metrodorus, jak uvádí (O'Connor a Robertson, 1999b) i Šír, z jehož knihy zde uvádím následující překlad.

Diofantovo dětství trvalo šestinu jeho života, za další dvanáctinu mu vyrašily vousy a za další sedminu se oženil. Za dalších pět(5) let se mu narodil syn, jehož život byl však jen poloviční oproti životu otcovu. Po synově smrti žil Diofantos ještě 4(čtyři) roky. Kolika let se celkem Diofantos dožil. 13 zápis. (Šír, 2011, str. 492)

Diofantos je považován za otce algebry, přestože slovo algebra v jeho době ani neexistovalo.[25] Je to dáno zejména tím, že ve své práci Aritmetika řeší složité

[25] Slovo algebra vzniklo až později ze slova *al-džábr*, které můžeme najít v názvu knihy al-Chvárizmího, o níž budu psát v následující kapitole.

algebraické problémy, jež některé vedou až na rovnice 6. stupně jak píše v komentáři Šír v knize (Šír, 2011). Podstatným důvodem proč byl Diofantos schopen tyto úlohy řešit, byl jeho zápis. Používal totiž speciální znaky pro neznámou a její další mocniny.

Diofatův zápis a značení

Řekové pro zápis čísel používali řecká písmena s pruhem nad nimi, aby je odlišili od písmen, kterými psali komentář k řešení úlohy, nebo případně operace, které s čísly prováděli. V Diofantově aritmetice můžeme ale nalézt také speciální symboly jako jsou: ς', Δ^Y, což byly znaky pro neznámou a její kvadrát (čtverec). Tyto znaky vychází podle Heatha ze slov, kterými tyto „neznámé“ Diofantes popisuje. Znak ς' je posledním písmenem slova $\alpha\rho\iota\theta\mu$ός opatřené o čárku, další symboly jsou složené z velkého řeckého počátečního písmene slova, kterým Diofantes danou mocninu popisuje. Mimo symboly pro neznámou a její mocniny využívá Diofantes také dalších symbolů $\mathring{M}$ pro označení jednotky a speciální symbol pro odčítání. Tento symbol vypadá podobně jako obrácené řecké písmeno Ψ. (Heath, 1910, str. 32–53)

Dnešní	Diofantův	Diofantův slovní	italsko-arabský zápis
x	ς'	arithmós ($\alpha\rho\iota\theta\mu$ός)	Cosa, Radix, Lato.
x^2	Δ^Y	dynamis ($\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\varsigma$)	Censo.
x^3	K^Y	kybos ($\kappa\upsilon\beta o\varsigma$)	Cubo.
x^4	$\Delta^Y\Delta$	dynamódynamis	Censo di Censo.
x^5	ΔK^Y	dynamokybus	Relato 1°
x^6	$K^Y K$	kybokybus	Censo di Cubo
x^7			Relato 2°
x^8			Censo di Censo di Censo
x^9			Cubo di Cubo

Tabulka 2.1: Inspirací pro tabulku byla tabulka Cosaliho uvedená v knize (Heath, 1910, str. 40), kterou jsem doplnil o zápis Diofantových znaků uvedených Heathem v téže knize.

V tabulce 2.1 můžeme vidět srovnání zápisu neznámé a jejích mocnin podle Diofanta a pozdějších italských matematiků 12. – 13. století, kteří při pojmenování neznámé a její mocnin vycházeli z arabských textů. Zejména pak z textu al-Chvárizmího, který rozeberu v následující kapitole. Diofantos ve svých textech používá pouze prvních šest mocnin neznámé, proto nejsou vyšší mocniny uvedené v tabulce 2.1. Dále z tabulky můžeme vyčíst celý přístup ke konstrukci slov popisujících jednotlivé mocniny neznámé. Diofantos vyšší mocniny skládá z nižších aditivně oproti pozdějšímu multiplikativnímu přístupu Arabů a Italů. (Heath, 1910)

V další části textu uvedu dvě Diofantovy úlohy z knihy *Aritmetika*, jejíž části uvádí Šír ve své knize (*Řecké matematické texty*, 2011, str. 530–537) včetně jejich řešení. Tento text doplním o svůj komentář a rozbor z dnešního pohledu.

Diofantův soubor knih Aritmentika je věnován Dionýsovi, což byl pravděpodobně alexandrijský biskup, který se jím stal v roce 247 n. l. V první knize jsou příklady podobné první úloze, kterou následně uvádím. Jde o úlohy s konečným množstvím řešení, které jsou často stejné jako úlohy známé z babylonské doby. Dokonce i Diofantova řešení jsou nápadně podobná babylonským. Je proto pravděpodobné, že je Diofantos znal. V dalších knihách uvádí různé úlohy s nekonečným množstvím řešení. Tyto úlohy řeší odlišnými způsoby. Nedá se tak říct, že by jeho práce byla jakýmsi uceleným systematickým rozborem případů. Spíše jde o kolekci řešených příkladů.

Tato Diofantova práce a styl, kterým ji píše, se výrazně liší od práce jiných Řeků, Eukleida, Pappa z Alexandrie a jiných. Vypadá to, že byl spíše ovlivněn prací starých Babyloňanů. Nad prolínáním matematické kultury také přemýšlí profesor Van Waerden

„Je pravděpodobné, že tradice těchto algebraických metod nebyla nikdy přerušena, takže spolu s vědeckou tradicí řecké geometrie vždy existovala populárnější tradice malých algebraických problémů a metod řešení, tradice, která pochází z babylonské algebry, a která končí arabskou algebrou s prolínáním do řecké kultury, do Číny a Indie.“[26] (van der Waerden, 1954, str. 280)

V návaznosti na profesora van der Waerdena a jeho tvrzení si dovolím jeho text trochu rozvinout. Je totiž z mého pohledu pravděpodobné, že Řekové, kteří měli smysl pro exaktní práci v matematice, a jejich dochovaná díla jsou plná konstruovaných struktur a dokázaných tvrzení, považovali početní řešení úloh, bez dokázání správnosti řešení, za něco méně hodné zápisu, ale přitom bylo podobné matematické počínání jejich denních chlebem.

Věta I, 27

„Nalézt dvě čísla taková, aby jejich součet a součin byla zadaná čísla.

Čtverec nad polovinou součtu obou nalezených čísel musí přesahovat jejich součin o čtverec. Toto je nutná podmínka řešitelnosti úlohy.

Mějme zadáno, aby jejich součet dával 20*, součin aby dával* 96*. Budiž jejich rozdíl* $2x$*. A jelikož jejich součet je* 20*, rozdělím-li je napůl, bude každá z částí z dělení tohoto součtu* 10*. A jestliže polovinu rozdílu, to znamená* x*, k jedné části přidám a od druhé ji odeberu, zůstane jejich součet opět* 20*, rozdíl* $2x$*. Budiž tedy větší číslo* $x + 10$ *(protože* 10 *je polovina součtu). Menší bude tedy* $10 - x$*. Jejich součet zůstává* 20*, rozdíl* $2x$*.*

Zbývá, aby také jejich součin dával 96*. Ale jejich součinem je* $100 - x^2$*. To se má rovnat* 96*. Dostaneme, že* $x = 2$*. Větší tedy bude* 12 *a menší* 8 *a splňují zadání.“* (Šír, 2011, str. 531)

Dnešní zápis a rozbor úlohy

Dnes bychom mohli zapsat výše zmíněnou úlohu následovně:

$$wz = P, \quad w + z = Q. \tag{2.9}$$

[26]Vlastní překlad: *„It is probable that the tradition of these algebraic methods was never interrupted so that, along with the scholarly tradition of Greek geometry, there has always existed a more popular tradition of small algebraic problems and methods of solution, a tradition which originates in Babylonian algebra, and which ends in Arabic algebra, with radiations into Greek culture, into China and India.“*

Vidíme, že je to téměř stejná úloha, kterou řešili Babyloňané a kterou jsem zmínil v kapitole 2.2, kde jsem rozebral i její dnešní řešení. Řešení Diofanta je ale trochu jiné. Budu úlohu řešit obecně, i když Diofantos uvádí pouze konkrétní příklad. Pokud označíme rozdíl mezi w a z jako $2x$, pak platí

$$w + z = Q + x - x$$

Z výše zmíněné rovnosti Diofantos stanovuje pro dvě hledaná čísla, nechť větší ze dvou čísel je w a menší nechť je z, následující vztahy

$$w = \frac{Q}{2} + x, \quad z = \frac{Q}{2} - x.$$

Součin pak lze zapsat jako

$$\left(\frac{Q}{2} - x\right)\left(\frac{Q}{2} + x\right) = \left(\frac{Q}{2}\right)^2 - x^2 = P$$

z čehož plyne pro polovinu rozdílu x

$$x^2 = \left(\frac{Q}{2}\right)^2 - P \Rightarrow x = \pm\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - P} \tag{2.10}$$

a tedy

$$w = \frac{Q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - P}, \quad z = \frac{Q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - P}.$$

Toto řešení je tedy už velmi blízkou tomu dnešnímu. Velmi chytře je využito přičtení a odečtení poloviny rozdílu k polovině součtu dvou čísel, čímž lze vyjádřit větší a menší číslo.

Z pohledu Diofantova řešení se ale stále jedná pouze o řešení konkrétního příkladu. Chybí zde důkaz obecného tvrzení. Z rovnice 2.10 je vidět také důvod podmínky pro existenci řešení v oboru reálných čísel $\left(\frac{Q}{2}\right)^2 \leq P$, které Diofantos na začátku zmiňuje.

Následující úloha je velmi zajímavá. Diofantos v ní upravuje rovnost, což je velmi pokročilá činnost na jeho dobu. Například přičítá k oběma stranám členy tak, aby se zbavil členů záporných, nebo eliminuje stejné členy z obou stran. To odpovídá operacím al-džabr a almuqabala, které o 500 let později pojmenovává al-Chvarizmí ve svém algebraickém traktátu. V podstatě se jedná o hledání pythagorejské trojice čísel.

Věta II, 8

„Rozdělit zadaný čtverec na dva čtverce.

Mějme za úkol rozdělit 16 *na dva čtverce. Budiž první čtvercem* x^2. *Druhý bude tedy* $16 - x^2$. *Tudíž* $16 - x^2$ *musí být rovno čtverci.*

Vytvořím čtverec nad stranou několik x *bez tolika jednotek, kolik jich má strana z* 16. *Bude to třeba* $2x - 4$. *Samotný čtverec bude tedy mít* $4x^2 + 16 - 16x$. *To se má rovnat* $16 - x^2$. *Přičteme k oběma stranám záporné členy a odečteme stejné* *od stejných.*

Takže $5x^2 = 16x$*. A dostáváme* $x = \frac{16}{5}$*. Jeden čtverec bude* $\frac{256}{25}$ *druhý* $\frac{144}{25}$*. Oba dva sečteny dávají* $\frac{400}{2u}$ *čili* 16 *a každý je čtvercem.“* (Šír, 2011, str. 533)

Dnešní zápis a rozbor úlohy

Diofantes stanovuje na začátku úlohy obecný problém, ale jak je tomu i u jiných úloh následně řeší konkrétní příklad, kde hledá k číslu 16 dva čtverce o součtu tohoto obsahu.

Řešme nyní obecnou úlohu. Nechť čtverec, jež je zadaný je a^2. Pak podle Diofantova postupu hledáme dvě čísla y a z, pro která platí:

$$a^2 = y + z,$$

kde pro y stanovil $y = x^2$ a z můžeme zapsat jako

$$z = a^2 - x^2. \tag{2.11}$$

Zároveň ze zadání víme, že z má být čtverec. Diofantos si tedy stanovuje, že kořen z bude mít tvar $\sqrt{z} = 2x - a$. Pokud tuto rovnost umocníme, dostaneme $z = 4x^2 - 4ax + a^2$, za z dosadíme do rovnosti 2.11.

$$4x^2 - 4ax + a^2 = a^2 - x^2.$$

odečteme od obou stran a^2 a převedeme záporné členy pomocí jejich přičtení k oběma stranám na druhou stranu

$$5x^2 = 4ax.$$

Protože je x strana jednoho z čtverců nemůže se jednat ani o nulu ani o záporné číslo. Vydělíme tedy obě strany x a číslem 5. Dostaneme

$$x = \frac{4a}{5} \qquad \Rightarrow \qquad y = x^2 = \frac{16a^2}{25}, \quad z = 16 - \frac{16a^2}{25}$$

Diofantos nemohl obecný zápis tak, jak jsem ho výše uvedl, ve své práci zapsat. Pracoval totiž pouze s jednou neznámou, jak je vidět v jeho řešení. Opět tedy narážíme na to, že k dalšímu pokroku, nebo lépe řečeno, k obecnějšímu řešení, mu chyběly určité výrazové prostředky.

2.3.3 Společné rysy Diofantových úloh

Diofantos využívá mnoho z úloh, které známe již z Babylona. Jeho pojetí algebry ve spise *Aritmetika* není příliš dobře systematicky sepsáno. Celkem náhodně řeší různé úlohy, a pokud nenajde jejich obecné řešení, tak si zvolí konkrétní příklad, který vyřeší. Svoje řešení je ale schopen zapisovat sofistikovaným způsobem, ve kterém využívá symboliku, která neuvěřitelně předběhla dobu. Je možné, že na základě jeho práce se symbolika později rozvinula v severní Itálii. V době jejího největšího vývoje bylo totiž právě Diofantovo dílo *Aritmetika* překládáno do evropských jazyků. Jeho příspěvek algebře tak není příliš důležitý z pohledu matematických výsledků, ale spíše z pohledu jejich zápisu.

2.4 Arabský středověk a al-Chvárizmí

Arabský svět, ve kterém žil al-Chvárizmí, byl fascinující tím, jak se v něm střetaly kultury a přístupy k matematice. Al-Chvárizmí je tohoto střetu typickým představitelem, protože ve své knize prezentuje jak indický způsob zápisu čísel[27], tak dokazuje některá svá tvrzení pomocí geometrických důkazů, které používali Řekové.

V této kapitole stručně popíšu historické souvislosti, ve kterých al-Chvárizmí napsal své traktáty. Druhou část této kapitoly věnuji popisu *Aritmetického a algebraického traktátu* a v té třetí rozeberu několik konkrétních příkladů z algebraické části.

2.4.1 Al-Chvárizmího doba

Celým jménem Abu Abdalláh Muhamad ibn Músá al-Chvárizmí al Mádžúsí (někde se uvádí ještě al Qutrubbulli, zkráceně al-Chvárizmí) se narodil kolem roku 780 pravděpodobně v Bagdádu. O životě tohoto velmi důležitého muže pro historii matematiky víme jen velmi málo. Historické prameny se liší i v tom, odkud pochází. Zdrojem pro ně je hlavně jeho jméno, které napovídá, že by mohl být z Chvárizmu[28] nebo z Qutrubbulli, což je poblíž Bagdádu. (O'Connor a Robertson, 1999a)

Mnohem více toho víme o době, ve které žil. Je to doba zhruba 150 let po smrti proroka Muhammada, kdy je již islámská říše upevněna a rozšířena a sídelním městem islámského chalífa Haruma al-Rashida z rodu Abbásovců byl právě Bagdád. Harum al-Rashid se stal chalífou v roce 786. Po jeho smrti v roce 809 nebylo jasné, který z jeho synů převezme vládu. Po bojích, které mezi sebou jeho synové vedli se stal chalífou mladší ze synů al-Mamún, který se stal nejvýznamnějším chalífou z pohledu vědy, protože v Bagdádě založil a všemožně podporoval Dům vědy (Bajt al hikma), kam povolal většinu tehdejších učenců.

V bagdádském *Domě vědy* také působil al-Chvárizmí. Měl zde za úkol překládat řecké vědecké rukopisy a dál studovat a psát o algebře, geometrii a astronomii. Je jasné, že al-Chvárizmí byl pod patronátem al-Mamúna, protože tomuto chalífovi věnoval i několik svých spisů. Nejdůležitějším dílem, které al-Chváriymí napsal, bylo dílo věnující se právě algebře. V originále *Muchtasar min hisab al-džabr wa'l-muqabala*, což lze volně přeložit jako „Stručné shrnutí o redukci a vzájemném rušení", jak píše Petr Vopěnka v úvodu ke knize (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 22). Al-džabr je přičtení kladného termu k oběma stranám rovnice za účelem eliminace záporného členu z jedné strany rovnice a al-muqubala je eliminace stejných členů z obou stran rovnice pomocí jejich odečtení. Ze slova al-džabr pravděpodobně vznikl i název algebra. Celá kniha je tedy pojmenována po těchto dvou operacích. V dalším textu budu o díle hovořit jako o *Algebraickém traktátu*. To je také název této knihy přeložené do českého jazyka opatřené předmluvou profesora Vopěnky. Podle Connora a Robertsona ze skotské University of St Andrews je *Algebraický traktát* vůbec první knihou o algebře.(O'Connor a Robertson, 1999a)

[27]Dnes jim říkáme arabské číslice.

[28]Region ve střední asii jihovýchodně od Aralského moře. Dnes bychom ho našli v Uzbekistánu, kolem města Chiva.

Tuto skutečnost nepřímo potvrzuje i profesor van der Waerden, který ve své knize *A History of Algebra* zkoumá historii algebry právě od al-Chvárizmího. Pro toto tvrzení uvádím následující čtyři důvody.

1. Jak bylo zmíněno výše, slovo *algebra* vzniklo nejspíše ze slova *al-džábr* z al-Chvárizmího knihy.
2. *Algebraický traktát* je prvním textem, který systematicky shrnuje jednotlivé případy algebraických rovnic a uvádí jejich řešení, které následně dokazuje.[29]
3. Oproti Eukleidově „geometrické algebře" používá převedení výrazů z jedné strany rovnice na druhou. Eukleides pouze postupně upravuje každou stranu zvlášť, dokud není schopen ukázat, že se rovnají.
4. Diofantos nepodává důkazy o svých řešení a nepředkládá systematický rozbor případů jako al-Chvárizmí.

2.4.2 Aritmetický a algebraický traktát

Oba traktáty začínají chválou Alláha. *Algebraický traktát* je uveden poděkováním chalífovi al-Mamúnovi za jeho podporu vědy. Je také zajímavé, že oba texty popisují matematické postupy slovně, což je pro nás dnes nezvyklé. *Aritmetický traktát* se zabývá zejména popisem indického počítání[30], tedy popisem desítkové soustavy a uvádí algoritmy, jak počítat pomocí konkrétních příkladů. Přitom předpokládá práci čtenáře s deskou pokrytou pískem, což umožňuje umazávání číslic při počítání. Postupy jsou popsány pomocí římských číslic. V knize (al-Chvárizmí, počátek 9. st.) najdeme i rekonstrukci *Aritmetického traktátu* s využitím arabských číslic, což je pro dnešního čtenáře mnohem příjemnější.

Algebraický traktát se zabývá zejména popisem řešení kvadratických rovnic. Při jejich popisu využívá kořen (džidhr), kvadrát (mal), neznámou (šaj) a obyčejná čísla bez vztahu ke kořenu a kvadrátu. Kořen je v dnešním slova smyslu hledaná neznámá (x), kvadrát je pak kvadratickým členem dané rovnice (x^2) a obyčejná čísla jsou absolutními členy kvadratické rovnice. Zajímavé je, jak al-Chvárizmí tyto slova popisuje ve své knize.

„Kořen je každá věc, která může být násobena sama sebou, buď je to číslo větší nebo rovno jedné nebo zlomek menší než jedna. Kvadrát je to, co obdržíme z kořene, násobíme-li ho sama sebou. Obyčejné číslo je každé číslo vyjádřené slovy, nevztahujícími se ani ke kořenu ani ke kvadrátu." (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 139)

Vidíme tedy, že neznámá může podle al-Chvárizmího nabývat pouze kladných racionálních hodnot. Se zápornými kořeny ani s nulou při řešení nepočítá.

Al-Chvárizmí rozděluje kvadratické rovnice na šest typů. Každý typ doplním dnešním zápisem rovnice.

1. Kvadrát je roven kořenu ($x^2 = Ax$)
2. Kvadrát je roven obyčejnému číslu ($x^2 = A$)

[29] Jde tedy o uchopení tohoto odvětví matematiky vycházející z řecké tradice, která zakládá své poznatky na syntetické konstrukci a deduktivních důkazech.

[30] Jde o dnešní arabské číslice.

3. Kořen je roven obyčejnému číslu ($x = A$)
4. Kvadrát a kořen jsou rovny obyčejnému číslu ($x^2 + Ax = B$)
5. Kvadrát a obyčejné číslo jsou rovny kořenu ($x^2 + A = Bx$)
6. Kořen a obyčejné číslo jsou rovny kvadrátu ($Ax + B = x^2$)

Tři úlohy z Algebraického traktátu

V této části uvedu tři úlohy, které jsou jakýmsi průřezem *Algebraického traktátu*. První z nich je jedním z případů, na které al-Chvárizmí dělí řešení kvadratických rovnic. Řešení konkrétní úlohy al-Chvárizmí doplňuje zdůvodněním (důkaz správnosti postupu). Přestože je postup ukázán na konkrétním případě, je zřejmé, jak postupovat obecně. Dále uvedu jednu úlohu, z části *Oddíl o šesti úlohách*. Jedná se o úlohy k procvičení. Al-Chvárizmí v úvodu tohoto oddílu píše:

„Zmínil jsem se, že výpočty algebry a almukabaly tě přivedou k jednomu ze šesti oddílů. Nyní vysvětlím ty úlohy, které tě přivedou k porozumění a usnadní ti osvojení, bude-li to přání vše převyšujícího Boha.“ (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 159)

Nakonec doplním dvojici úloh o jednu z kapitoly *Oddíl o obchodování*. V této kapitole se nacházejí úlohy, které jsou více zaměřené na běžný život. Stejně jako v posledním oddílu traktátu, který má název *Oddíl o měření*.

Kvadrát a kořen rovný číslu

„Kvadrát a deset jeho kořenů je rovno třiceti devíti.“ (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 141)

Což odpovídá zápisu.

$$x^2 + 10x = 39$$

Dále al-Chvárizmí uvádí:

„Rozpul počet kořenů a obdržíš při tomto zadání pět, násob ho sebou samým a máš dvacet pět. Výsledek přidej k třiceti devíti a máš šedesát čtyři. Nalezni z toho kořen, máš osm a odečti od tohoto polovinu [počtu] kořenů, což jest pět a zbydou tři a toto bude kořen kvadrátu, který jsi hledal, a kvadrát je devět.“ (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 141)

text můžeme zapsat rovnicí následovně:

$$x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25 = 39.$$

To odpovídá slovům rozpul deset kořenů a násob sebou samým. Výsledek přidej k třiceti devíti. Dnes bychom výsledek zapsali jako

$$(x + 5)^2 = 64.$$

Nalezni z toho kořen a máš osm. Odečti od toho polovinu počtu kořenů a zbydou tři a toto bude kořen kvadrátu, který jsi hledal.

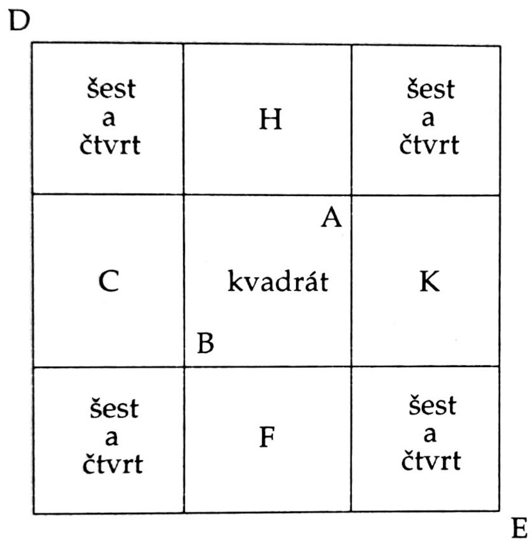
$$x + 5 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9$$

Vidíme, že tato kniha je učebnicí popisující, jak počítat kvadratické rovnice. Al-Chvárizmí v dalším oddíle doplňuje svoje výpočty oproti předchůdcům o geometrický důkaz. Nedokazuje obecný tvar kvadratické rovnice, ale jeho důkaz lze snadno zobecnit. Překážkou pro obecný zápis je nemožnost označení koeficientů kvadratické rovnice. Al-Chvárizmího „důkaz" proto doplním o dnešní obecný postup. Jedná se tedy o řešení rovnice tvaru

$$x^2 + Ax = B,$$

kde $A = 10$ a $B = 39$ v tomto konkrétním případě. Al-Chvárizmí jako důkaz uvádí následující text, který jsem rozdělil a po částech jej komentuji.

„Co se týče případu, kvadrát a deset kořenů je rovno třiceti devíti dirhamům; pak obrázek[31] *tohoto je následující: Čtvercový rovinný obrazec s neznámými stranami – to je kvadrát, který chceš objevit spolu s jeho kořenem. Je to rovinný obrazec AB, jehož každá strana je kořen kvadrátu."* (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 144)



Obr. 2.5: Doplnění čtverce (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 146)

Tím je definováno, co hledáme a jak myšlenku převést do geometrické algebry. Hledáme tedy délku strany čtverce o obsahu x^2. Dirhamem je v textu označován absolutní člen kvadratické rovnice. (Jde o měnu, kterou se tehdy platilo.) Dále text pokračuje

„Proto, když řekneme, že ke kvadrátu přičteme deset kořenů, vezmeme čtvrtinu z deseti [kořenů], to jest dva a půl [kořene] a sestrojíme každou z těchto čtvrtin na jedné ze stran rovinného obrazce tak, že budou pospolu s prvním obrazcem, to jest obrazcem AB, přičemž jejich šířka je dva a půl, a označíme tyto plochy H, F, K, C. Obdržíme rovinný obrazec s různými neznámými stranami, v jehož každém ze čtyř rohů chybí [obrazce rozměrem] dva a půl na dva a půl. Aby se tento obrazec změnil na čtvercový, je nutno doplnit čtyři obrazce [rozměrem] dva a půl na dva a půl, což je dohromady dvacet pět. (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 145)

[31] Jedná se o obrázek 2.5.

Al-Chwárizmí tak konstruuje čtverec z obrázku 2.5. K původnímu čtverci x^2 přičítá 4-krát obdélník o délce stran x a $\frac{A}{4}$

„Víme, že první obrazec, to jest obrazec čtvercový, dohromady s obrazci, které ho obklopují, představujícími deset kořenů, představuje číslo třicet devět.“ (al- Chvárizmí, počátek 9. st., str. 145)

Tato věta odpovídá zápisu

$$x^2 + 4 \cdot \frac{A}{4} \cdot x = B, \tag{2.12}$$

což je rovnice vyjadřující obsah křížové části obrázku 2.5.

„Přidáme-li k tomuto obrazci dvacet pět, to jest čtyři čtverce v rozích obrazce AB, velký obrazec se změní na čtverec, to jest obrazec DE.“ (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 145)

Al-Chvárizmí si zde tedy uvědomuje, že získal čtverec o délce strany $x + \frac{A}{2}$, který je o čtyři čtverce v rozích $(4(\frac{A}{4})^2)$ v tomto konrétním případě 25 jednotek obsahu větší než původní kříž. Dnes to můžeme zapsat jako

$$B + 4\left(\frac{A}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{A}{2}\right)^2.$$

Součet levé strany je tedy po úpravě roven $B + (\frac{A}{2})^2$, což je po dosazení konkrétních hodnot 64. Proto může al-Chvárizmí pokračovat tvrzením.

„Víme, že celý tento obrazec je roven šedesáti čtyřem a každá jeho strana, to jest kořen, je rovna osmi. (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 145)

Vidíme, že se zde nepočítá s možností záporného kořenu. Dnes bychom psali

$$x + \frac{A}{2} = \pm\sqrt{B + 4\left(\frac{A}{4}\right)^2}.$$

Jestliže od osmi odečteme dvakrát čtvrtinu deseti, to jest odečteme pět od konců strany největšího obrazce, tedy obrazce DE, je zbytek strany tři, což je kořen tohoto kvadrátu.

Jinými slovy jedná se o operaci al-muquabala, tedy odečtení členu z obou stran za účelem jeho eliminace. Výsledek úprav je následující

$$x = \pm\sqrt{B + 4\left(\frac{A}{4}\right)^2} - 2\frac{A}{4}.$$

Úvodní text pokračuje vysvětlením.

„A toto jsme také provedli, když jsme rozpůlili deset kořenů, vynásobili jsme toto samo sebou a přičetli jsme toto k obyčejnému číslu, to jest k třiceti devíti, čímž jsme doplnili obrazec tím, čeho se nedostávalo v jeho čtyřech rozích. Protože čtvrtina libovolného čísla, vynásobená sama sebou a poté čtyřmi, je rovna násobku poloviny [čísla] sama se sebou, vynásobili jsme polovinu [počtu] kořenů samu se sebou místo [vynásobení] čtvrtiny [počtu kořenů) sama se sebou a poté čtyřmi.“ (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 145)

Třetí úloha z oddílu o šesti úlohách

„Rozdělil jsi deset na dvě části, potom jsi dělil jednu druhou a jejich podíl je 4. *Jak velké jsou tyto dvě části.“* (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 161)

Tato úloha není náročná a řešitel by ji zvládl vyřešit rozborem případů, pokud by předpokládal, že výsledkem je celé číslo. Následující řešení ukazuje, že al-Chvárizmí ji uvádí jako příklad aplikace jednoho z šesti případů, na které rozdělil řešení kvadratických rovnic.

Řešení

„Pravidlo je následující: Vezmi jednu z částí jako věc a druhou jako deset bez věci, dále děl deset bez věci věcí a obdržíš čtyři. Víš, že pokud násobíš podíl dělitelem, obdržíš hodnotu, která se dělila. Podíl je v této úloze čtyři a dělitel je věc, proto součin čtyři krát věc, což jsou čtyři věci, jsou rovny hodnotě, která se dělila, což je deset bez věci. Proto doplním číslo deset věcí a přičtu ji ke čtyřem věcem a obdržím: Pět věcí je rovno deseti a tedy jedna dvěma. Toto je jedna z částí. Tato úloha tě přivedla k jednomu z šesti oddílů, jmenovitě: Kořeny jsou rovny číslu.“ (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 161)

Nyní přepíšu výše uvedené úvahy do dnešního zápisu. Věc bychom dnes zapsali jako neznámou x. Pak zápis vypadá takto

$$\frac{x-10}{x} = 4.$$

Následuje vynásobení obou stran neznámou

$$x - 10 = 4x \quad \Rightarrow \quad 5x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Pokud by řešitele nenapadlo označit si dvě části jako x a $x - 10$, mohl by tuto úlohu řešit jako rovnici o dvou neznámých. Došel by tak k zápisu

$$x + y = 10, \quad \frac{x}{y} = 4.$$

Následně by řešil dvě rovnice o dvou neznámých. Tato úloha je jedna z těch, co budu zadávat ve výzkumné části žákům. Očekávám, že i toto řešení se tam objeví.

Úloha z oddílu o obchodování

„Pokud tázající říká: Pracující, který má měsíční výdělek deset dirhamů, pracoval šest dní. Jaký je jeho díl, víš-li, že šest dní je jedna pětina měsíce a díl dirhamů

je takový, jako díl odpracovaného času z měsíce.“ (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 179)

Úloha o pracujícím je relativně snadná. V následujícím řešení, které al-Chvárizmí uvádí, je vidět, že u úloh tohoto typu nebyla snaha řešení vysvětlit. Stále se jedná o jakýsi postup, jak dojít k řešení.

Řešení

„Pravidlo je následující: Jestliže, jak bylo řečeno, měsíc je třicet dní, což je míra, deset dirhamů je cena, šest dní je množství a [ptáme se], jaký je díl, to jest hodnota. Vynásob cenu, to jest deset, množstvím, které stojí proti tomu, to jest šest, obdržíš šedesát a děl třiceti, to jest známým číslem a to mírou; obdržíš dva dirhamy a to je hodnota.“ (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 179)

Je vhodné si zde uvědomit, proč tento postup funguje. Na první pohled není zřejmé, na základě čeho je získán správný výsledek.

Úlohu bychom si mohli zapsat takto. Nemění se velikost výplaty za určitou dobu. Mohli bychom tedy spočítat, kolik dirhamů si pracující vydělá za jeden den. To znamená 10 bychom vydělili 30. Podobně bychom mohli postupovat s naší neznámou odměnou. Označme ji x a vydělme ji 6. Tyto hodnoty se rovnají.

$$\frac{x}{6} = \frac{10}{30}$$

Pokud vynásobíme obě strany 6, dostaneme al-Chvárizmího výše uvedený postup.

Shrnutí práce al-Chvárizmího

Charakter al-Chvárizmího textů je čistě rétorický. Operace, čísla, ale i rovnost popisuje ve svých textech slovně. Nevyužívá tak velký potenciál zjednodušení zápisu pomocí poziční desítkové soustavy, kterou však sám přivádí z Indie do prostoru Středozemí. Jeho přínos tkví zejména ve schopnosti propojit vědomosti jednotlivých kultur, které mu umožnilo shromáždění velkého množství matematických textů z Indie, Řecka a Babylonie. Tyto znalosti přetavil v sepsání dvou stěžejních děl pro další vývoj evropské aritmetiky i algebry.

Al-Chvárizmího *Algebraický traktát* je první knihou, která uceleně shrnuje jednotlivé případy řešení kvadratických rovnic. Přitom postupy, které vedou k řešení dokazuje pomocí řecké „geometrické algebry“ čímž tvoří systematický základ pro vývoj algebry. Díky této knize tak mohl nastat další vývoj v tomto oboru matematiky. Svoji teorii přitom v knize neopírá o příliš mnoho příkladů z běžného života (našli bychom jich tam kolem 20). Díky jeho *Aritmetickému traktátu* se rozšířila poziční desítková soustava a ta později vedla k dalšímu rozvoji symbolického jazyka algebry. Zjednodušila totiž výpočty, ale i zápis jednotlivých algebraických výrazů.

2.5 Středověká Evropa

Za středověk považujeme dobu od rozpadu západořímského impéria koncem 5. st. n. l. po objevení Ameriky Krištofem Kolombem v roce 1492. Tato doba dobře ohraničuje etapu vývoje algebry, ve které došlo k největšímu posunu v symbolickém zápisu algebry. Spadá do ní její úplný počátek (al-Chvárizmí), který je následován dobou, ve které se přesouvalo centrum evropské vzdělanosti z oblasti blízkého východu do centra Evropy. Trvalo téměř 400 let, než se podařilo zejména na severu dnešní Itálie rozvinout další generace vědců, kteří na sebe, podobně jako to bylo za dob Alexandrijské a posléze Bagdádské knihovny, vědecky navazovali a posouvali vývoj algebry, ale samozřejmě i jiných odvětví, rychleji kupředu.

Dalším důvodem rychlejšího vývoje ve vrcholného středověku, který můžeme datovat cca od počátku 12. století, bylo sjednocení evropského jazyka vzdělanosti, kterým byla ve většině případů latina. Zejména na počátku tohoto období docházelo k mnohým překladům řeckých, arabských nebo indických děl. Tato díla byla často dochována díky arabským verzím původních děl. Jedním z míst, kde k překladům docházelo, bylo dnes španělské Toledo, které bylo okupováno Maury až do roku 1085, kdy jej Španělé dobyli zpět. Překladatelé často pocházeli jak z řad evropských muslimů, kteří se díky víře naučili arabsky (mozarabové), tak naopak arabským křesťanům (moriskové), kteří se asimilovali do nové křesťanské společnosti. Tato díla, mezi která často patřily i původně řecké texty přeložené Araby do arabštiny a byla nyní překládaná do latiny, se začala šířit do zbytku Evropy. (Juškevič, 1978, str. 334)

2.5.1 Leonardo Pisánský – Fibonacci

Obr. 2.6: Leonardo da Pisa (Giovanni Paganucci)

Leonardo Pisánský, dnes lépe znám jako Fibonacci, se narodil pravděpodobně roku 1170 v Pise a zemřel na stejném místě o 80 let později. Jeho přízvisko Fibonacci je odvozeno od jeho rodinného příslušenství k rodu Bonacci, přesněji bylo odvozeno od latinských slov „filio Bonacci“, což znamená „syn Bonacciho“. Mnohé o Fibonaccim známe z úvodu jeho *Liber Abaci*, kde uvádí, jak byl díky práci svého otce, který byl diplomatickým zástupcem obchodníků města Pisa, vzděláván v tehdejším městě Bugia, dnes známého jako město Bejaia, ležící v současném Alžírsku. To bylo dobrým základem proto, aby uměl nejen latinsky, ale nejspíš také arabsky. Jeho následné cesty po Středozemí (Egypt, Sýrie, Řecko, Sicílie a Provance) znamenaly možnost prostudovat mnohé matematické spisy. V úvodu svého textu Leonardo nabádá k případné shovívavosti, pokud něco nenapsal dostatečně přesně nebo podrobně.

„Není nikdo kdo by byl bez chyby a ve všech věcech je obezřetný“[32] (Fibonacci, 1202a, str. 16).

Fibonacci se vrátil kolem roku 1200 zpět do Pisy, kde začal sepisovat všechny znalosti, co nabyl na cestách po Středomoří. Nejvýznamnější práce, kterou napsal, je kniha *Liber abaci*. Publikoval poprvé v roce 1202. Motivací pro sepsání této knihy bylo právě shrnutí znalostí, které nabyl během svých cest. Dnešní anglický překlad knihy Fibonacci (1202a) má úctyhodných 531 stránek.

Tato kniha je ve své první části učebnicí indického počtu, v té době tak říkali práci s arabskými čísly, tedy desítkovou poziční soustavou, kterou používáme dodnes. Poznatky, které shrnuje, ovšem nejdou o moc dál, než jak je představil al-Chvárizmí. Oproti al-Chvárizmímu se kniha liší zejména rozsahem a podrobností, jakou jsou jednotlivé části matematiky popsány. Je neuvěřitelné kolika „řešenými příklady“ Fibonacci ilustruje jednotlivé postupy.

Liber Abaci

V prvních sedmi kapitolách knihy vysvětluje, jak s arabskými čísly provádět základní matematické operace, jako jsou sčítání, odčítání, násobení a dělení. Ukazuje také práci se zlomky. Vysvětlení demonstruje na mnoha praktických příkladech. V dalších sedmi kapitolách uvádí mnoho příkladů, jejichž řešení vede na lineární rovnice nebo jejich soustavu. V mnoha příkladech používá trojčlenku, kterou opatřuje i podobným zápisem, jaký se dnes v některých školách učí žáci na druhém stupni základní školy. Příklad tohoto řešení můžete nalézt na obrázku 2.7 vlevo.

Součástí této knihy je i několik velmi známých úloh, jako jsou úloha o králících, jejíž řešení vede na součet posloupnosti, kterou dnes nazýváme Fibonacciho. Tato posloupnost našla široké uplatnění i v dnešní době, kdy nacházíme její aplikace v přírodě nebo třeba v informatice. Samotná posloupnost má první dva členy $0, 1$ a rekurentní předpis

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

V poslední patnácté kapitole svého *Liber Abaci* Fibonacci uvádí podobnou část jako al-Chvárizmího *Algebraický traktát*, je zřejmé, že se jím inspiroval. Text zapisuje striktně písemně, pokud nepočítáme jeho boční nákresy. Jak je vidět na obrázku 2.7 str. 46. Velký přínos knihy je ale zejména v tom, že sepsal takto komplexní dílo, které shrnuje v podstatě veškeré poznání z aritmetiky a algebry té doby a postupy demonstruje na mnoha příkladech. Ukazuje, jak počítat s indickými čísly, které na rozdíl od al-Chvárizmího zapisuje číslovkami, čímž umožňuje další fázi symbolizace zápisu. Dostal tak téměř všechny podstatné matematické znalosti z celého Středozemí do jednoho centra, jímž se stává severní Itálie.

Úlohy

V této části uvedu několik úloh z 8.–15. kapitoly *Liber abaci*, které se již více věnují úlohám vedoucím na algebraické řešení. Úlohy a řešení budu překládat do

[32] Anglický překlad: *„There is no one who is without fault, and in all things is althogether circumspect.“*

českého jazyka, i když zdroj, ze kterého čerpám, je v angličtině. Anglickou verzi uvádím vždy v poznámce pod čarou. V úvodu 8. kapitoly Fibonacci vysvětluje, jak řešit přímou úměrnost. Rozebírá, pro jaké případy lze tento postup aplikovat. Snaží se zde uvést takový postup, aby mohl být použit obecně. Jako příklad využívá nakupování nějakého množství zboží za určitou cenu. Předpokládá zde, že čtenář konkretizované pojmy, jako je množství zboží a jeho cena, bude schopen nahradit podle kontextu právě řešené úlohy.

„Ale nejprve bych měl ukázat, jak tato metoda funguje. Jak jsem uvedl dříve, máme zde 4 proporcionální čísla; jmenovitě poměr prvního ku druhému je stejný jako poměr třetího ku čtvrtému. (To znamená, že je stejný poměr určitého množství zboží a jeho výsledné ceny, jako je poměr jakéhokoli množství téhož zboží a jeho ceny. Jinak řečeno, poměr dvou množství téhož zboží je stejný jako poměr jejich ceny) Součin druhého čísla s třetím bude tedy stejný jako součin prvního čísla s čtvrtým, jak je to v aritmetickém nebo geometrickém důkazu.“[33] (Fibonacci, 1202a, str. 128, vlastní překlad)

Porovnává zde tedy poměry zboží a na základě obrázku podobnému obrázku 2.7 vlevo vysvětluje, poč může křížem násobit čísla zapsaná ve schématu, kde jedno z čísel je hledané. Následně rozebírá jednotlivé příklady. (Uvádím zde jen jeden pro ilustraci)

„Pokud je čtvrté číslo neznámé, součin druhého a třetího čísla vyděleného prvním, pak je toto neznámé číslo výsledkem tohoto dělení.“ [34](Fibonacci, 1202a, str. 128, vlastní překlad)

Příkladům na toto téma věnuje Fibonacci mnoho stránek své knihy. Postupně od jednoduchých úloh přes úlohy s několika přímými úměrami. Na obrázku 2.7 je úloha z originální ručně psané knihy z roku 1202 (Fibonacci, 1202b, str. 45.v), knihu lze nalézt ve Florencii v knihovně *Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.* Jedná se o následující úlohu:

Úloha o stříbrné hrudce

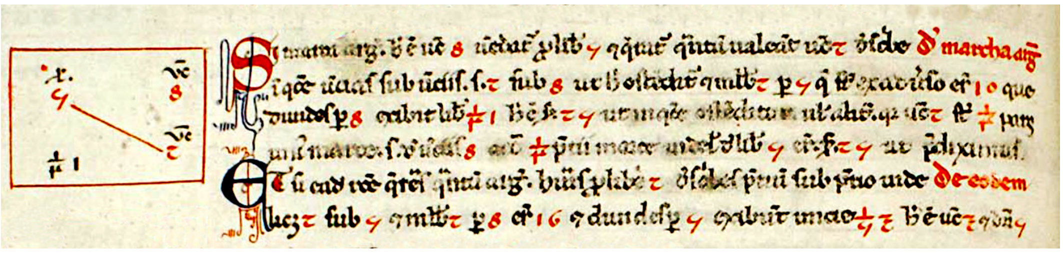
„Jedna stříbrná hrudka, která váží 8 uncí, se prodává za 5 liber. Hledáme, jakou cenu má stříbrná hrudka o váze 2 unce.“[35] (Fibonacci, 1202a, str. 164, vlastní překlad)

---

[33]Důkaz, o kterém tu mluví, se mi nepodařilo v jeho knize nalézt. Jedná se o vlastní překlad. Originální text je následující: *„But I shall show first how this method proceeds, that there are indeed, as I said, IIII proportional numbers in negotiations; namely as the first is to the second, so is the third to the fourth, that is as the number of some quantity of merchandise is to the quantity number of its price, so is any other quantity of the same merchandise to the number of its price; or as any quantity of merchandise is to any quantity of the same merchandise, so is the price of one to the price of the other; and as there are 4 proportional quantities, the product of the second by the third will be equal to the product of the first by the fourth, as is in arithmetic or in geometrical proof“*

[34]*Anglický překlad: „If the fourth quantity is the only unknown, indeed the multiplication of the second quantity by the third you divide by the first, then certainly the fourth quantity results from the division.“*

[35]Anglický verze textu: *„One mark of silver, that is 8 ounces, is sold for 5 pounds. and it is sought how much 2 ounces arc worth“*



Obr. 2.7: Jedna z úloh z Fibonacciho *Liber Abaci*

Řešení

„V tomto příkladě si napíšete unce pod unce, přesněji 2 *pod* 8*, jak je ukázáno na obrázku.*[36] *Vynásobíte* 2 *a* 5*, které jsou diagonálně proti sobě. Dostanete* 10*, což vydělíte* 8*. Výsledek je* $\frac{1}{4}1$ *liber, což je* 25 *soldi. Nebo postupujeme jiným způsobem; protože jsou* 2 *unce* $\frac{1}{4}$ *původní hrudky stříbra, získáte za ní* $\frac{1}{4}$ *ceny, tedy* $\frac{1}{4}1$ *libry, což je opět* 25 *soldi.“*[37] (Fibonacci, 1202a, str. 164, vlastní překlad)

Ve výše zmíněném textu najdeme hned dvě řešení. První z nich je popis jak postupovat, tedy algoritmus, který je velmi podobný tomu, jak někteří dnešní žáci řeší přímou úměrnost pomocí trojčlenky. Druhý postup je vysvětlením a ověřením, že předchozí postup dává smysl.

Dnes bychom řešení zapsali takto. Poměr ceny ku množství zboží zůstává stejný. Proto platí

$$\frac{x}{2} = \frac{5}{8} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

Fibonacci sice neuměl takto symbolicky zapsat postup, přesto v jeho náčrtku na okraji stránky (Obr. 2.7) už můžeme spatřovat velké zjednodušení zápisu oproti zápisu slovnímu, který je ale stále hlavní částí jeho textu.

Úloha z 15. kapitoly

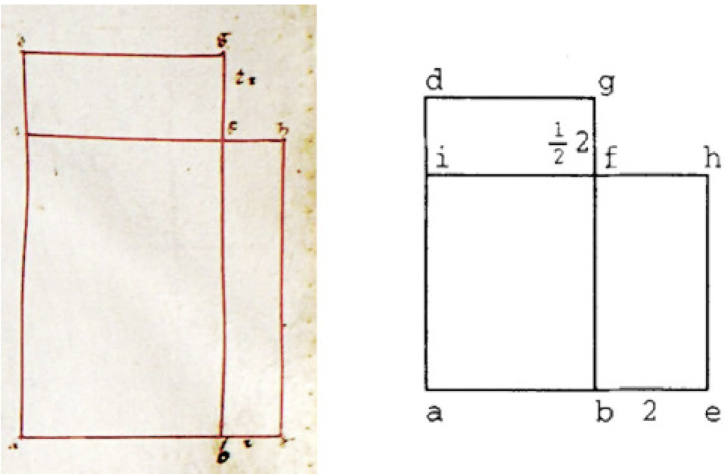
Úlohy o rozdělení výplaty pro vojáky (muže) jsou jedny z těch, které se v *Liber Abaci* vyskytují v mnoha variantách. Tento námět je také častým tématem už v době *Rhindova papyru*, kde také můžeme nalézt úlohy na toto téma.

„Rozdělil jsem mezi své muže 60 *denárů, tak že každý dostal stejně. Později jsem ke svým mužům přidal dva navíc a rozdělil jsem jim znovu* 60 *denárů. Každý z druhé skupiny mužů dostal o* $\frac{1}{2}2$ *denárů méně.“*[38] (Fibonacci, 1202a, str. 562, vlastní překlad)

[36] Na obrázku 2.7 vlevo.

[37] Anglická verze textu: *„You write the ounces below the ounces in the problem, namely the* 2 *below the* 8*, as is shown here, and you will multiply the* 2 *and the* 5 *that are diagonally opposite; there will be 10 that you divide by the* 8*; the quotient is* $\frac{1}{4}1$ *pounds, that is* 25 *soldi, as is shown in the problem; or in another way, because the* 2 *ounces are* $\frac{1}{4}$ *of a mark, namely of the* 8 *ounces, you take* $\frac{1}{4}$ *of the price of the mark, namely of the* 5 *pounds; there will be* 25 *soldi, as we said before.“*

[38] $\frac{1}{2}2$ znamená hodnotu $\frac{5}{2}$ Fibonacci ji zapisoval takto, proto jeho zápis zachovávám. Dále již budu uvádět složené zlomky ve formě, jak je známe.
Původní text: *„I divided* 60 *by a number of men, and each had an amount, and I added two more men, and I divided the* 60 *by all of them, and there resulted for each* $\frac{1}{2}2$ *denari less than that which resulted first“*



Obr. 2.8: Obrázek k řešení úlohy z patnácté kapitoly *Liber abaci.* Vlevo z originální knihy (Fibonacci, 1202b, str. 191r), vpravo z anglického překladu (Fibonacci, 1202a, str. 562).

Řešení

Fibonacciho řešení tohoto příkladu nebudu uvádět celé. Je možné ho nalézt v knize (Fibonacci, 1202a, str. 562–563). Celkově je text řešení dlouhý více než jednu stránku, ve velké části textu totiž Fibonacci popisuje konstrukci výše uvedeného obrázku 2.8[39]. Pro ilustraci zde uvedu první dvě věty této konstrukce.

„Nechť počet první skupiny mužů je úsečka .ab.. Vztyčme nad ní druhou úsečku .bg. pod pravým úhlem tak, že obsah obdélníku reprezentuje těch 60 denárů.“ [40] (Fibonacci, 1202a, str. 562, vlastní překlad)

Následně pomocí tohoto obrázku zjistí na základě poměrů jednotlivých stran obdélníků $abgd$, $aehi$ a $behf$, $ifgd$, které mají stejný obsah, že pokud ab stanoví jako *„věc“*[41], pak bf je $1\frac{1}{4}$ „věci“. Z čehož plyne, že ab krát bf je $1\frac{1}{4}$ „census“, což je slovo, které Fibonacci používá pro druhou mocninu neznámé (věci), v tomto případě ve smyslu obsahu obdélníku bi[42]. V dalším kroku Fibonacci přidá k tomuto obdélníku obsah obdélníku fd, což je $2\frac{1}{2}$ *„věci“*, a to se rovná celému obdélníku bd, který má obsah 60. Získává tak rovnici, kterou bychom dnes zapsali

$$1\frac{1}{4}x^2 + 2\frac{1}{2}x = 60.$$

Pokračuje takto: Vydělíme je všechny počtem „census“, jmenovitě $1\frac{1}{4}$, což vede k výsledku „census“ plus 2 „věci“ se rovná 48 denárů. Nyní vezmeme polovinu „věcí“ umocněnou na druhou a přičteme ji k 48. Dostaneme 49. Nakonec vezmeme

[39] Na obrázku je uvedený obrázek z původní knihy i obrázek z anglického překladu. Oba obrázky tedy ilustrují tutéž úlohu.

[40] Anglický překlad: *„Let the number of the first men be the line segment .ab., and erect upon it a second line segment .bg. at right angles making a rectangle which contains each of the aforewritten 60 denari.“*

[41] Tak pojmenovával Fibonacci neznámou, latinsky *„res“* (věc), někdy též *„radix“* (kořen).

[42] Obdélníky nazývá stejně jako to dělali Řekové podle jedné z diagonální dvojice vrcholů obdélníka

kořen z 49 a odečteme od něj polovinu „věcí“ a zbyde nám 6, což je číslo ab. Dnes bychom zbytek postupu zapsali takto.

$$x^2 + 2x = 48 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 = 48 + 1 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 = 49$$

$$x + 1 = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

Stále zde Fibonacci neuvažuje záporný kořen po odmocnění jako řešení. V tomto případě by navíc ani nedávalo smysl, aby byl počet mužů záporný. Nakonec příkladu Fibonacci vše důsledně dosazuje do původního zadání a ověřuje, že výpočet dává smysl.

Celkově je řešení této úlohy velmi dlouhé a z dnešního pohledu i hodně nepřehledné, což je způsobené absencí symboliky. Porovnáme-li pár rovnic, které popisují průběh řešení, se zestručněným Fibonacciho zápisem původního slovního řešení, je ihned vidět, že symbolika vede k větší přehlednosti a stručnosti při řešení úloh.

Poslední Fibonacciho úloha, kterou zde uvedu, se řadí v dnešní didaktice matematiky mezi „úlohy o společné práci“. Někde jsou úlohy tohoto typu zařazovány mezi „úlohy o směsích“[43]. Zdaleka se nemusí jednat o práci ve fyzickém slova smyslu. Například může jít o napouštění nádoby z několika přítoků, nebo jako v následujícím případě mohou zvířata společně požírat jednu ovci. Cílem úloh je zjistit, za jak dlouho dojde k naplnění nebo vyprázdnění nějakého celku (vykonání nějaké práce). Na této práci se podílí několik zdrojů současně, přičemž jejich rychlost práce je různá. (V níže uvedeném příkladě společně zvířata žerou ovci.) Úloha pak vede na následující rovnici

$$\frac{1}{n_1}x + \frac{1}{n_2}x + \cdots + \frac{1}{n_m}x = 1 \tag{2.13}$$

kde x je hledaný časový údaj a $n_1, n_2, \ldots, n_m$ je čas, za jak dlouho by práci zvládl vykonat jeden zdroj, pracoval-li by samostatně. Každý zlomek $\frac{x}{n_k}$ tak udává, jakou část vykoná konkrétní zdroj při společné práci, a celý součet je tedy roven celku tedy 1. Tento typ úloh se žáci učí v 8.-9. ročníku základní školy a výše uvedený postup, který vede na sestavení rovnice 2.13, je typickým způsobem řešení. V dalším odstavci představím Fibonacciho postup, který představuje jinou úvahu obcházející sestavení rovnice.

Úloha o lvu, leopardu a medvědovi

„Lev by snědl jednu ovci za čtyři hodiny a leopard [by ji snědl] za 5 *hodin, a medvěd [by ji snědl] za* 6 *hodin: Ptají se nás, pokud by jim byla vhozena jedna ovce, jak dlouho by jim trvalo, než by ji společně pozřeli?“*[44] (Fauvel a Gray, 1987, str. 243, vlastní překlad)

[43] Například v knize (Vondrová, 2019b, str. 85) jsou dvě úlohy tohoto typu zařazeny do kapitoly slovní úlohy o směsích.

[44] Anglický překlad: *„A lion would eat one sheep in four hours; and a leopard [would eat it] in 5 hours; and a bear [would eat it] in 6: we are asked, if a single sheep were to be thrown to them, how many hours would they take to devour it?“*

Řešení

Uděláte toto: protože lvovi trvá sníst ovci 4 hodiny, vezmete $\frac{1}{4}$ a pro leoparda, kterému to trvá 5 hodin, vezmete $\frac{1}{5}$ a pro medvěda, kterému to trvá 6 hodin, vezmete $\frac{1}{6}$, a protože nejmenší společný násobek 6, 5 a 4 je 60, zjistíte, kolik sní každý ovcí za 60 hodin. Zvážíte tedy, kolik sní ovcí lev za 60 hodin; protože lev sní jednu ovci za 4 hodiny, je jasné, že za 60 hodin jich sní 15. Leopard sní pětinu z 60, což je 12 ovcí za 60 hodin. Podobně medvěd sní 10 ovcí, protože 10 je $\frac{1}{6}$ z 60. Protože za šedesát hodin sní 15 a 12 a 10 ovcí, dohromady je to 37. Proto si řeknete, za šedesát hodin snědí 37 ovcí. Co bych měl spočítat, abych zjistil, za jak dlouho snědli jednu ovci? Proto vynásobíte jedna a 60 a vydělíte 37. Výsledek je $1\frac{23}{37}$ hodiny. Což je čas, který jim dohromady bude trvat pozření jedné ovce.[45] (Fibonacci, 1202a, str. 280, vlastní překlad)

Převedením na společný násobek a zjištěním kolik každé zvíře za tento čas sní ovcí získáme jejich počet, který zvířata sní společně za 60 hodin v tomto konkrétním případě. Následně stačí vydělit tento čas (60 hodin) počtem snědených ovcí a dostaneme, za jak dlouho společně zvířata sní jednu ovci.

2.5.2 Shrnutí Fibonacciho práce

Fibonacciho *Liber Abaci* je stěžejní dílo pro vývoj matematiky na konci středověku, ale i na začátku renesance. Je výjimečné svojí komplexností a rozsahem (původní kniha má přes 400 stran). Tento rozsah je způsoben zejména tím, že kniha shrnuje v podstatě všechny matematické poznatky své doby, kromě geometrie, které věnuje Fibonacci jinou svoji knihu *Praktická geometrie* (1220). Každou kapitolu provází obrovské množství příkladů, které jsou gradované od lehkých po těžší. Například při řešení lineární závislosti nejprve uvádí závislost pouze čtyř čísel, z nichž jedno je hledané, a řeší jej dnes dobře známou trojčlenkou. Přidává mnoho příkladů na procvičení a při jejich řešení se málokdy spokojí s jedním. Většinou řešení doplňuje jiným zdůvodněním správného postupu jako v úloze *O stříbrné hrudce*, kterou jsem uvedl na straně 45.

Největším přínosem knihy z pohledu vývoje algebry je zejména představení těchto poznatků evropskému publiku. Nejdůležitějším prvkem knihy je vysvětlení početních operací s poziční desítkovou soustavou a využití arabských číslic v ještě stále rétorické algebře[46].

[45] Anglický překlad textu: „*You do thus: as it takes the lion four hours to eat the sheep, you put* $\frac{1}{4}$ *and for the* 5 *hours it takes the leopard, you put* $\frac{1}{5}$ *and for the* 6 *hours it takes the bear, you put* $\frac{1}{6}$*, and because the least common multiple of the* 6, 5, *and* 4 *is* 60, *you put it that they devour the sheep in* 60 *hours. You consider therefore how many sheep the lion eats in the* 60 *hours; as the lion devours one sheep in four hours, it is clear that he devours* 15 *sheep in the* 60 *hours, and the leopard devours a fifth of the* 60, *that is* 12 *sheep, in* 60 *hours. Similarly the bear devours* 10 *sheep, as* 10 *is* $\frac{1}{6}$ *of the* 60. *Therefore in the* 60 *hours they eat* 15, *and* 12, *and* 10, *that is* 37 *sheep. Therefore you say, I put* 60 *hours, and they eat* 37 *sheep. What shall I put so that they eat one sheep? You multiply therefore the one by the* 60, *and you divide by the* 37*; there is* $1\frac{23}{37}$ *hours. And in this time they will devour the sheep.*“

[46] Al-Chvárizmí sice také používal desítkovou poziční soustavu a arabské číslice při počítání, v rámci algebry psal ale čísla slovně.

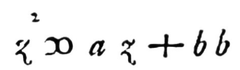
2.6 Vývoj symboliky algebry během renesance

Na Fibonacciho práci stavěli italští i němečtí matematici, kteří dále rozvíjeli algebru. Podstatná pro její rozvoj byla zejména symbolika, která nám dnes umožňuje stručně a přehledně zapisovat myšlenky. Ve škole říkáme procesu, kdy žák transformuje slovní úlohu do algebraického zápisu, „matematizace slovní úlohy". Základem tohoto převodu do algebraického jazyka je stanovení neznámé, kterou dnes značíme různými písmeny.

Do této části textu zmínění matematici (s výjimkou Diofanta) popisovali algebraické rovnice slovy, kde al-Chvárizmí slovně zapisoval i čísla. Někteří rovnice doplňovali o zdůvodnění pomocí syntetické geometrie. Fibonacci začal používat v rámci zápisu arabské číslice a kraj stránek ilustroval schématy, která pomáhala zpřehlednit slovně popsaný postup. K dnešnímu zápisu rovnic mají ale tyto přístupy ještě daleko. Ve 15.-17. století došlo v Evropě k vývoji symbolického zápisu tak, že na konci tohoto období zápis Descarta vypadá téměř stejně jako zápis dnešní. Došlo tak k pokroku od Al-Chvárizmího obecného zápis rovnice, kde podobný zápis používal i Fibonacci:

„Kvadrát rovný kořenům a číslu."[47]

k zápisu typu



Obr. 2.9: Descartův zápis rovnice (Descartes, 1637, str. 6)

Descartes rozlišuje neznámé a koeficienty rovnice. Navíc využívá horní index nad neznámou pro značení mocniny, jak ho známe dnes, symbol plus i znak rovnosti. Navíc díky jasnému pojmenování koeficientu u lineárního členu je možné počítat s tímto obecným vzorcem. V al-Chvárizmího zápisu není jasné, kolik kořenů je myšleno, a proto je nutné v konkrétním příkladě tento údaj specifikovat.

V předchozích částech této práce jsem již ukázal, že Diofantos měl pro neznámou speciální znak a stejně tak pro její mocniny, tím ale výrazně předběhl dobu.[48] Následně al-Chvárizmí, ale i Fibonacci o neznámé mluvili jako o hledané „věci" v jejich jazyce (šaj, res, cosa), a právě z italského slova „cosa" vznikl název pro celou generaci italských matematiků, kteří si říkali „cosisté". Dokonce algebra byla v té době nazývána „uměním věci". Další mocniny byly nazývány slovy, která většinou reprezentovala v daném jazyce slovo pro plochu (x^2) nebo krychli (x^3).

Problémem tohoto zápisu je, že pokud je neznámá a její mocnina značena úplně jiným slovem nebo písmenem, pak mezi nimi není nijak vyjádřena jejich závislost. Výše popsaní matematici také neuměli snadno popsat algebraickou rovnici

[47] Jedná se o odhad zápisu, který jsem sestavil na základě rovnice uvedené na obrázku 2.9 a zápisu podobné rovnice v knize (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 140) „*Co se týče kvadrátů rovných kořenům.*"

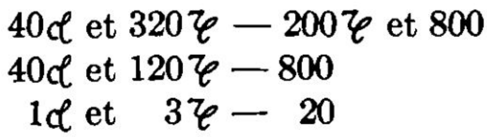
[48] Tento zápis podrobněji popisuje tabulka 2.1 na stránce 32. Kde se může čtenář podívat i na srovnání zápisu neznámé a jejích mocnin mezi Diofantem a italskými matematiky, kteří zápis převzali nejspíš od al-Chvárizmího.

o více než dvou neznámých. První neznámá byla označována jako „věc“ a druhá jako „mnohost“. Při takovémto značení je ale velmi obtížné stanovit další neznámé. Navíc je problematické i vyjadřování dalších mocnin druhé neznámé.

V další části práce shrnu, jak se vyvíjel symbolický zápis, který byl důležitým předpokladem pro další vývoj matematiky. V této práci není možné obsáhnout veškerý vývoj, ale pokusím se nastínit alespoň zajímavé zlomy.V textu budu vycházet zejména z knihy od Floriana Cajoriho (*A History of Mathematical Notations*, 1993).

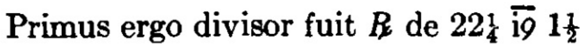
2.6.1 Johannes Regiomontanus 1436 – 1476

Německý matematik který působil i v Římě a Benátkách. Podle Connora a Robertsona byl prvním evropským matematikem, který čerpal z Diofantovy *Aritmetiky*, což může být i důvod v posunu k větší symbolizaci zápisu. Dalším významným důvodem pro vývoj a hlavně sjednocení znaků používaných v matematice byl knihtisk, který postupně přichází na scénu. Regiomontanus si zařídil vlastní přenosné zařízení, na kterém vytisknul kalendář a také *Ephemerides*, ve kterých popisuje, jak pomocí pozice Měsíce určit zeměpisnou délku. Tuto knihu později používali jak Christopher Columbus, tak Amerigo Vespucci. (O’Connor a Robertson, 2004)



Obr. 2.10: Regiomontanův zápis rovnice z knihy (Cajori, 1993, str. 95)

Výše uvedený obrázek je Cajoriho rekonstrukce Regiomontanova zápisu. Jedná se o část řešení rovnice $40x^2 + 320x = 200x + 800$. Používá zde symbol ȼ pro x^2 a jiný symbol ᵹ pro x. Stále píše místo znaménka součtu „et“. Zajímavý je také poslední řádek, kde před znak ȼ píše číslovku 1. Regiomontanovo mínus můžeme vidět na následujícím obrázku, ve kterém je zapsáno řešení výše uvedené rovnice.



Obr. 2.11: Regiomontanův zápis odmocniny z knihy (Cajori, 1993, str. 95)

Zde používá znak ℞, což je zkratka ze slova „*radix*“, pro označení odmocniny z $22\frac{1}{4}$. Celý text z obrázku 2.11 tak odpovídá dnešnímu zápisu.

$$\text{Prvním dělitelem je proto } \sqrt{22\tfrac{1}{4}} - 1\tfrac{1}{2}$$

Tímto způsobem však nelze odmocnin celý výraz. Pokrok v používání tohoto znaku najdeme u dalšího matematika.

2.6.2 Luca Pacioli 1445 – 1517

Italský matematik Luca Pacioli napsal knihu *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita*, která byla během 16. století používána jako učebnice matematiky. Druhou jeho knihu *Divina proportione* ilustroval Leonardo da Vinci, který byl jeho přítelem. V první zmíněné knize se objevuje mnoho znaků, které zásadně zkracují zápis algebraických rovnic. Například zde najdeme znak pro plus, mínus, odmocninu nebo znak rovnosti. Většina těchto symbolů je tvořena prvními písmeny slova, které je v italštině popisuje. Například písmeno **℞** pro mnoho významů. Například pro odmocninu jako v následujícím obrázku. (O'Connor a Robertson, 1999c)

℞.200. for $\sqrt{200}$
℞.*cuba. de* .64. for $\sqrt[3]{64}$
℞.*relato.* for fifth root
℞ ℞ ℞. *cuba.* for seventh root
℞ .6.*m̃*.℞.2. for $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

Obr. 2.12: Pacioliho zápis odmocnin z knihy (Cajori, 1993, str. 107)

Jinde je tento znak doplněný o písmeno ***v*** (Obrázek 2.13), což je nejspíš zkratka pro slovo *univasale*, a je tím myšleno až do konce řádku (někdy též po znaménko rovnosti).

℞*v*. ℞.20$\frac{1}{4}$.*m̃*.$\frac{1}{2}$.

Obr. 2.13: Pacioliho zápis složené odmocniny (Cajori, 1993, str. 107)

Obrázek 2.13 odpovídá zápisu $\sqrt{\sqrt{20\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}}$.

Oproti Regiomontanovi používá Pacioli pro neznámou zkratky ***co.*** jako *cosa* a ***ce.*** podle *census.* a ***cu.*** pro *cubus* jako například na obrázku 2.14. Další mocniny značí zkrácen podle tabulky 2.1 ze strany 32. Například x^8 píše jako ***ce.ce.ce***, jedná se o multiplikativní způsob kumulace mocnin tj. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Značení ***ce.ce.ce*** je ale z dnešního pohledu velmi zvláštní, protože by odpovídalo $x^2x^2x^2$, což ale jak víme dává x^6. Je tedy vidět, že i v textu tak významného matematika, z jehož knih se učilo několik dalších generací matematiků, se nevyhne symbolicky nesystematickému zápisu a tuto „chybu" budou muset napravit jeho následovníci. Dalším příkladem využití symbolu **℞** je následující zápis.

co. a. ℞. fa. 1. ce

Obr. 2.14: Pacioliho zápis odmocňování (Cajori, 1993, str. 107)

Obrázek reprezentuje větu „*cossa*" umocněno na druhou je „*census*" (x umocněno na druhou je x^2). Využívá tedy stejný znak pro naprosto opozitní operaci, nejspíš si uvědomuje jejich inverznost.

1. *co.* *m̃.* 1. *ce.* *de.* *ꝑ°*________36

Obr. 2.15: Pacioliho zápis rovnice (Cajori, 1993, str. 110)

Poslední obrázek ukazuje, jak Pacioli zapisoval rovnice. Místo dnešního znaku rovnosti používal dlouhé podtržítko a znaky ***m̃*** a ***p̃*** jako zkrácený tvar italských slov „*meno*“ a „*piú*“ (mínus a plus). Také si můžeme všimnout znaku *ꝑ°*, který označuje druhou neznámou. Celá rovnice by tak dnes měla tvar

$$x - y^2 = 36$$

Na tomto zápisu je fascinující, že zde Pacioli kombinuje znaky pro první neznámou (v tomto případě ***ce***) s dalším znakem *ꝑ°*, který symbolizuje druhou neznámou. Získáváme tak zápis, ve kterém již bude každá neznámá a její mocnina provázaná pomocí tohoto symbolu. Tato symbolika u předchůdců chyběla. Nebylo možné ze zápisu přímo vidět závislost proměnné a jejích mocnin.

2.6.3 Giralomo Cardano 1501 – 1576

Cardano získal své znalosti, když dělal asistenta svému otci Faziu Cardanovi, který se věnoval geometrii a právu. Oba obory vyučoval na universitě v Pavii. Jak váženým matematikem Fazio byl, dokládá fakt, že k němu na konzultace z geometrie chodil Leonardo da Vinci. Je tak pravděpodobné, že se znal i s Paciolim.

Girolamo se později od svého otce oddělil a začal studovat medicínu postupně na univerzitách v Pavii a Padově. V roce 1539 se potkal s Nicolo Tartagliou, o kterém věděl, že vyhrál matematickou soutěž v řešení kubických rovnic, a chtěl se od něj naučit jeho metody. Slíbil mu při tom, že jeho metody nepublikuje. To ale později udělal ve své knize *Ars Magna* a stal se tak prvním matematikem, který publikoval obecné řešení algebraické rovnice třetího stupně. (O'Connor a Robertson, 1998)

„*Byl to první výsledek evropské matematiky, který překonal antické dědictví*“ (Kvasz, 2008, str. 33)

V této knize se mu totiž podařilo najít metodu pro řešení kubické rovnice. Spekuluje se však o tom, jestli tohoto výsledku dosáhl sám, je totiž pravděpodobné, že opravdovým autorem myšlenky byl Nicolo Tartaglia a Cardano z něj jeho myšlenku vylákal. Podrobněji se lze dočíst o tomto tématu v (van der Waerden, 1985, str. 54–56).

Ve své předchozí knize *Practica arithmeticae generalis* (1539) používá Pacioliho systém pro značení neznámé (***co.***, ***ce.***, ***cu.***), oproti tomu v *Ars Magna* značí neznámou.

“ 5*p*: ℞ *m*: 15
5*m*: ℞ *m*: 15
25*m*:*m*: 15 *q̃d est* 40 ,”

Obr. 2.16: Cardanův zápis z knihy (Cajori, 1993, str. 118)

Na výše uvedeném obrázku je uvedeno násobení dvou výrazů s mínusem pod odmocninou, které jsou napsané pod sebou

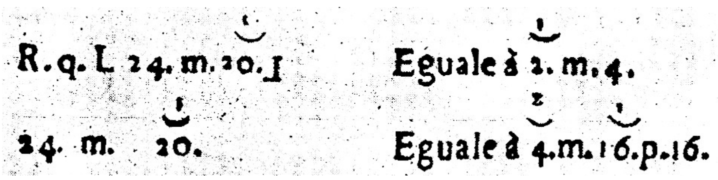
$$\begin{array}{c} 5+\sqrt{-15} \\ 5-\sqrt{-15} \\ \hline 25-(-15)=40 \end{array}$$

Je to vůbec první zápis záporného čísla pod odmocninou. Lze jej považovat za velký krok k objevení komplexních čísel. Přestože byl Cardano schopen zapisovat rovnice způsobem uvedeným na obrázku 2.16, postup pro řešení kubické rovnice v *Ars Magna* uváděl ve velké míře slovně. V jeho knize je patrný rozpor výsledku, na který přišel, a jeho přesvědčení. Nečekal, že by bylo možné dojít k tomu, že bude potřeba využít záporného čísla pod odmocninou. Tento výsledek je totiž i graficky špatně představitelný, jeho grafickou reprezentaci popsal až Carl Friedrich Gauss o více než 200 let později.

Způsob zapisování algebraických rovnic se od dob al-Chvárizmího změnil už celkem radikálně, také se změnil objem příkladů a kvalita zápisu. Matematika se stala díky knihtisku dostupnější a díky tomu dochází i k výraznějšímu posunu ve výsledcích. Knihtisk měl navíc velký význam pro sjednocení symboliky. Je potřeba si ale uvědomit, že tato změna v zápisu znamená pro tehdejšího matematika jinou míru abstrakce a úplně jiný úhel pohledu na problém, který řešil. Dává mu tedy mnohem silnější prostředky pro vyjadřování algebry.

2.6.4 Rafaele Bombelli 1526 – 1572

Rafael Bombelli byl italský matematik, který se narodil v Bologni, odkud pocházel Scipione del Ferro, který je považován za prvního matematika, který vyřešil kubickou rovnici. Téměř jistě znal také Cardanovu práci. Zápis jeho rovnic vypadal následovně



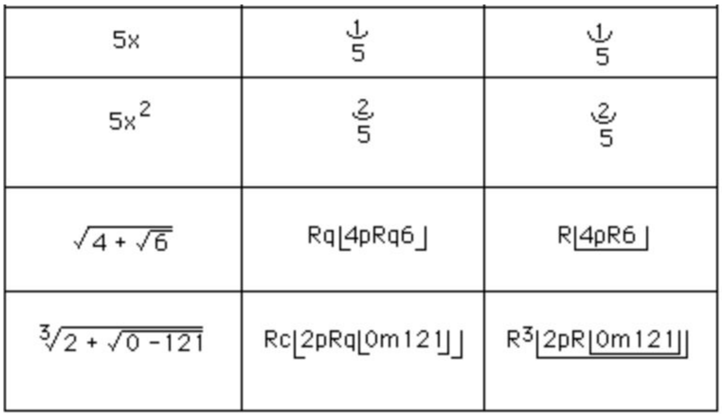
Obr. 2.17: Bombelliho zápis z knihy (Cajori, 1993, str. 125)

Bombelli stejně jako Pacioli doplňuje znak ***R*** o ***q*** zkráceně „quadrata“ nebo ***c*** „cubica“. Navíc zde využívá už velmi podobný zápis pro mocninu, který známe dnes, což je horní index. Zápis na obrázku 2.17 odpovídá dnešnímu zápisu

$$\sqrt{24-20x}=2x-4$$

$$24-20x=4x^2-16x+16$$

Na obrázku je vidět, že pro určení začátku a konce odmocniny používal na začátku písmeno L a na konci jeho zrcadlově převrácenou variantu, což byl vlastně první zápis závorek, a tedy i úpravy předností operací. Podrobněji Bombelliho značení popisuje následující tabulka, která v prvním sloupci uvádí dnešní formu zápisu, v druhém sloupci Bombelliho tištěnou a ve třetím sloupci ručně psanou formu značení.



Obr. 2.18: Bombelliho zápis mocnin a odmocnin (O'Connor a Robertson, 2000b)

Tato tabulka přibližuje genezi závorek, původně v psaném textu matematici této doby využívali podtržení pro vyjádření „závorky“ (Jak je uvedeno v levém sloupci). Také si můžeme všimnout, že pod odmocninou v místě, kde by bylo třeba aby stálo samotné záporné číslo, doplňuje Bombelli před toto číslo 0, nejspíš proto, že vnímá mínus jako binární operaci.

2.6.5 Vývoj symboliky a jeho paralela s její výukou

Symbolika je pro algebru klíčová, bez ní matematici nebyli schopni rozumně zapsat některé velice abstraktní myšlenky. Její vývoj lze proto považovat za velký pokrok v algebře jako takové, i když v rámci jejího vývoje nedošlo k tolika zajímavým výsledkům, jako je objevení vzorce pro řešení kubické rovnice, který je svým způsobem výjimkou v tomto období. Protože dnes už máme sofistikovaný systém symbolického zápisu algebraických výrazů, tak nám nepřijde tato věc podstatná, je potřeba si ale uvědomit, že i ve vývoji symboliky nastávaly chyby, které se mohou opakovat u žáků, kteří ještě nemají symbolický zápis, který je učíme, zažitý. Navíc tvorba symbolického zápisu je zkušenost, která se při běžné výuce ve školách neučí a studentům tyto principy při výuce, jak se říká, „spadnou z nebe“. Tato zkušenost je částí matematiky, kterou si při výuce nezažijí. V historii matematiky tato etapa hraje významnou roli a trvalo nezanedbatelně dlouhou dobu, než se vyvinula do dnešní podoby.

2.7 Matematika na počátku baroka

Na počátku baroka se matematická symbolika začala blížit té dnešní. V následujícím textu představím dva významné matematiky, kteří se zasloužili o vznik matematické symboliky. Stanovili tak pravidla, která dnes užíváme naprosto samozřejmě. Například pokud zadáme úlohu: Vyřeš následující rovnici

$$ax = b,$$

tak se již nikdo neptá, které písmeno je neznámá. Automaticky řešíme rovnici pro neznámou x, přestože zadání není jednoznačné. Tak tomu ale nebylo vždy.

2.7.1 Francois Viéte 1540 – 1601

Francois Viéte je otcem myšlenky dnešního symbolického zápisu, který využívá písmena pro výpočty v matematice. Ve spise *Logistica speciosa* označuje čísla pomocí písmen, přičemž pro známé veličiny (konstanty) volí souhlásky a pro neznámé (hledané) veličiny souhlásky. Je fascinován tím, že takto může převést libovolný problém do světa algebraických rovnic. Při svých řešeních přitom striktně dodržoval zákon homogenity, což znamená, že všechny členy rovnice museli být stejného „rozměru“. Neřešil tedy rovnice typu

$$A^2 + 2A = 3,$$

kde je „plocha“ sčítána s „úsečkou“ a ta je položena do rovnosti s číslem. Radši doplnil tuto rovnici tak, aby splňovala jeho přesvědčení, o další známé veličiny do tvaru

$$A^2 + 2CA = 3D^2$$

a tuto rovnici následně řeší.

Posun v tomto přemýšlení představuje další matematik, který je asi vůbec nejvlivnějším matematikem této doby. Je jím René Descartes. Ten ve svých textech používá dnešní značení pomocí písmen z konce abecedy pro neznámé a písmen z jejího začátku pro známé veličiny. Také tak striktně nezachovává zákon homogenity.

V další části textu se věnuji zejména jednomu z jeho nejdůležitějších textů. Vycházet přitom budu z překladu této knihy (Descartes, 1637) a pro historický kontext využiji Historického matematického archivu *MacTutor* jehož autory jsou J. O'Connor a F. Robertson. Descartes ve své knize *Geometrie* položil základy dnešní analytické geometrii. Využívá zde algebru k řešení geometrických úloh a popisuje a třídí pomocí algebraických rovnic křivky. I proto je tento text řazen z pohledu matematiky k nejvýznamnějším dílům své doby.

2.7.2 René Descartes 1596 – 1650

Narodil se v roce 1596 v La Haye, které je nyní pojmenováno Descartes a leží mezi Paříží a Bordeaux. Jeho otec Joachim Decartes byl poradcem v bretaňském parlamentu v Rennes a jeho matka Jeanne Brochard byla dcerou vojáka, který měl posádku v Poitiers. Jeanne zemřela rok po narození Reného při porodu, při kterém zemřel i jeho bratr. Po smrti své matky byl René vychováván v La Haye u svojí babičky z matčiny strany a k otci, který si našel novou ženu, se již nevrátil.

Obr. 2.19: René Descartes (Frans Hals)

Studovat začal na jezuitské koleji La Flèche v Anjou ve svých 11 letech. Učil se tam zejména logiku a tradiční aristotelovskou filosofii. Studoval také matematické obory z knihy napsané Claviem jmenovitě aritmetiku, geometrii, astronomii a hudbu.

V roce 1616 získal na přání otce titul z práv v Poitieres. Ihned ale věděl, že jeho cesta nevede směrem humanitních věd. V této době také napsal *Rozpravu o metodě*, kde vyzdvihuje deduktivní myšlení. Součástí tohoto textu je Descartesův nejznámější výrok *„Cogito ergo sum"* (Myslím, tedy jsem).

V roce 1618 se stal dobrovolníkem v armádě a v roce 1619 se přidal k bavorské armádě pod vedením Maximiliána Bavorského, což vedlo k jeho účasti v bitvě na Bílé hoře roku 1620, kde působil jako pozorovatel.

Po této vojenské části svého života se již více věnoval vědě, protože byl přesvědčený, že je povolán od Boha k její reformě. Seznámil se v Paříži s dalšími vědci jako byli Marin Mersenne, Claude Mydorge nebo Girard Desargues. V roce 1628 se přemístil na tajné místo v Holandsku, kde se skrýval před přehlceným městským životem, aby však neztratil kontakt s matematickým světem, prozradil tuto lokalitu Mersennovi.

Jeho matematičtí přátelé jej přesvědčili, aby své myšlenky sepsal, což nedlouho po svém přesunu do Holandska učinil. Roku 1629 začal psát *Le Monde, ou Traité de la Lumière* (Svět nebo pojednání o světle), kterou se však zdráhal vydat. V roce 1637 vydal v holandském Leidenu *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, kterou doplnil o dodatky *La Dioptrique* (Dioptrie), *Les Météores* (Meteorologie) a *La Géométrie* (Geometrie). Mertennsovi napsal:

> *„Snažil jsem se ve své Dioptrii a Meteorologii ukázat, že moje Metoda je lepší než metoda běžně užívaná, a ve své Geometrii to i prokázat." (O'Connor a Robertson, 2014)*

Evidentně se zde snažil poukázat na správnost svého filozofického textu pomocí jeho aplikace v textu přírodovědném.

V této práci se zabývám zejména dodatkem *La Géométria*, který podrobněji rozebírám v další kapitole.

V následujících letech Descartes napsal ještě práce *Meditace o první filozofii* a *Principy filozofie*. V roce 1649 přijal pozvání od švédské královny Kristýny a odjel do Stockholmu, kde však po několika měsících zemřel na zápal plic. (O'Connor a Robertson, 2014)

La Geométrie

Práce je rozdělena do tří částí. První kniha s podtitulem *„Problémy, které mohou být konstruovány pouze pomocí kruhů a přímek"* se věnuje zejména výpočtu kořenů kvadratické rovnice. Výpočty jsou zapsány algebraicky, ale jsou ilustrovány i geometricky. Opět zde dochází k propojování geometrie a algebry. Descartes navíc při výpočtech užívá x^2 jako délku úseček na rozdíl od antických řeckých autorů, kteří ji užívali ve smyslu obsahu. V následující části ukážu, jak řešil jeden z typů kvadratických rovnic.

První kniha se také věnuje řešením Pappovy úlohy o křivce, kterou tvoří body daných vlastností (locus problem), při kterém poprvé vzniká předchůdce dnešní kartézské soustavy souřadnic (kartézská je pojmenována po Descartesovi, protože se v latinsky psaných textech podepisoval *Cartesius*). V knize *La Geométrie* není přímo vysvětlená, ale je jasné, že její principy Descartes užíval. Později byla užívána k vysvětlení Descartesova řešení. Descartes ve své knize často nechává některé části problémů čtenáři, aby si je sám nastudoval. Tento svůj záměr v knize přímo zmiňuje

„Nebudu se tady zdržovat podrobnějším vysvětlováním, neboť vám nabízím potěšení, abyste se to naučili sami a použili to k zušlechtění svého ducha tím, že se v tom budete cvičit, což je dle mého mínění to nejdůležitější, co lze z této vědy získat. Neshledávám zde nic tak obtížného, co by nemohli zvládnout ti, kdož jsou aspoň poněkud zběhlí v obyčejné geometrii a algebře a kteří budou věnovat pozornost všemu, co je obsaženo v tomto pojednání.
Spokojím se zde proto s prohlášením, že ten, kdo při rozmotávání těchto rovnic neopomene využít všech dělení, která jsou možná, dospěje neomylně k nejjednodušším členům, na něž lze úlohu převést." (Descartes, 1637, str. 5)

Preferuje tedy nechat prostor čtenáři k vlastnímu promyšlení problému.

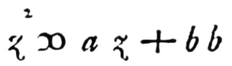
Druhá kniha *„K povaze křivek"* popisuje dva typy křivek, které Descartes pojmenovává geometrické a mechanické. Věnuje se způsobům jak konstruovat jednotlivé typy křivek. Navrhuje i způsoby jejich konstrukce pomocí různých pravítkových systémů. Popisuje tyto křivky i algebraicky(analyticky). V jedné části se věnuje popisu křivky, která vznikne jako řešení již zmiňované Pappovy úlohy. Zdá se, že řešení této úlohy bylo jedním z klíčových témat tohoto textu.

Třetí kniha *„O konstrukci úloh, které jsou tělesné, nebo více než tělesné"* je více zaměřená na algebru. Descartes v ní vysvětluje co jsou to kladné a záporné kořeny polynomu. Dále popisuje takzvaný znaménkový princip, ve kterém pokud seřadíme znaménka koeficientů jednotlivých členů polynomu podle jejich stupně, například od kubického po lineární, pak počet změn znaménka je buď počtem kladných kořenů nebo je nižší o sudé číslo. Toto pravidlo můžeme dnes najít jako Descartesovo pravidlo znamének i když jej pravděpodobně nepoužil jako první. Jako první jej ale popsal obecně.

Řešení jednoho typu kvadratické rovnice

Descartes popisuje na 6. straně své knihy řešení rovnice

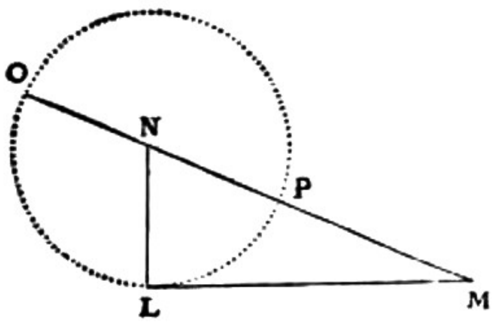
$$z^2 = az + b^2.$$



Obr. 2.20: Zápis rovnice z (Descartes, 1637, str. 6)

Píše: *„Udělám pravoúhlý trojúhelník NLM, jehož strana LM se rovná b, druhé odmocnině známé veličiny b^2, a druhá, LN, je $\frac{1}{2}a$, to je polovina jiné známé veličiny násobené z, kterou předpokládáme za neznámou úsečku. Pak prodloužím-li MN, tj. přeponu [la baze] tohoto trojúhelníku, až k O, aby se NO rovnalo NL, je celá úsečka OM hledanou úsečkou z. A to se vyjádří tímto způsobem:“*

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$



Obr. 2.21: Nákres z knihy (Descartes, 1637, str. 6)

Z obrázku a popisu je jasné, proč je řešení, které Descartes použil, správné. Na toto nejspíš přišel algebraickými úpravami rovnice. Cest, které mohly vést ke geometrickému vysvětlení, ale může být podle mého názoru více. V následující části ukážu dvě možnosti, jak lze řešit tuto rovnici. První je algebraická, druhá více geometrická.

Můžeme využít algebraického zápisu a přesunout výrazy s neznámou z na jednu stranu a následně doplnit na čtverec a odmocnit.

$$z^2 - az = b^2 \qquad \Rightarrow \qquad \left(z - \frac{1}{2}a\right)^2 - \frac{1}{4}a^2 = b^2 \qquad \Rightarrow$$

$$\left(z - \frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

Zpětně pak můžeme sestavit geometrický význam tak, jak jej sepsal Descartes.

Druhou možností je využití mocnosti bodu ke kružnici. Víme, že

$$|LM|^2 = |OM| \cdot |PM|,$$

dále jak píše Descartes, volíme-li $|OM| = z$, $|LN| = \frac{1}{2}a$ a $|LM| = b$ pak s pomocí Pýthagorovy věty a pár dalších úprav dostáváme

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b^2} = |NM| = z - \tfrac{1}{2}a \quad \Rightarrow \quad z = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b^2}$$

což je vztah, ke kterému jsme chtěli dojít.

Descartova práce je průlomem pro algebru a jeho zápis algebraických rovnic se již téměř shoduje se zápisem dnešním, až na drobnosti, jako třeba užití znaku podobného ampersantu pro dnešní znak rovnosti.

3. Výzkumná část

3.1 Pojetí výzkumu

Výzkum, který jsem provedl, je kvalitativním výzkumem. Jeho hlavním předmětem jsou žákovská řešení historických slovních úloh. Výsledkem má být zjištění, jakými způsoby budou žáci takovéto úlohy řešit.

Před hlavní částí šetření jsem provedl pilotní testování, na kterém jsem si zkusil distanční zadávání úloh a zjistil jsem, jaký typ úloh využiji pro hlavní část výzkumu. Hlavní část výzkumu je tvořena rozborem žákovských řešení šesti historických úloh.

3.1.1 Cíle výzkumu

Hlavním cílem bylo zjistit, jak se liší jednotlivé cesty, kterými žáci došli k výsledku úlohy, ať už je to klasické řešení nebo nějaký typ odhadu či heuristiky. Dalším cílem výzkumu bylo zjistit, do jaké míry a jak často používají žáci různých ročníků při řešení úloh podobné myšlenkové postupy, jako užívali matematici v historii. Zajímalo mě také, jak velká část žáků bude mít tendenci ověřovat správnost svého řešení, pokud k tomu nebudou přímo vyzváni.

Neméně důležitým cílem pro mě bylo seznámit žáky s částí historie matematiky a vytvořit sérii úloh, která je bude bavit a ze které si odnesou nějaké zajímavé poznatky. Zároveň jsem chtěl zjistit, jaké to je využívat historické úlohy ve výuce, jestli to bude bavit mě i žáky a nakolik přínosné to bude pro samotnou výuku.

3.1.2 Výzkumné otázky

1. Jakými způsoby žáci nižšího stupně osmiletého gymnázia řeší vybrané historické úlohy?
2. Jaký vliv na řešení úloh má ročník žáků?
3. V čem lze spatřit přínos vybraných úloh pro výuku algebraických slovních úloh?
4. Lze najít paralelu mezi historickými způsoby řešení úloh a žákovským řešením? Pokud ano, v čem jsou tato řešení podobná?

3.1.3 Výzkumný vzorek

Pilotního testu se účastnili 4 žáci ve věku 11–13 let z 5.–7. ročníku základní školy (tři dívky a jeden chlapec). Žáky jsem volil v tomto věku proto, že hlavní část výzkumu jsem chtěl realizovat na žácích, u kterých dochází k formování představ o pojmu proměnná (neznámá).

Hlavní část výzkumu probíhala na vzorku 3 tříd, které vede jedna paní učitelka. Jednalo se o třídy druhého, třetího a čtvrtého ročníku osmiletého gymnázia. Celkem se hlavní části výzkumu účastnilo 77 žáků, z čehož bylo 35 chlapců a 42 dívek. Gymnázium, na kterém výzkum probíhal, je výběrové a někteří žáci se umisťují v Matematické olympiádě a jiných soutěžích na předních místech. Třídy jsou relativně homogenní co se týče školní úspěšnosti.[1] Paní učitelka vede všechny zmíněné třídy od prvního ročníku.

3.1.4 Pilotní test

Na začátku jsem vybral algebraické slovní úlohy různého charakteru z různých zdrojů a chtěl jsem si vyzkoušet, jak je budou studenti řešit. Původním cílem práce bylo hledat historické algebraické principy v žákovských řešeních slovních úloh. Výzkumná otázka tedy zněla: Jaké historické principy řešení lze hledat v žákovských řešeních algebraických slovních úloh? Cíl pilotního testování byl, prověřit možnost realizace výzkumu, který by odpovídal na tuto otázku a případně ji upravit tak, aby byla konkrétnější. Druhým cílem bylo vyzkoušet si distanční zadávání úloh pro případ, že by se nedalo realizovat šetření v prostředí školy z důvodu opatření stanovených vládou v době pandemie Covid-19[2]. Třetím cílem bylo vybrat typ úloh, které pak využiji v následujícím šetření.

Tento test tvořilo celkem 8 úloh. Čtyři úlohy z al-Chvárizmího *Algebraického traktátu*, z čehož dvě byly zadány jako úlohy otevřené a dvě těžší jako uzavřené se čtyřmi možnostmi výběru. Tyto úlohy jsem doplnil dvěma úlohami z mezinárodního šetření TIMSS a dvěma úlohami autorskými.

Úlohy 1 a 2

U al-Chvárizmího úloh se konkrétně jednalo o úlohu o rozdělení deseti na dvě části, uvedenou na stránce 41 této práce. Druhá úloha z *Algebraického traktátu* byla úloha o hledání velikosti mzdy, kterou má pracující dostat za část odpracovaného měsíce a je uvedena na straně 41 kapitoly 2.4.2. Tyto úlohy byly zadány jako úlohy otevřené.

Úlohy 3 a 4

Další dvě úlohy vedoucí na kvadratickou rovnici žáci řešili jako úlohy uzavřené. Nechal jsem je vybrat si ze čtyř možností výsledného řešení, kde některá řešení byly formulována slovně a jiná pomocí dnešní symboliky (snahou bylo představit řešení dnešního typu, ale i řešení, které se inspirovalo historickými řešeními úloh). Chtěl jsem, aby mi žáci v následném rozhovoru popsali, proč konkrétní řešení vybrali. Tento záměr se mi však nepodařilo realizovat, protože byla úloha nad síly žáků. Kvadratickou rovnici žáci probírají v 4. ročníku osmiletého gymnázia, žáci z pilotního testování byli ale mladší. Výsledkem bylo, že úlohu buď neřešili nebo jako zdůvodnění uvedli, že tipovali. Tyto dvě úlohy jsem v předchozím textu nerozebíral, a proto je zde uvádím.

„Řeknou-li ti: Rozdělil jsi deset na dvě části, vynásobil jsi jednu z částí druhou a dále jsi vynásobil jednu z nich samu sebou, potom tento součin sama se sebou se stal rovným čtyřnásobku součinu obou částí.“ (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 160)

[1]Jejich výsledek z matematiky je nejčastěji hodnocen známkami 1 nebo 2.
[2]Pilotní test probíhal na konci března 2021.

„Rozdělil jsi deset na dvě části a vynásobil jsi každou část samu sebou a když jsi toto sečetl obdržel jsi 58.“ (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 160)

Úlohy z TIMSS

Další tři úlohy jsem vybral z uvolněných úloh mezinárodního šetření TIMSS. Jedná se o úlohy M31 (M06-01) a M17 (M03-04).

Úloha M31 (M06-01)

Karlovi je 24 let. Je o ■ let starší než Jana. **Jak vypočítáš, kolik let je Janě?**

A) 24 – ■ B) ■ + 24 C) ■ – 24 D) 24 · ■

Obr. 3.1: Úloha z TIMSS

Obr. 3.2: Úloha z TIMSS

Vlastní úlohy

Poslední skupinu úloh tvořily mnou sestavené úlohy inspirované středoškolskými učebnicemi matematiky. Chtěl jsem si vyzkoušet sestavení úloh, na kterých bych mohl pozorovat žákovská řešení.

„Drát délky 240 *cm ohneme do tvaru obdélníku tak, aby délka jedné strany byla třikrát větší než délka strany druhé. Jak dlouhé budou strany obdélníku?“*

„Třetina myšleného čísla zmenšená o šestinu téhož čísla se rovná třetině největšího dvojciferného čísla. Určete myšlené číslo.“

Závěr z pilotního testování

Pro pilotní test jsem vybral skupinu historických úloh, úloh z mezinárodního šetření TIMSS a úloh inspirovaných školskými úlohami, které jsem sám sestavil. Při rozboru jednotlivých úloh jsem zjistil následující poznatky.

Žákovská řešení historických úloh lze porovnávat s konkrétním historickým řešením, které je u většiny úloh známé. Zároveň není problém dnešními prostředky, jako je algebraická symbolika a neznámá, úlohy vyřešit. Historické a současné řešení mohou stanovit určitou škálu, do které lze zařadit řešení žákovské. Přičemž je jasné, že dnešní řešení mohou být různá.

Základní výhodou úloh z šetření TIMSS je možnost srovnání s výsledky žáků z velkého mezinárodního šetření, kde můžeme mít například jasnou představu o úspěšnosti žáků v úloze. Úlohy byly navíc vytvořeny pro výzkum a je jasné, jaké věkové skupině by měly být zadávány.

Poslední skupinou byly moje vlastní úlohy inspirované učebnicemi středoškolské matematiky. Zde jako největší přednost vidím samotnou možnost vyzkoušet si sestavení úlohy pro výzkum. Možnost zkoumat, jak se moje vlastní myšlenky promítají do pestrosti řešení a žákovského hledání vhodného zápisu dané úlohy.

Mým hlavním zájmem ve výzkumu bylo hledání historických principů řešení v žákovských řešeních slovních úloh. Pro tento záměr se mi z výše uvedeného rozboru jeví jako nejpřínosnější volit historické úlohy, které jsem mohl v rámci teoretické části této práce rozebrat pohledem dnešní matematiky. Proto jsem zvolil pro hlavní šetření 6 historických úloh.

3.1.5 Výběr testovacích úloh pro hlavní šetření

Vybrané úlohy jsou určeny pro žáky 6.–9. třídy základní školy, případně žáky odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Test má za cíl sledovat, jakými způsoby žáci řeší jednotlivé historické úlohy a případně porovnat tato řešení s řešeními historickými. Při volbě úloh jsem se snažil vybírat úlohy napříč historickými obdobími od nejstarších egyptských a babylonských přes al-Chvárizmího úlohy po úlohu, kterou uvádí na počátku třináctého století Fibonacci. Zároveň jsem cílil na úlohy vedoucí spíše na lineární rovnice, případně jejich jednoduché soustavy. V pilotním testování se neosvědčily složitější úlohy vedoucí na kvadratické rovnice.

U všech úloh, kromě úlohy o Diofantově věku[3], jsem v předchozí historické části textu této práce uvedl jejich původní řešení, které jsem zároveň rozebral z pohledu tehdejší i dnešní matematiky. U každé z těchto úloh jsem zároveň uvedl řešení dnešní a tato řešení jsem porovnal. V následném rozboru žákovských

[3] K této úloze se mi nepovedlo její historické řešení dohledat.

řešení budu k tomuto svému rozboru přihlížet a sledovat, kolik žáků řešilo úlohu podobně jako původní autor úlohy.

Úlohu o Diofantově věku jsem zařadil proto, že jsem chtěl reprezentovat toto období v testu pro žáky a zároveň ho oživit úlohou, která má zajímavý kontext a přímo pojednává o Diofantově životě.

Fibonnaciho úlohu o šelmách jsem zařadil proto, že se jedná o úlohu o společné práci, což je jeden z typů úloh, které se na druhém stupni základní školy probírají.

V následujících odstavcích uvedu vždy původní texty úlohy a zdůvodním jejich úpravu, kterou jsem udělal, aby při žákovských řešeních nedocházelo k nepochopení úlohy kvůli jejímu kontextu. Někdy jsem také upravil parametry úlohy tak, aby testovala zejména matematizaci a nebyla tak početně náročná. Cílem bylo upravit úlohy tak, aby jejich autenticita byla co nejvíce zachována a zároveň jsem přiblížil jazyk (jednotky, nejednoznačnost zadání) žákům tak, aby byla jejich hlavní soustředění zaměřeno zejména na řešení matematických problémů.

Struktura dalšího textu bude následující. Vždy uvedu původní úlohu, upravenou verzi pro test a zdůvodnění, proč jsem úlohu upravil tímto způsobem.

Úloha 1 – *Rhindův papyrus*

„Řekne-li se ti: pytel, v němž je zlato, stříbro a cín. Tento pytel může být získán za 84 šatej. Co je to, co přísluší každému kovu, když za deben zlata se dá 12 šatej, (za) stříbro to je 6 šatej a (pro) deben cínu to je 3 šatej?“(Vymazalová, 2006b, str. 133)

„Řekne-li se ti: Pytel, v němž je zlato, stříbro a cín, může být získán za 84 *dukátů. Kolik dílů každého kovu je v pytli, jestliže díl zlata stojí* 12 *dukátů, díl stříbra* 6 *dukátů a cínu* 3 *dukáty? V pytli je od každého kovu stejně dílů.“* (4 pruty od každého)

V této úloze jsem změnil měnu, za kterou se nakupuje pytel a množstvím kovu uvedené jednotkou *deben* jsem převedl na díly. Dále jsem zjednodušil věty tak, aby byly pro žáky srozumitelnější. Například větu „Co je to co přísluší každému kovu“ jsem nahradil dodatkem „V pytli je od každého kovu stejně dílů“.

Úloha 2 – Babylonská úloha

Na jednom „bùr“ pole jsem sklidil 4 *„gur“ obilí. Na jednom „bùr“ druhého pole jsem sklidil* 3 *„gur“ obilí. Sklizeň z prvního pole byla o* 8,20 *větší než z pole druhého. Obě pole dohromady byly velké* 30,0*. Jak velké je každé z polí?* (van der Waerden, 1954, str. 66)

„Na jednom hektaru prvního pole jsem sklidil 4 *tuny obilí. Na jednom hektaru druhého pole jsem sklidil* 3 *tuny obilí. Sklizeň z celkové plochy prvního pole byla o* 60 *tun větší něž z druhého pole. Celková rozloha obou polí je* 50 *hektarů. Jak velké je první a druhé pole?“* (30 hektary, 20 hektary)

V zadání tohoto příkladu jsem zaměnil tehdejší jednotky obsahu a hmotnosti za dnešní jednotky, které žáci znají. Navíc jsem upravil úlohu tak, aby se v ní nevyskytovaly dvojí jednotky pro jednu veličinu. Tento problém rozebírám v předchozí části 2.2 na straně 25. Změnil jsem zadání v šedesátkové soustavě za soustavu desítkovou, také jsem nahradil množství, aby přibližně odpovídalo tehdejším poměrům v zemědělství i se změnou jednotek, kterou jsem provedl. Zároveň jsem upravil čísla tak, aby výsledky vycházely celočíselně.

Úloha 3 – O dělení na dvě části (al-Chvárizmí)

„Rozdělil jsi deset na dvě části, potom jsi dělil jednu druhou a jejich podíl je 4. *Jak velké jsou tyto dvě části.“* (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 161)

„Rozdělil jsi deset na dvě části, potom jsi dělil jednu část druhou a jejich podíl je 4. *Jak velké jsou tyto dvě části.“* (8 a 2)

Jediný rozdíl v upraveném textu je ve slově „část“, které jsem přidal do druhé věty prvního souvětí. Důvodem této změny je lepší srozumitelnost textu. Student z pilotního šetření, na kterém jsem ověřoval správné pochopení úlohy, nechápal, co znamená v textu „dělil jednu druhou“ a nedokázal vysvětlit co je ta „jedna“ a co je „druhá“ a k čemu tato slova patří. Po doplnění slova „část“ došlo k většímu pochopení.

Úloha 4 – Úloha o pracujícím (al-Chvárizmí)

„Pokud tázající říká: Pracující, který má měsíční výdělek deset dirhamů, pracoval šest dní. Jaký je jeho díl, víš-li, že šest dní je jedna pětina měsíce a díl dirhamů je takový, jako díl odpracovaného času z měsíce.“ (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 179)

„Pokud tázající říká: Pracující, který má měsíční výdělek deset dukátů, pracoval šest dní. Kolik dukátů dostal, víš-li, že tento měsíc má 30 *dní? (Díl dukátů ze mzdy je stejný, jako díl odpracovaného času z měsíce.)“* (2 dukáty)

Opět došlo pro lepší srozumitelnost ke změně měny. Dále jsem pouze zjednodušil hlavní otázku úlohy, tak, aby bylo na první pohled pochopitelné, že se ptáme na počet dukátů, který pracující dostal.

Úloha 5 – Diofantova hádanka

„Diofantovo dětství trvalo šestinu jeho života, za další dvanáctinu mu vyrašily vousy a za další sedminu se oženil. Za dalších pět let se mu narodil syn, jehož život byl však jen poloviční oproti životu otcovu. Po synově smrti žil Diofantos ještě 4 *roky.“*[4] (Šír, 2011, str. 492)

„Diofantovo dětství trvalo šestinu jeho života, za další dvanáctinu mu vyrašily vousy a za další 12 *let se oženil. Za dalších pět let se mu narodil syn, jehož život byl však jen poloviční oproti životu otcovu. Po synově smrti žil Diofantos ještě* 4 *roky. Jak dlouho Diofantos žil?“* (84 let)

[4] Jedná se o úlohu, kterou neuvádí Diofantos ve svých pracích. Byla uvedena až po roce 600 n.l. v epigramech od Metrodora

V Diofantově hádance jsem udělal zásadní změnu v parametru úlohy, kde zlomek jedna sedmina pro interval Diofantova života nahrazuji 12 lety. Díky tomu není potřeba převádět ve výpočtu zlomky na padesáti šestiny. Tím se úloha z početního hlediska zjednoduší. Mým cílem totiž není testovat práci se zlomky, ale spíše schopnost sestavení algebraické rovnice.

Úloha 6 – Lev, leopard a medvěd (Fibonacci)

„Lev by snědl jednu ovci za čtyři hodiny a leopard [by ji snědl] za 5 *hodin, a medvěd [by ji snědl] za* 6 *hodin: Ptají se nás, pokud by jim byla vhozena jedna ovce, jak dlouho by jim trvalo, než by ji pozřeli?“* (Fauvel a Gray, 1987, str. 243, vlastní překlad)

„Lev by snědl jednu ovci za šest hodin a leopard [by ji snědl] za 8 *hodin, a medvěd [by ji snědl] za* 3 *hodiny: Ptají se nás, pokud by jim byla vhozena jedna ovce, jak dlouho by jim trvalo, než by ji pozřeli?“* (1.6 hodiny)

V poslední úloze jsem opět upravil číselné parametry úlohy, protože původní čísla v zadání vedou na „ošklivý“ výsledek ($\frac{83}{37}$ hodiny). Zvažoval jsem ještě změnu úlohy tak, aby bylo její zadání více jednoznačné. Není totiž přímo řečeno, že všechna zvířata budou žrát ovci současně, dokud ji nesežerou celou.

3.1.6 Popis sběru dat

Zadání úloh probíhalo ve dvou po sobě následujících pátcích. První týden jsem zadal úlohy ve třídě 4.A. osmiletého gymnázia a o týden později ve třídách 2.B a 3.A. Hodinu jsem uvedl krátkým představením úloh a jejich historického kontextu, kdy jsem žákům ukázal zejména to, že Babyloňané zapisovali svoje výpočty pomocí klínového písma na hliněné tabulky a Egypťané pomocí hieroglyfů na papyrus. Cílem tohoto úvodu bylo žáky motivovat a rozpoutat zájem o úlohy. Úlohy samotné jsem pak doplnil stručným historickým kontextem. Chtěl jsem, aby řešení úloh žáky bavilo. Poprosil jsem je o volbu vhodných psacích potřeb a čitelné písmo. Vysvětlil jsem jim, že budu analyzovat jejich řešení a že mě zajímá zejména jejich myšlenkový postup. Také jsem požádal o to, aby i případné chybné řešení škrtali pouze jednou čarou, abych poznal, v čem udělali chybu. Tento úvod trval zhruba 5 minut. Zbytek hodiny (40 min) žáci řešili slovní úlohy.

Vždy následující týden jsem od paní učitelky dostal ještě zhruba 20 min na seznámení žáků s jejich výsledky, po kterém jsme rozebrali řešení úloh, o které měli žáci zájem. Ukázal jsem žákům nejčastější chyby a jednotlivé typy řešení, které se ve třídě vyskytovaly. Z rozboru pro mě také vyplynulo mnoho dalších zajímavých poznatků, které jsem využil v dalších částech této práce.

Řešení žáků jsem také probíral s paní učitelkou, která ve třídách učí. Hledali jsme společně důvody některých neočekávaných jevů, které se vyskytly ve třídách.[5]

[5] Například výskyt řešení pomocí trojčlenky v tercii, přestože se s paní učitelkou přímou úměrnost tímto způsobem primárně neučili počítat.

3.2 Rozbor žákovských řešení

Při rozboru jednotlivých úloh jsem žákovská řešení roztřídil do skupin podle typu řešení. Typ žákovských řešení definuji níže. Snažil jsem se přitom, aby každé řešení, v němž se zásadně liší žákova úvaha od ostatních, mělo svoji skupinu. Z každé skupiny řešení jsem pro každou úlohu vybral ta, která dobře reprezentují svoji skupinu. Tato řešení jsem vyfotil, vložil do této práce a okomentoval.

V následující části textu postupně popisuji u každé úlohy typy řešení, se kterými jsem se při rozboru setkal. Každý typ přitom v počátečním shrnutí nazývám zkráceným názvem pro lepší orientaci v textu. Úloha je vždy doplněna tabulkou popisující četnost těchto typů řešení v jednotlivých třídách.[6]

3.2.1 Úloha 1 – *Rhindův papyrus*

„Řekne-li se ti: Pytel, v němž je zlato, stříbro a cín, může být získán za 84 *dukátů. Kolik dílů každého kovu je v pytli, jestliže díl zlata stojí* 12 *dukátů, díl stříbra* 6 *dukátů a cínu* 3 *dukáty. V pytli je od každého kovu stejně dílů.“* (4 pruty od každého)

Úloha z *Rhindova papyru* je první úlohou, kterou měli žáci uvedenou v pracovním listu a setkala se dle mého očekávání z vysokou úspěšností, která se blížila 95 %. Nejčastější příčinou neúspěšnosti bylo špatné přečtení zadání. Ve dvou případech to vedlo k žákovskému řešení lineární diofantovské rovnice, tj. rovnice typu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \quad a_1,\ldots,a_n,b \in \mathbb{Z}.$$

Tento typ úlohy vznikl, pokud žák vynechal podmínku uvedenou v poslední větě úlohy, která stanovila, že od každého kovu je v pytli stejně prutů. V obou žákovských řešeních se žák spokojil pouze s jedním, i když jich rovnice tohoto typu má nekonečně mnoho. Toto zjištění ale není nikterak překvapivé. Sám Diofantos také nehledal obecné řešení, ale spokojil se s jedním. Jedno z žákovských řešení je na obrázku 3.3a, kde žák nejprve vzal největší možný počet zlatých prutů a doplnil je stříbrnými a cínovými tak, aby výsledná cena pytle byla požadovaných 84 dukátů.

Žákovská řešení jsem rozdělil do celkem 7 skupin. Pět z nich je uvedeno v tabulce 3.1, kde shrnuji četnosti způsobů řešení. Šestý typ se vyskytl pouze jednou ve třídě IV.B. a jedná se o výpočet pomocí průměrné ceny kovu. Poslední typem je řešení pomocí chybného předpokladu a vyskytl se pouze dvakrát ve třídě III.B.

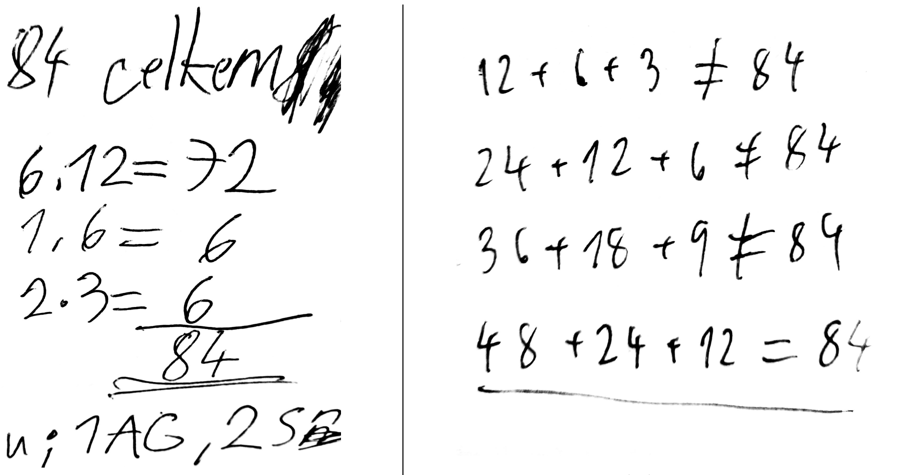
[6] Tuto tabulku uvádím na konci rozboru každé úlohy. Typy řešení jsou v ní popsány pomocí názvu, který je uveden v počátečním rozboru. Někdy v této tabulce neuvádím typ řešení, pokud měl v celém testovacím vzorku četnost 1.

84:21	Dělení výsledné hodnoty, kterou měl stát celý pytel, součtem hodnot jednotlivých typů kovů.
Odhad	Řešení odhadem: Většinou bylo doplněno slovy „Prostě jsem to zkoušel a nakonec mi to vyšlo“. Do této kategorie ale řadím i řešení, u kterých nebylo jasné, jak k němu žák došel.
Egypt	Řešení podobné tomu, jak úlohu řešili Egypťané.
Rovnice	Řešení pomocí „algebraizace“ slovní úlohy, sestavení lineární rovnice a jejího následného řešení.
Diofantos	Špatné pochopení úlohy a řešení bez podmínky určující, že každého kovu je v pytli stejně.
Průměr	Výpočet průměrné hodnoty kovu a dělení výsledné ceny pytle touto hodnotou.
Regula falsi	Neboli metoda chybného předpokladu. Řešitel zkusil náhodně dosadit číslo do definovaného problému a zjistil tak, jak se jeho odhad lišil od správné hodnoty.

Nejčastější způsob, jakým žáci řešili tuto slovní úlohu, bylo sečtení hodnoty tří kovů, čímž získali cenu jedné trojice prutů. Následně tímto součtem vydělili celkovou hodnotu pytle a zjistili, kolik trojic prutů v pytli je. Tento postup zvolila skoro polovina žáků. V přehledu výše i v tabulce shrnující četnosti způsobů řešení je tento způsob označen jako **84:21**.

Druhým nejčastějším způsobem zjištění výsledku bylo náhodné zkoušení hodnot nebo odhad. Protože je výsledek 4 od každého, tak se i tento typ řešení dal čekat.

Třetí nejčastější způsob byl pokus o sečtení všech tří hodnot jednotlivých kovů a postupné přičítání dalších trojic, jako to ukazuje obrázek 3.3b, na kterém je fotka jednoho z žákovských řešení. Tento typ řešení odpovídá egyptskému řešení, protože Egypťané využívali opakovaný součet až do určité hodnoty jako náhradu za dělení, jak popisuji v části 2.1.1. Tento způsob výpočtu úlohy se vyskytoval ve všech zkoumaných třídách, což pro mě bylo překvapivé Tento typ byl v souhrnu nazván ***Egypt***.



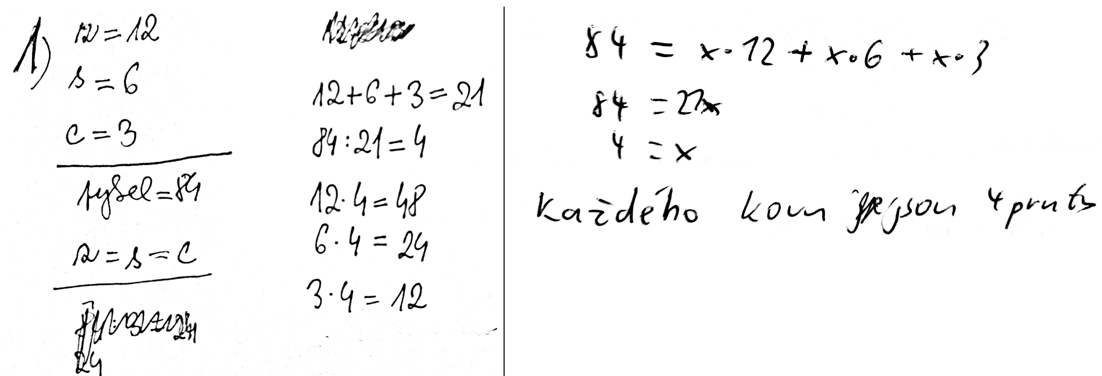
(a) kvarta (b) kvarta

Obr. 3.3: Úloha 1 – Žákovská řešení 1, 2

V šesti případech ze 73 správných řešení žáci využili pro výpočet lineární rovnici, kde za neznámou ve většině případů volili počet prutů od každého kovu, který je v pytli a značili ji písmenem x jako na obrázku 3.4b. V několika případech si žáci nejprve napsali rovnici s neznámými reprezentovanými písmeny podle hledaných kovů

$$z \cdot 12 + s \cdot 6 + c \cdot 3 = 84,$$

kterou doplnili rovností $z = s = c$ a následně pokračovali buď s x nebo s jedním z písmen, které již využili. Někteří žáci se snažili vymyslet algebraickou reprezentaci, ale nakonec ji nevyužili viz. obrázek 3.4a.

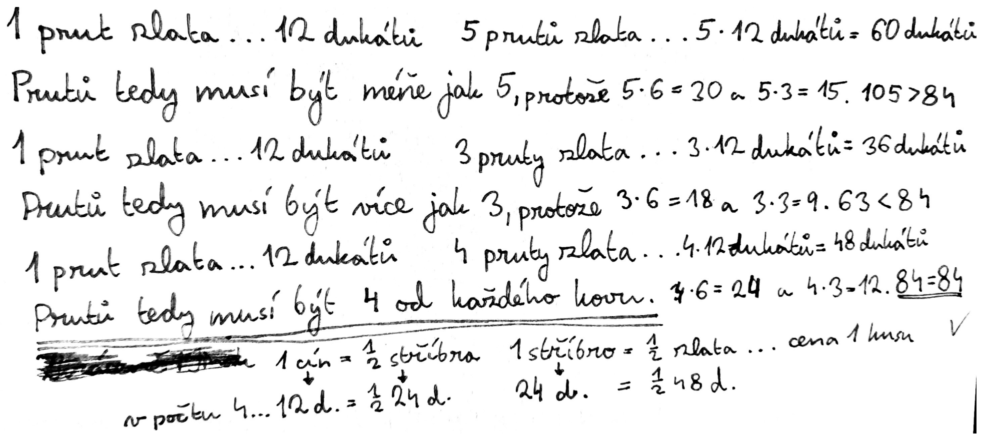


(a) (b)

Obr. 3.4: Úloha 1 – Žákovská řešení 3, 4

Dva žáci tercie využili pro výpočet úlohy z *Rhindova papyru* metodu „regula falsi" neboli metodu „chybného předpokladu". Jedno z řešení je uvedeno na obrázku 3.5.

Tato metoda je založena na stanovení odhadu, ve kterém žák v tomto případě volil 5 prutů od každého kovu. Následně dopočítal, že by došel k výsledné ceně pytle 105 zlatých. Protože výsledek má vyjít 84, zkusil menší odhad, tentokrát 3 pruty. Došel k výsledku menšímu, než jaký má vyjít, a tak zvolil 4 pruty a našel



Obr. 3.5: Úloha 1 – Žákovské řešení 5 pomocí chybného předpokladu

řešení. Je zajímavé, že „regula falsi“ je jednou z metod, kterou také využívali Egypťané. Například ji můžeme najít v 26. příkladu *Rhindova papyru.*

Shrnutí četností typů řešení představuje následující tabulka, ve které jsou sloupce pojmenovány podle výše uvedených typů řešení.

Třída	**Úspěšnost**	**84:21**	**Odhad**	**Egypt**	**Rovnice**	**Diofantos**
IV.A	24/25	10	5	4	2	2
III.B	22/25	8	10	1	1	0
II.A	27/27	12	7	5	3	0
Celkem	73/77	30	22	9	6	2

Tabulka 3.1: Úloha 1 – četnost typů řešení ve třídách.

3.2.2 Úloha 2 – Babylonská úloha

„Na jednom hektaru prvního pole jsem sklidil 4 *tuny obilí. Na jednom hektaru druhého pole jsem sklidil* 3 *tuny obilí. Sklizeň z celkové plochy prvního pole byla o* 60 *tun větší něž z druhého pole. Celková rozloha obou polí je* 50 *hektarů. Jak velké je první a druhé pole.“* (30 hektary, 20 hektary)

Babylonská úloha měla žákovskou úspěšnost 47 %, příčinou žákovské neúspěšnosti podle rozboru úlohy s žáky je, že první část úlohy popisuje rovnici o sklizni z pole, zatímco druhá část popisuje rovnici o součtu obsahů jednotlivých polí. Každá z obou rovnic je proto o jiné veličině. Tyto dvě rovnice by měly následující tvar.

$$x - 3y = 60, \quad x + y = 50 \tag{3.1}$$

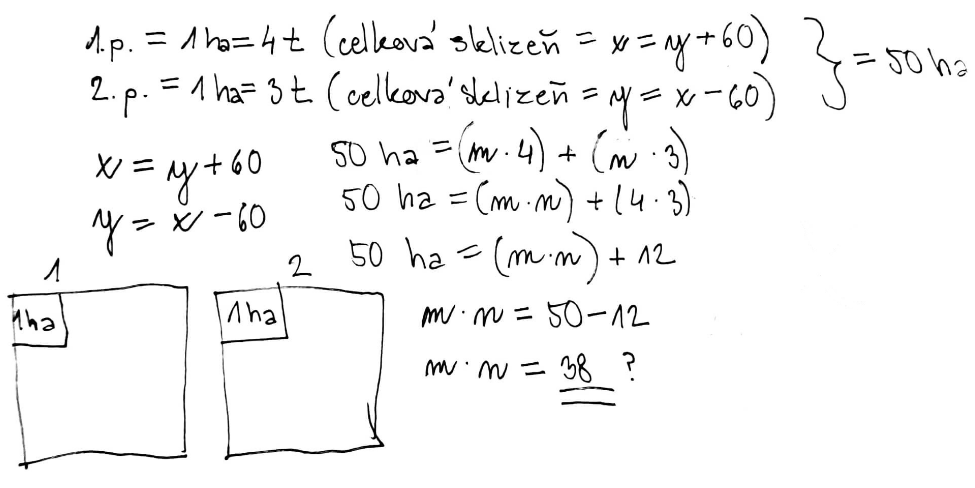
Číslo 60 je tak počtem tun, o které má jedno pole větší výnos než druhé. Oproti tomu 50 je počet hektarů, který udává součet plochy obou polí.

Tato charakteristika úlohy byla u velké části žáků udávána jako příčina neúspěchu při sestavení rovnic. Žáci, kterým se povedlo sestavit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, byli pouze 3. Dva byli z kvarty a jedna žákyně z tercie. V kvartě se téma soustavy linárních rovnic probíralo během distanční výuky. Paní učitelka říkala, že na toto téma řešili jen jednu slovní úlohu. Přesto byla překvapená, jak málo žáků soustavu rovnic při řešení využilo. Při rozboru úlohy uvedla, že téma ještě zařadí v rámci opakování.

U úspěšných žáků jsem rozpoznal 6 typů řešení, které uvádím v následujícím shrnutí.

Prostý odhad	Řešení odhadem: Většinou bylo doplněno slovy „Prostě jsem to zkoušel a nakonec mi to vyšlo“. Do této kategorie ale řadím i řešení, u kterých nebylo jasné, jak k němu žák došel.
Půlení	Tito žáci vyzkoušeli, jak by vyšla první rovnice, kdyby pole byly poloviční rozlohy (25 hektarů).
Odečtení	Odečetli přebytek, o který má první pole větší výtěžnost.
x a $x + 60$	Pokud má druhé pole výtěžnost x pak má první pole výtěžnost $x + 60$
Rovnice	Sestavení výše uvedené soustavy rovnic
Babylonský způsob	Způsob podobný babylonskému řešení úlohy (více případ rozeberu níže).

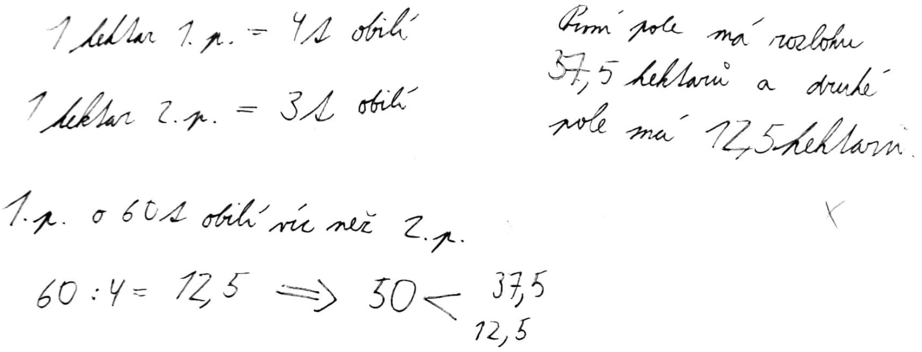
Mezi žáky sekundy se žádnému nepovedlo sestavit soustavu rovnic. V žákovských řešeních můžeme najít pouze náznaky pokusů, jako je tomu na obrázku 3.6. V této práci se žák evidentně snažil najít algebraickou reprezentaci řešení, ale nepovedlo se mu to. V prvních dvou řádcích také vidíme, že kombinuje obě výše zmíněné rovnice 3.1 a snaží se napasovat 50 hektarů k rovnici o výtěžku z pole, který je uváděn v tunách.



Obr. 3.6: Úloha 2 – Žákovské řešení 1 (sekunda)

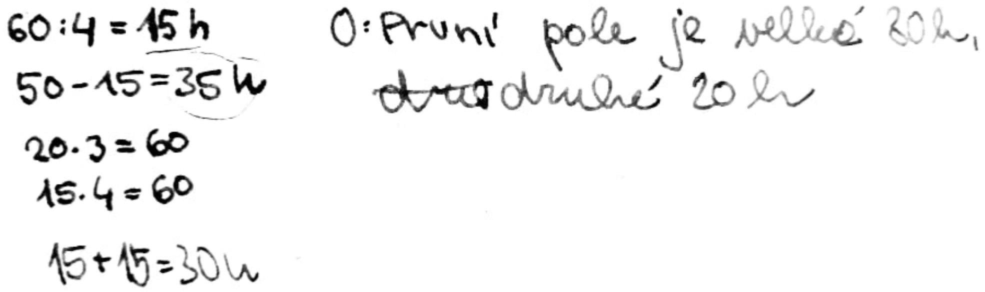
Ve třetím a čtvrtém řádku vpravo sestavil rovnici, ale na její levé straně uvádí 50ha, i když pravá strana opět vyjadřuje počet tun.

Další řešení je blízké jinému, které uvedu později a nazval jsem ho ***Odečtení***. Žák správně spočítal, že plocha, na které bylo sklizeno přebývajících 60 tun obilí prvního pole, je velká 12,5 hektaru. Chybně to ale považuje za jedno z řešení. Zajímavé je, že se ani nepokusil zpětně dosadit do zadání, čímž by zjistil, že jeho výsledek je chybný.



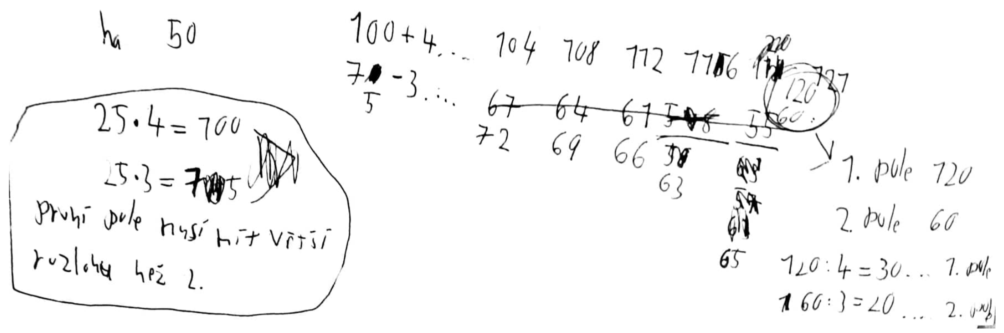
Obr. 3.7: Úloha 2 – Žákovské řešení 2 (sekunda)

Řešení „*Odečtení*“ dotáhli do úspěšného konce 3 žáci kvarty. Reprezentantem tohoto přístupu je následující obrázek 3.8.



Obr. 3.8: Úloha 2 – Žákovské řešení 3 (kvarta)

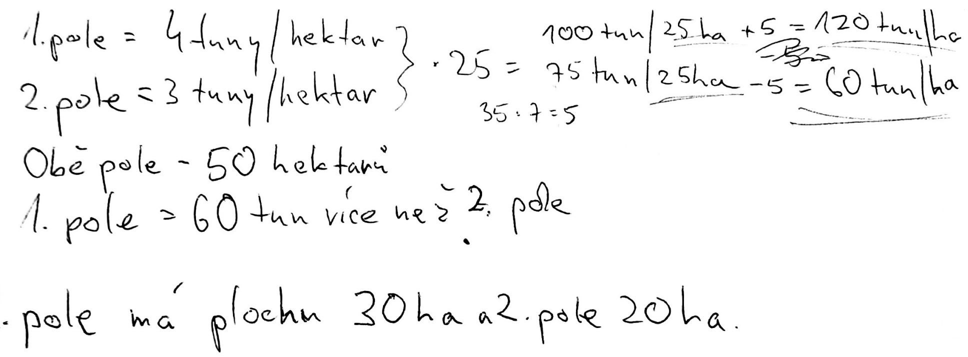
Další typ odhadu řešení je v tabulce označen jako ***Půlení***. Žák nejprve zkusil, jak by úloha dopadla, pokud by byla obě pole stejně velká. To je zaznamenáno na obrázku 3.9 vlevo v kroužku. Následně zkoušel přidávat od jednoho pole a ubírat z druhého, dokud nedostal požadovaný rozdíl 60. První krok, ve kterém žáci předpokládali, že jsou obě pole stejně velká, je stejný, jako udělali ve svém řešení Babyloňani, viz. řešení úlohy VAT 8389 v části 2.2 na straně 25



Obr. 3.9: Úloha 2 – Žákovské řešení 4 (sekunda)

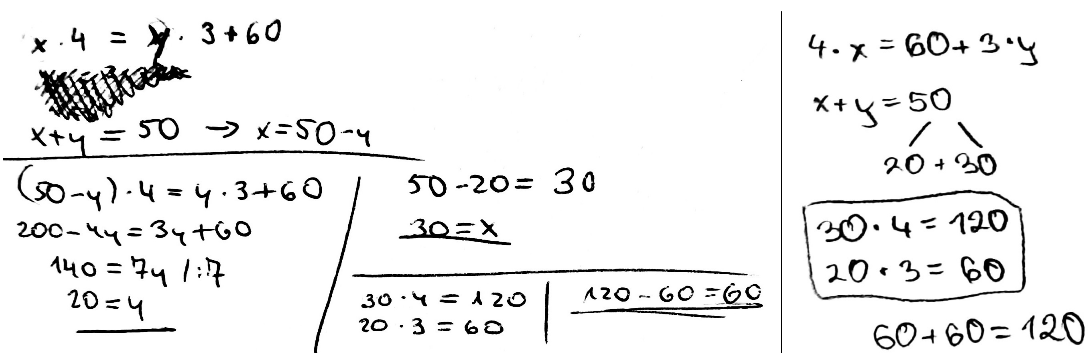
V tercii se vyskytla podobná řešení jako v sekundě. Za zmínku však stojí dvě, která se vymykala ostatním. První z nich je řešení, které v podstatě přesně kopíruje způsob, kterým tuto úlohu počítali Babyloňani (***Babylonský způsob***). Jedná se o řešení z obrázku 3.10. Žák zde opět zkusil rozdělit pole na dvě stejná o velikosti 25ha. Po dosazení do rovnosti o rozdílu sklizně mu vyjde 25, on si ale uvědomil, že mu mělo vyjít 60. Rozdíl obdržené hodnoty oproti očekávané je tak 35. V tuto chvíli si uvědomil, že pokud přidá 1 ha k prvnímu poli, tak ubere 1 ha druhého. K celkovému rozdílu výtěžků tak přibude 4 tuny z přidaného prvního pole a 3 tuny, které se neodečtou. To je celkem 7 tun. Proto 35 uprostřed obrázku dělil 7. Dostal tak pět, což je počet tun, který musí odebrat od druhého pole a přidat k prvnímu. Nakonec výsledek vpravo nahoře ověřil.

Musím říct, že jsem v žádném případě nečekal, že by některý žák řešil úlohu tímto způsobem. Kdybych navíc Babylonské řešení neznal, tak by pro mě bylo toto žákovské řešení špatně pochopitelné. V každém případě žák opravdu uvažoval tímto způsobem, protože mi po rozboru této úlohy výše zmíněnou úvahu popsal. Rozbor historického řešení je uveden v části 2.2 na straně 25.



Obr. 3.10: Úloha 2 – Žákovské řešení 5 (tercie)

Jako poslední uvedu řešení, které jsem očekával, že se objeví častěji (***Rovnice***). Jedná se o klasické sestavení dvou rovnic o dvou neznámých.



(a) kvarta

(b) tercie

Obr. 3.11: Úloha 2 – Žákovská řešení 6, 7

Třída	Úspěšnost	Odhad	Půlení	Odečtení	x a $x + 60$	Rovnice
IV.A	12/25	4	4	3	1	1
III.B	11/25	8	3	0	0	1
II.A	13/27	7	6	0	0	0
Celkem	36/77	19	13	3	1	2

Tabulka 3.2: Úloha 2 – četnost typů řešení ve třídách.

3.2.3 Úloha 3 – O dělení na části (al-Chvárizmí)

„*Rozdělil jsi deset[dvacet] na dvě části, potom jsi dělil jednu část druhou a jejich podíl je* 4. *Jak velké jsou tyto dvě části.*“ (8 a 2[16 a 4])

U této úlohy jsem se rozhodl po sesbírání a vyhodnocení výsledků z první třídy (kvarta), že lehce modifikuji její matematický parametr. Mnoho žáků kvarty totiž řešilo úlohu vhledem a nebo jednoduchým rozborem případů. V pilotním testování byla tato úloha zařazena a 3 ze 4 žáků uvedli řešení, které bylo zajímavé[7]. Oproti tomu v kvartě 18 z 25 žáků úlohu řešilo odhadem, vhledem nebo rozborem. Důvod byl následující. Pokud 10 dělím na dvě části, nezáleží na pořadí a výsledkem je celé číslo, pak je pouze pět možností, jak to můžu udělat. Není tak těžké přijít rozborem případů na správné řešení. Před testováním mě tento aspekt úlohy nenapadl.

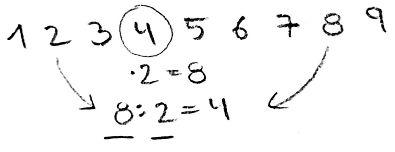
Úlohu jsem proto modifikoval tak, že jsem zdvojnásobil hodnotu, kterou se na začátku úlohy dělí. Tím jsem zjistil, že taková změna nemá na výsledek ani charakteristiku žákovských řešení téměř žádný vliv, což dokládá tabulka 3.3 [8]. Žáci kvart tak počítali s rozdělením 10 na dvě části a zbylé dvě třídy s rozdělením 20 na dvě části.

Odhad	Řešení odhadem bylo většinou bylo doplněno slovy: „Prostě jsem to zkoušel a nakonec mi to vyšlo“. Do této kategorie řadím i řešení, u kterých nebylo jasné, jak k němu žák došel.
Rozbor	Žáci se v tomto případě systematicky snažili vyčerpat všechny možnosti řešení. Počítali přitom s předpokladem, že řešení je celočíselné.
Rovnice a odhad	Sestavení rovnice, ale neschopnost nebo neochota ji dořešit. K výsledku žák došel buď odhadem nebo rozborem.
Rovnice	Sestavení rovnice a její vyřešení.
Násobky 4:1	Hledání násobků poměru 4:1, dokud nedošlo k nalezení součtu 10 případně 20.

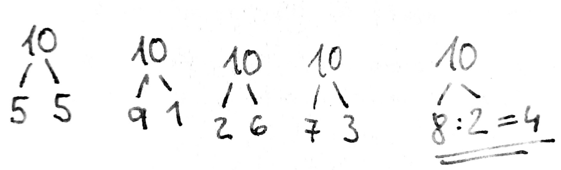
Příklad řešení odhadem nebudu uvádět, většinou žák napsal řešení a doplnil je slovy: „*Prostě jsem to zkoušel a vyšlo to*“. U některých žáků je z řešení přímo

[7]Zajímavé znamená, že nenapsali pouze výsledek doplněný slovy uhodnul jsem řešení.
[8]Poměr žáků řešících úlohu odhadem se v následujících dvou třídách téměř nezměnil

patrné, jakým způsobem rozebírali jednotlivé možnosti. Tento typ řešení jsem nazval ***Rozbor*** a představují jej následující dva obrázky.



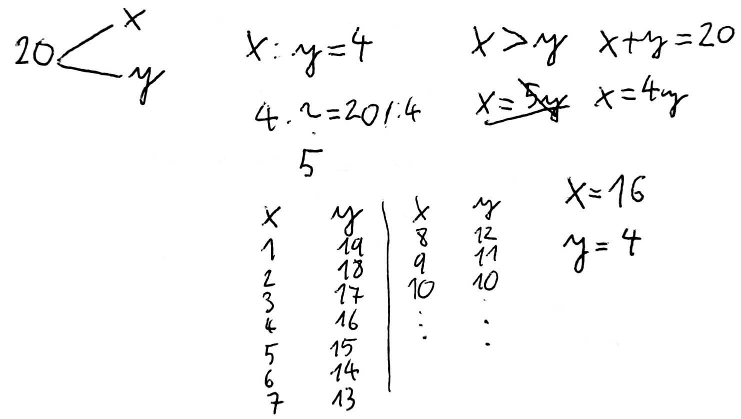
(a) kvarta



(b) kvarta

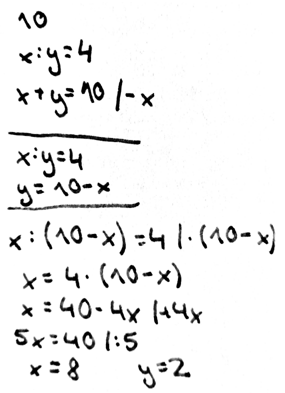
Obr. 3.12: Úloha 3 – Žákovská řešení 1, 2

Někteří žáci sestavili rovnici, ale příklad vyřešili i tak odhadem (***Rovnice a odhad***), jako je to vidět na obrázku 3.13. Žák tercie v tomto případě nejspíš nevěděl, jak soustavu řešit (téma se probírá až v kvartě). Bylo tak pro něj jednodušší provést rozbor případů. Níže uvedené řešení tak dobře reprezentuje i řešení typu ***Rozbor***, které pro dělení 20 mělo často tuto formu.

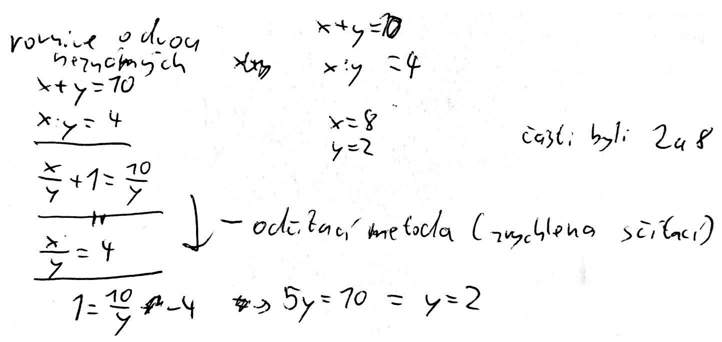


Obr. 3.13: Úloha 3 – Žákovské řešení 3 (tercie)

V kvartě někteří žáci řešili tuto úlohu pomocí soustavy dvou rovnic o dvou neznámých (***Rovnice***). Tento způsob nejspíš vychází z jejich výuky. Na následujících obrázcích 3.14 jsou dvě řešení. V každém z nich přitom žák zvolil jiný způsob postupu. První řešil rovnici pomocí dosazení vyjádřené neznámé y. Druhý zvolil velmi zajímavé řešení, ve kterém první rovnici $x + y = 10$ celou vydělil y, čímž získal dvě rovnice, které obě obsahují výraz $\frac{x}{y}$, a po odečtení těchto rovnic se výrazu zbavil.



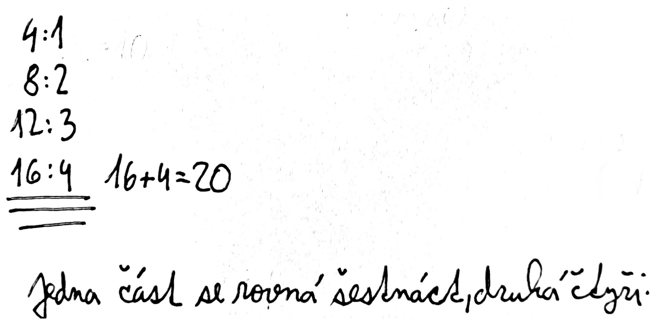
(a) kvarta



(b) kvarta

Obr. 3.14: Úloha 3 – Žákovská řešení 4,5

Nakonec jsem dohromady u třech žáků v tercii a sekundě zaznamenal řešení nazvané ***Násobky 4:1***, které je podobné egyptskému přemýšlení. Žáci věděli, jaký je poměr velikostí obou částí (4:1). Postupně tak tento poměr násobili, dokud nedošli k součtu 20, což je hezky vidět na obrázku 3.15.



Obr. 3.15: Úloha 3 – Žákovské řešení 6 (sekunda)

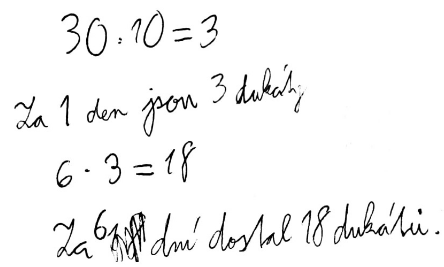
Třída	Úspěšnost	Odhad	Rozbor	Rovnice a odhad	Rovnice	Násobky 4:1
IV.A	24/25	14	4	3	3	0
III.B	21/25	11	3	5	1	1
II.A	26/27	14	7	3	0	2
Celkem	71/77	39	14	11	4	3

Tabulka 3.3: Úloha 3 – četnost typů řešení ve třídách.

3.2.4 Úloha 4 – O pracujícím (al-Chvárizmí)

„Pokud tázající říká: Pracující, který má měsíční výdělek deset dukátů, pracoval šest dní. Kolik dukátů dostal, víš-li, že tento měsíc má 30 dní? (Díl dukátů ze mzdy je stejný, jako díl odpracovaného času z měsíce.)“ (2 dukáty)

Čtvrtá úloha měla úspěšnost řešení 61 %. Nejčastějším důvodem žákovské neúspěšnosti bylo opět špatné čtení zadání, ale také nezvládnutí výpočtu přímé úměrnosti. Při řešení této úlohy využilo 9 z 25 žáků tercie využilo pro výpočet trojčlenku. Správný výsledek mělo jen 5 z těchto žáků, měli celkovou úspěšnost dokonce pod 50 %. Dalším důvodem, proč bylo mnoho žáků neúspěšných, byla chybná práce s periodickým číslem, viz. obrázek 3.17b. Tato chyba se více objevovala zejména v sekundě a tercii. Posledním důvodem neúspěchu byla chybná úvaha, která vedla například k následujícímu žákovskému řešení (obrázek 3.16). Žák v něm dělí 30 dní 10 dukáty a myslí si, že tím získá počet dukátů, které pracující dostal za den. Ve skutečnosti spočítal, za kolik dní dostane pracující jeden dukát.



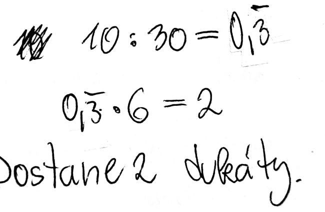
Obr. 3.16: Úloha 4 – Žákovské řešení 1 (sekunda)

Ve většině případů by k eliminaci žákovské chyby stačilo zpětné dosazení výsledku do úlohy. Tím by žák ověřil správnost svého postupu a případně se mohl opravit. Někteří žáci dokonce formulovali odpověď s chybným výsledkem. Ani to je ale nedovedlo k odhalení chyby. Ve výše zmíněném obrázku například žák tvrdí, že pracující vydělal 18 dukátů za šest dní, i když za 30 dní jich vydělal 20.

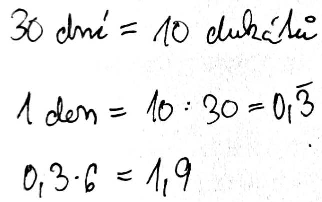
Správná řešení, která jsem v tomto případě rozpoznal, jsou následující.

Pětina	Žáci si uvědomili, že 6 dní tvoří pětinu z měsíce. Výsledek byl pětina z 10, což je 2.
Třetina za den	Základem tohoto řešení byl výpočet odměny, kterou dostal pracující za den.
Trojčlenka	Využití trojčlenky pro výpočet.
Tři dny dukát	Řešitel si uvědomil, že když za 30 dní pracující dostane 10 dukátů, pak je to za 3 dny jeden dukát.
Rovnice	Žák sestavil a vypočítal rovnici.
Nejasné	Ve třech případech nebyl žákovský postup zřejmý. Možná se jednalo o odhad.

Nejčastějším řešením byl výpočet přes výdělek za jeden den ***Třetina za den***. U tohoto způsobu docházelo ke špatné práci s periodickým číslem. Tato chyba se vyskytla v 11 řešeních. Celkem tímto způsobem úlohu řešilo 23 žáků a z nich 12 úspěšně (viz. tabulka 3.4 na straně 81). Jen dva žáci přitom počítali s $\frac{1}{3}$ místo periodického čísla $0{,}\overline{3}$.



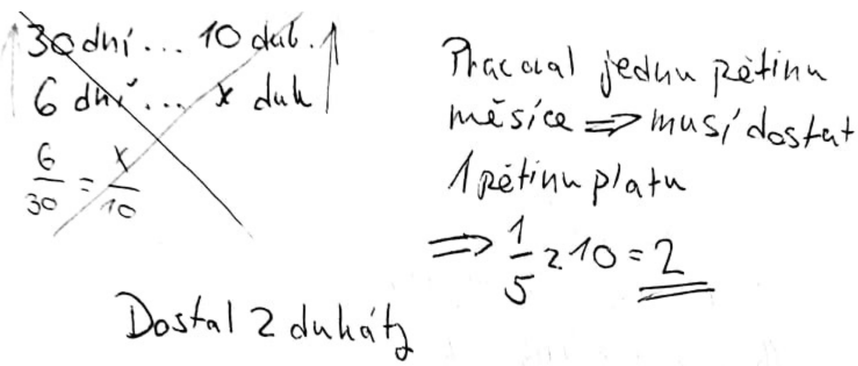
(a) kvarta



(b) tercie

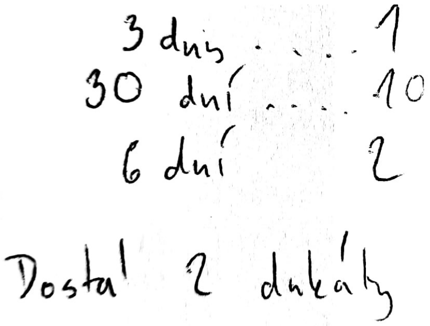
Obr. 3.17: Úloha 4 – Žákovská řešení 2, 3

Úspěšně řešilo úlohu nejvíc žáků pomocí úvahy, kdy si žák uvědomil, že za pětinu času vydělá pracující pětinu mzdy. Všichni žáci, kteří úlohu řešili touto úvahou, měli správně i výsledek. Na následujícím obrázku žák nejprve zkoušel úlohu počítat pomocí trojčlenky, kterou použil správně. Nejspíš si tím nebyl jistý, škrtnul tento postup a zvolil k řešení již zmíněnou úvahu ***Pětina***.



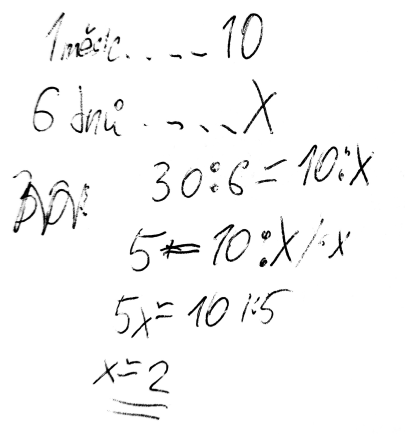
Obr. 3.18: Úloha 4 – Žákovské řešení 4 (tercie)

Jiná úvaha ***Tři dny dukát***, kterou použilo celkem 5 žáků, je následující. Pokud za 30 dní vydělal pracující 10 dukátů, pak za 3 dny vydělá jeden. Při této úvaze opět žádný žák nedošel k chybnému řešení.

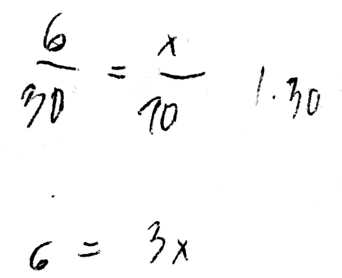


Obr. 3.19: Úloha 4 – Žákovské řešení 5 (sekunda)

Posledním řešením, které se objevilo pouze v kvartě, je řešení pomocí ***Rovnice***. Žák si uvědomil, že poměr mezi mzdou a časem, který pracující pracoval, se nemění a tento poměr vyjádřil rovnicí, jak je vidět na obrázcích 3.20a nebo 3.20b.



(a) kvarta



(b) kvarta

Obr. 3.20: Úloha 4 – Žákovská řešení 6, 7

Je zajímavé, kolik různých úvah nebo postupů může žák využít u takto jednoduché úlohy. Vzhledem k tomu, že se jedná o úlohu na klasickou přímou úměrnost, tak by měli mít žáci s takovými úlohami zkušenost a očekával bych, že jejich úspěšnost bude vyšší, než jakou jsem zaznamenal viz. tabulka 3.2.

Tento typ úloh je jedním z těch, pro které Fibonacci v *Liber Abaci* uvádí mnoho příkladů. Téměř každý příklad přitom řeší dvěma způsoby, z nichž jeden často bývá dnešní trojčlenka. Druhým je pak nějaký typ úvahy, kterým postup pomocí trojčlenky vysvětluje a potvrzuje. Tomuto tématu se věnuji v kapitole 2.5.1 na straně 45.

Myslím si, že zdůvodnění postupu trojčlenky pomocí úvahy je moment, který žákům velmi chybí, pokud je k tomu učitel nevede. Já sám jsem se trojčlenku naučil až v didaktice matematiky na vysoké škole. Do té doby jsem jí nerozuměl a nepoužíval jsem ji. I tak jsem byl schopen počítat úlohy na přímou i nepřímou úměrnost.

Žáci si často spojují trojčlenku s pravidlem, které se musí naučit. Při rozboru úlohy s žáky tercie jsem viděl, že skoro žádný z nich toto pravidlo neumí zdůvodnit. Navíc jej používali relativně náhodně. Jeden z žáků v rozhovoru po hodině dokonce říkal, že si čísla vždy napíše pod sebe a zkusí z nich napsat vztah, který následně ověří, jestli dává smysl. Pokud dává smysl, tak je to podle něj správně. Nejistota žáka ohledně trojčlenky byla vidět i na obrázku 3.18 na straně 79. Řešení pomocí trojčlenky se objevilo pouze v tercii.

Po rozhovoru s paní učitelkou jsem zjistil, že trojčlenku neprobírali. Následně od žáků jsem zjistil, že si toto pravidlo přinesli z chemie, kde jej používají. Což poukazuje na častý problém, kdy je v jiných předmětech než je matematika potřebný matematický aparát, který žáci v matematice samotné neprobírali.

Třída	Úspěšnost	Pětina	Třetina za den	Trojčlenka	Tři dny dukát	Rovnice
IV.A	20/25	9	7	0	0	2
III.B	11/25	3	2	5	1	0
II.A	16/27	8	3	0	4	0
Celkem	47/77	20	12	5	5	2

Tabulka 3.4: Úloha 4 – četnost typů řešení ve třídách.

3.2.5 Úloha 5 – Diofantova hádanka

„Diofantovo dětství trvalo šestinu jeho života, za další dvanáctinu mu vyrašily vousy a za další 12 *let se oženil. Za dalších pět let se mu narodil syn, jehož život byl však jen poloviční oproti životu otcovu. Po synově smrti žil Diofantes ještě* 4 *roky. Jak dlouho Diofantos žil?"* (84 let)

Tato úloha je odlišná od ostatních v tom, že se mi nepovedlo nalézt její historické řešení. Nemám tedy s čím přímo porovnávat žákovská řešení. Přesto se budu snažit hledat principy historických řešení napříč obdobími, které v kapitole 2 shrnuji.

Žákovská úspěšnost u této úlohy byla pouze 36 %, proto jsem se rozhodl přidat do tabulky 3.5 i četnosti dvou hlavních důvodů žákovského neúspěchu. Následující shrnutí představuje typy řešení úspěšných žáků.

Rovnice 21	Typ řešení, ve kterém si žáci uvědomili, že 21 let je čtvrtina Diofantova života. Často kvůli tomu nedořešili sestavenou rovnici.
Rovnice	Řešení pomocí sestavení a vyřešení rovnice.
Nejasné	Řešení, ve kterém žáci došli ke správnému výsledku, ale ze zápisu není jasné jak.

Dále zde doplňuji dvě hlavní příčiny žákovského neúspěchu v této úloze.

Problém syn	V tomto případě se žáci snažili sestavit rovnici, ale nedařilo se jim to. Příčinou byla neschopnost zařadit do rovnice údaj o synovi.
Num Chyby	Žákům se podařilo sestavit rovnici, ale nepovedlo se jim ji správně vyřešit. Jednalo se o numerické chyby nebo nesprávné řešení rovnice.

Tato úloha byla mnohými žáky vnímána jako těžká. Někteří žáci si vytvořili její zápis, ale v jejich práci není vidět ani náznak řešení. Jiní úlohu neřešili vůbec. Tyto dvě kategorie dohromady tvořilo 13 žáků, což je téměř 17 %.

Nejčastějšími důvody žákovského neúspěchu byla neschopnost žáků zařadit údaj o synovi do jejich matematického zápisu.

Během rozboru úlohy se třídou vyplynulo, že důvodem byla pravděpodobně časová souslednost úlohy. Někteří žáci si neuvědomili, že období, kdy žil syn, je zároveň část Diofantova života. Jiní žáci si stanovili dvě neznámé, první délku života Diofanta a druhou délku života jeho syna. Měli pak problém najít vztah mezi těmito neznámými a využít ho při výpočtu. V historii matematiky přitom období, ve kterém matematici neuměli dobře pracovat s více než jednou neznámou, hraje velmi významnou roli. Případ, ve kterém žák nezvládl práci se dvěma neznámými, reprezentuje následující obrázek.

$$\check{z}. = \frac{1}{6}\check{z}. + \frac{1}{12}\check{z}. + 12 \text{ let} + 5 \text{ let} + x + 4 \text{ let}$$
$$x = \frac{1}{2}\check{z}$$
$$\check{z} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + 21 \text{ let} + x$$
$$\check{z} = \frac{1}{72} = 1:72 = 0{,}01\overline{38} = \underline{0{,}014}\ ?$$
$$0{,}014 + 21 \text{ let} + x = \check{z}$$

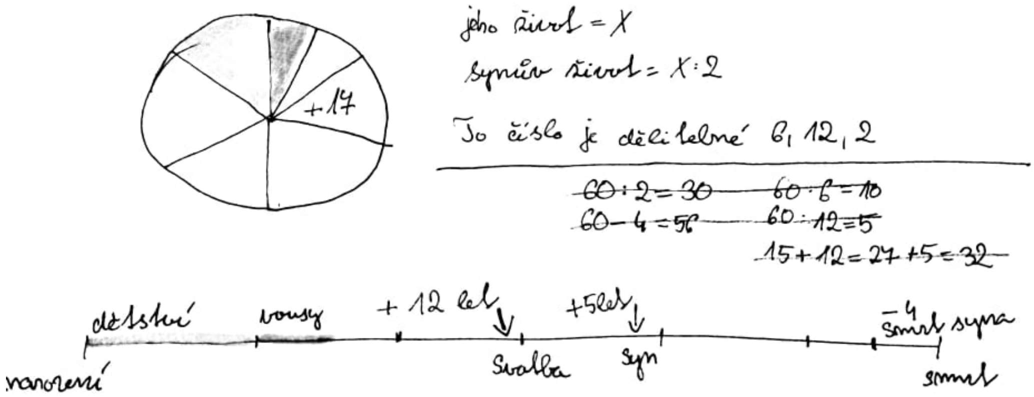
Obr. 3.21: Úloha 5 – Žákovské řešení 1 (sekunda)

Další žáci údaj o životě syna vypustili viz. obrázek 3.22.

$$x : 6 + x : 12 \underline{+ 12 + 5 + 4} = x$$
$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + 21 = x$$

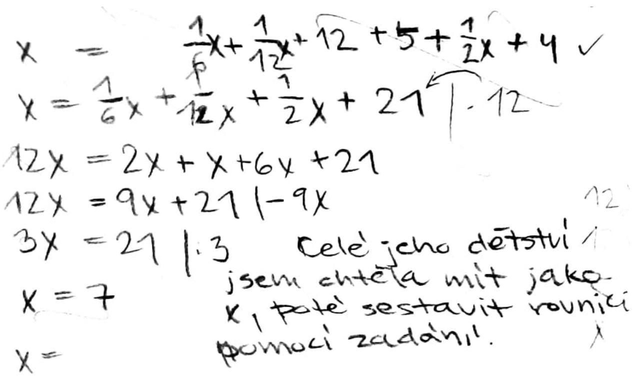
Obr. 3.22: Úloha 5 – Žákovské řešení 2 (tercie)

Několik žáků se také snažilo o nějakou grafickou reprezentaci úlohy. V 5 případech se jednalo o koláčovou reprezentaci. V 6 případech žáci volili zakreslení na osu. Oba tyto přístupy reprezentuje obrázek 3.23, kde žák barevně vyznačil jednotlivé části života jak na osu, tak do koláče. Obrázek ale ani v jednom případě nevedl ke správnému řešení.



Obr. 3.23: Úloha 5 – Žákovské řešení 3 (tercie)

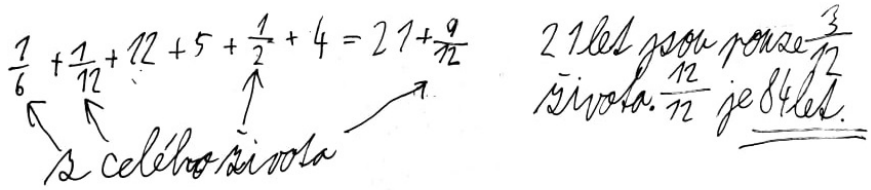
Nakonec se v několika případech žákům povedlo matematizovat slovní úlohu, ale nebyli schopni vyřešit sestavenou rovnici, jako je tomu na obrázku 3.24



Obr. 3.24: Úloha 5 – Žákovské řešení 4 (kvarta)

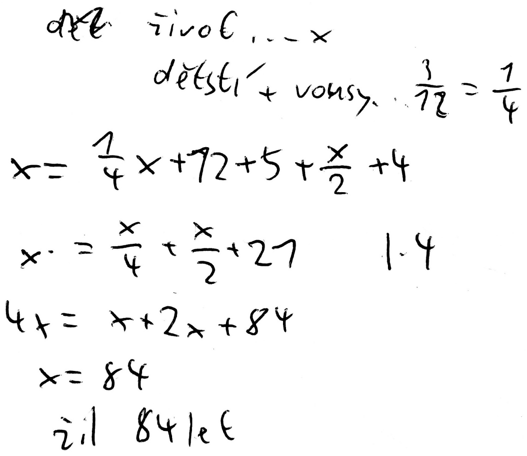
Správná řešení často vycházela ze sečtení všech čísel, která žák našel. Někdy přitom zpětně popsal, co některé části znamenají, jako je tomu na obrázku 3.25, kde žák až zpětně dopsal, že zlomky ve výpočtu reprezentují části z celého Diofantova života. Jinak by zápis příliš nedával smysl. Toto řešení také reprezentuje typ řešení ***Rovnice 21***.

V jiných případech žák položil hledaný věk Diofanta (neznámou x) roven součtu všech zlomků a celých čísel, které v úloze našel a došel k řešení špatnému. Nezarazilo ho ani to, že mu věk Diofanta vyšel $21\frac{3}{4}$, toto řešení se objevilo ve 3 případech.

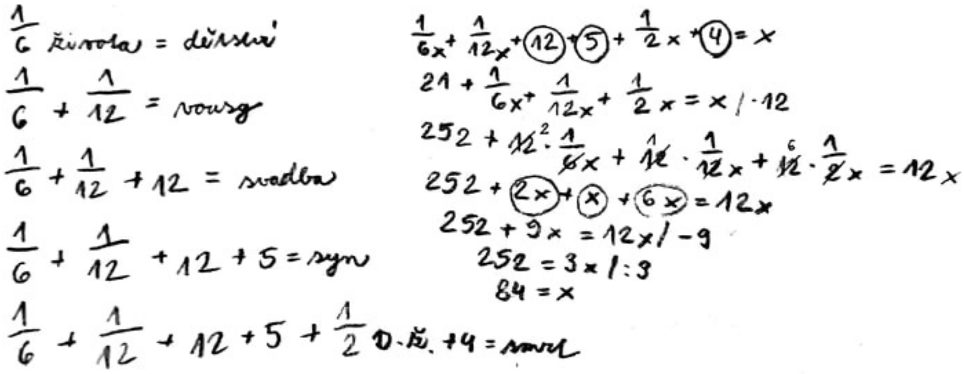


Obr. 3.25: Úloha 5 – Žákovské řešení 5 (sekunda)

Posledním typem řešení, které se vyskytlo ve všech třídách, bylo řešení pomocí klasické lineární rovnice. Tato řešení reprezentují například obrázky 3.26 a 3.27.



Obr. 3.26: Úloha 5 – Žákovské řešení 6 (kvarta)



Obr. 3.27: Úloha 5 – Žákovské řešení 7 (tercie)

Třída	Úspěšnost	Rovnice 21	Rovnice	Nejasné	Problém syn	Num Chyby
IV.A	8/25	4	2	2	5	4
III.B	10/25	2	5	3	3	1
II.A	10/27	5	2	3	6	1
Celkem	28/77	11	9	8	14	6

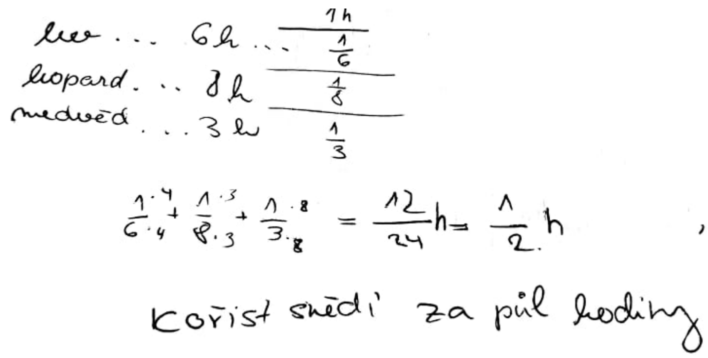
Tabulka 3.5: Úloha 5 – četnost typů řešení ve třídách.

3.2.6 Úloha 6 – Lev, leopard a medvěd (Fibonacci)

„Lev by snědl jednu ovci za šest hodin a leopard [by ji snědl] za 8 *hodin, a medvěd [by ji snědl] za* 3 *hodin: Ptají se nás, pokud by jim byla vhozena jedna ovce, jak dlouho by jim trvalo, než by ji pozřeli?“* (1.6 hodiny)

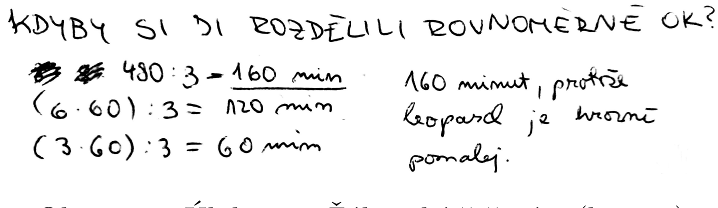
Úloha o lvu, leopardu a medvědovi měla úspěšnost 14 %. Největší překážkou pro žáky se jeví opět nepochopení zadání úlohy, nebo neschopnost sestavení správného situačního modelu jako na obrázku 3.28, kde žák sčítá části ovce, kterou sní jednotlivá zvířata, a za tento součet píše „h“ jako hodiny. Dochází tak k chybnému závěru. V následujícím shrnutí opět popisuji typy úspěšných žákovských řešení.

Za hodinu	Žáci nejprve spočítali, kolik zvířata sežerou ovce za hodinu, a následně dopočítali, za jak dlouho sní zbytek.
Rovnice	Řešení pomocí sestavení a vyřešení rovnice. Do tohoto případu zařazuji i alternativou s vypočítáním, kolik toho sní zvířata za 24 hodin.
Části ovce	Žák se snažil rozdělit ovci tak, aby každé zvíře dostalo tolik, kolik stihne sníst za dobu, po kterou zvířata jedí společně.



Obr. 3.28: Úloha 6 – Žákovské řešení 1 (sekunda)

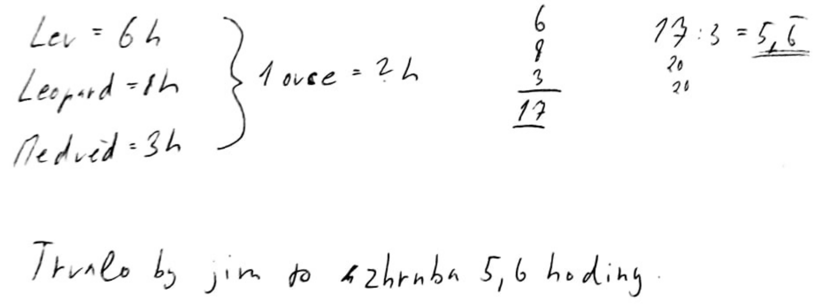
Je potřeba dodat, že tato úloha má nejednoznačné zadání. Není totiž přímo řečeno, že zvířata budou ovci žrát najednou, dokud ji celou nesežerou. Někteří žáci například předpokládali, že si zvířata rozdělí ovci na třetiny. Jiní žáci polemizovali s tím, jestli by se nejprve nepoprala zvířata mezi sebou a až vítěz tohoto souboje by ovci sežral. Myslím si, že tato žákovská interpretace zadání měla někdy motivaci snazšího řešení úlohy. Řešení úlohy vypadalo například následujícím způsobem.



Obr. 3.29: Úloha 6 – Žákovské řešení 2 (kvarta)

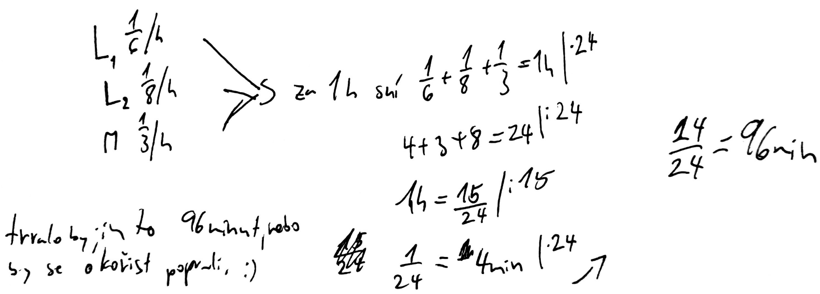
Někteří žáci počítali průměrnou dobu, kterou zvířata žerou, a předpokládali, že je to řešení. Tato úvaha ale odpovídá na jinou otázku. Jak dlouho trvá průměrně jednomu ze tří zvířat sežrat celou ovci? Pokud by navíc žrala všechna tři zvířata současně, tak je jasné, že jim to musí trvat kratší dobu než samotnému medvědovi, který žere nejrychleji (průměrná doba je $5{,}\overline{6}$ hodiny, medvěd žere ovci pouze 3 hodiny). Příklad žákovského řešení tímto způsobem je uveden na obrázku

3.30. Tento typ řešení byl nejčastější, přičemž více se objevoval v tercii a kvartě. V tabulce četností 3.6 je zaznamenán pod názvem ***Průměr***.



Obr. 3.30: Úloha 6 – Žákovské řešení 3 (tercie)

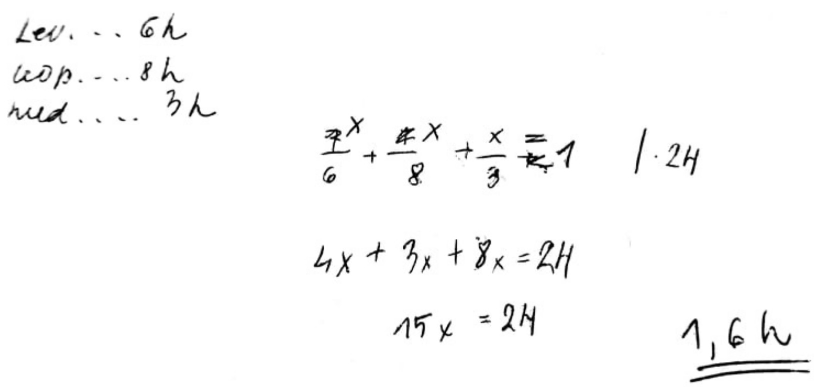
Nejčastějším způsobem správného řešení byl výpočet přes část ovce, kterou zvířata snědí společně za hodinu ***Za hodinu***. Příkladem tohoto řešení je například následující obrázek 3.31.



Obr. 3.31: Úloha 6 – Žákovské řešení 4 (kvarta)

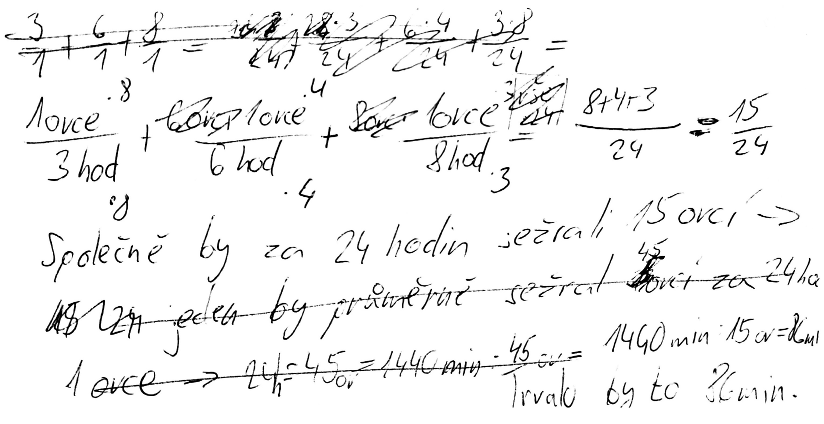
Žák v tomto případě spočítal, že zvířata snědí za hodinu $\frac{15}{24}$ ovce a zbývá ještě $\frac{9}{24}$. Protože $\frac{15}{24}$ trvá 60 min. pak $\frac{1}{24}$ trvá sníst 4 minuty. Díky tomu dopočítal celkový výsledek.

Druhým řešením, které se objevilo pouze v kvartě, je řešení pomocí rovnice. Tady žáci sestavili rovnici, kde na jedné straně měli části ovce, které snědí jednotlivé šelmy za hodinu násobené hledaným časem (vyjádřené neznámou x), a na straně druhé jednu celou ovci. Příklad tohoto řešení je na obrázku 3.32.



Obr. 3.32: Úloha 6 – Žákovské řešení 5 (kvarta)

Fibonacci ale při svém řešení rovnici nevyužíval. Nepoužil ani žádnou z výše zmíněných úvah. Jeden žák ale použil stejnou úvahu jako Fibonacci ve svém řešení viz. obrázek 3.33.



Obr. 3.33: Úloha 6 – Žákovské řešení 6 (kvarta)

Tento žák číslo $\frac{15}{24}$, které většina žáků interpretovala jako $\frac{15}{24}$ ovce za hodinu, vysvětluje jinak. $\frac{15}{24}$ podle něj znamená, že zvířata společně snědí 15 ovcí za 24 hodin. Proto je potřeba 24 hodin vydělit 15 a dostaneme výsledek. Při porovnání obrázku 3.32 a 3.33 jsem navíc zjistil, že tato úvaha přesně odpovídá řešení rovnice uvedené na prvním ze dvou zmíněných obrázků.

Rovnice má tak velmi přirozené vysvětlení, které logicky ukazuje, proč se má takto počítat.

Třída	**Úspěšnost**	**Za hodinu**	**Rovnice**	**Části ovce**	**Průměr**	**Numerické**
IV.A	8/25	4	3	1	8	0
III.B	1/25	0	0	0	9	1
II.A	1/27	2	0	0	3	3
Celkem	11/77	5	3	1	17	4

Tabulka 3.6: Úloha 6 – četnost typů řešení ve třídách.

3.2.7 Závěry z výzkumu

Při rozboru řešení se mi povedlo definovat jednotlivé typy žákovských řešení slovních úloh. Čekal jsem, že se větší část žáků bude snažit matematizovat slovní úlohy. Zejména v prvních čtyřech úlohách žáci ve většině případů využívali rozboru případů, odhadu nebo metody pokus omyl. Tomuto typu žákovských řešení by se dalo předejít zvolením jiných matematických parametrů[9] úloh. Například bych mohl zvětšit tyto parametry, aby nebyl rozbor tak jednoduchý, nebo jejich změnou zajistit, aby výsledek nebyl celočíselný.

Ve většině chybných řešení chyběl nějaký typ ověření správného počítání (zkoušky nebo dosazení výsledku do původního kontextu). Myslím si, že tato

[9] Matematickými parametry mám na mysli číselné parametry úlohy. Například v úloze o pytli je tímto parametrem jeho celková cena nebo ceny jednotlivých druhů kovu.

dovednost žákům této paní učitelky možná trochu chybí. V mnoha případech by přitom vedla k odhalení chybné úvahy nebo chyby v řešení.

V žákovských řešeních jsem také našel prvky řešení historických. Například v úloze z *Rhindova papyru*, kde někteří žáci místo dělení používali stejně jako Egypťané opakované sčítání do hodnoty dělence. Překvapivé na tomto typu řešení bylo, že se vyskytovalo v každé ze zkoumaných tříd, viz. tabulka četností 3.1. V další úloze z babylonského období se vyskytlo jedno řešení, které odpovídalo řešení babylonskému, ale mnozí další žáci udělali při svém odhadu stejný první krok. Rozdělili pole na dvě o stejném obsahu. Následně většinou používali nějaký typ odhadu.

U dvou úloh od al-Chvárizmího se řešení žáků příliš nepodobala slovnímu zápisu, který al-Chvárizmí používal, což se do jisté míry dalo čekat, protože jsou žáci zvyklí na dnešní symbolický zápis. V al-Chvárizmího druhé úloze, která by se dnes zařadila do typu středoškolských úloh využívaných při výuce přímé úměrnosti, bylo nečekané, kolik žáků neuspělo. Zároveň byl tento typ úloh mnoha příklady popsán ve Fibonacciho *Liber abaci*, kde Fibonacci téměř každou úlohu tohoto typu doplňuje několika způsoby řešení, přičemž je často jedno z nich založeno na úvaze. Toto by se dalo přenést do výuky, kde pestrost řešení může vést k hlubšímu pochopení úloh žáky.

V páté úloze se většina žáků snažila o její matematizaci. Hlavní důvody neúspěchu byly dle mého názoru dva, kde jeden bychom mohli najít jako velkou překážku i v historii. Tím je více než jedna neznámá a jejich následné vzájemné vyjádření. Navíc se při řešeních objevovaly zápisy, ve kterých roli neznámé nehrálo písmeno, ale rovnou celé slovo. Zejména pro krátká slova, jako byl „syn“, se zdá být tato volba neznámé relativně často užívaná. I zde můžeme najít paralelu s historickým vývojem.

Poslední úloha mě překvapila asi nejvíce. V učebnici pro gymnázia je řešení úloh na společnou práci často vedeno pouze na sestavení rovnice, kde tradičně na jedné straně stojí číslo 1 a na straně druhé zlomky s písmenem x. Matematizace 6. úlohy by vypadala takto.

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{3}x = 1$$

Přestože se úlohy tohoto typu v kvartě již vyučovaly, našel jsem pouze 3 řešení tohoto typu. Ostatní žáci využívali nějaký druh úvahy. V tomto případě mi přijde moc hezká úvaha, kterou přestavil Fibonacci, ta se v jednom případě objevila mezi žákovskými řešeními. Pouhé sestavení rovnice na základě jejího typu vede žáky k zkratkovitému používání tohoto nástroje a myslím si, že může vést k formalismu. Na druhou stranu jsem v řešeních nenašel žádné, u kterého bych jej objevil.

Využití historických úloh ve výuce podle mého názoru dává smysl, stejně tak analýza historických řešení. Například u úlohy 2. z části 3.2.2 na straně 71 bych nejspíš z žákova zápisu správně nepochopil jeho úvahu, kdybych historické řešení neznal. U tohoto žákovského řešení mě fascinovalo, že se vůbec našel žák, který úlohu takto řešil. Žáci říkali po rozboru řešení, že je úlohy bavily a přirovnávali je k úlohám z přijímacích zkoušek. Jejich jedinou společnou charakteristikou přitom dle mého názoru je jejich netradičnost z pohledu žáků.

Závěr

Cílem práce je popsat historický vývoj algebry pomocí rozboru konkrétních historických řešení. Abych mohl tento rozbor provézt, nastudoval jsem a popsal klíčové kroky v historickém vývoji algebry. Při tomto studiu jsem zjistil, že významným aspektem historických pramenů, které můžu zkoumat, jsou i didaktické vlastnosti těchto textů.

Egypťané a Babyloňané uvádí konkrétní řešení slovních úloh, kde cílem je ukázat jak úlohy řešit. Řešení v těchto textech přitom nejsou příliš vysvětlena a jedná se tak většinou o holý popis kroků, které musí čtenář udělat, aby dosáhl výsledku. Diofantos ve svém díle sice používá zajímavou symboliku, ale tento přístup je u něj podobný. Chce předvést, čeho docílil, a nehledí přitom tolik na srozumitelnost svého díla, což se projevuje zejména nesystematickým zařazením různých úloh za sebe. První text výrazněji přizpůsobený čtenáři z pohledu algebry, který jsem v práci rozebíral, je al-Chvárizmího *Algebraický traktát*, v jehož úvodu al-Chvárizmí popisuje účel knihy následovně.

„Proto jsem já sepsal krátkou knihu o algebře...neboť to je nezbytné pro lidi při dělení majetků v záležitostech soudních, v obchodě, při uzavírání smluv a také při vyměřování půdy, vedení kanálů, ve stavitelství a při nejrůznějších jiných pracích.“ (Chvárizmí, počátek 9. st., str. 139)

Algebru zde tedy vnímá jako nástroj pro řešení každodenních problémů a chce její umění naučit lidi své doby. Tento cíl se také projevuje v charakteru knihy, ve které používá příklady, které jsou jednoduché na výpočty, aby byly snadno pochopitelné pro čtenáře. Fibonacci má oproti němu jiný přístup k volbě úloh. Ve své knize *Liber abaci* doplňuje každé téma mnoha gradovanými úlohami, od lehkých úloh po úlohy, které jsou těžké a výsledkem je zlomek. Navíc většinu řešených úloh doplňuje více způsoby řešení. Na konci historického shrnutí jsem zmínil Descarta, který místo řešení jedné úlohy napsal:

„Nebudu se tady zdržovat podrobnějším vysvětlováním, neboť vám nabízím potěšení, abyste se to naučili sami a použili to k zušlechtění svého ducha...Neshledávám zde nic tak obtížného, co by nemohli zvládnout ti, kdož jsou aspoň poněkud zběhlí v obyčejné geometrii a algebře.“(Descartes, 1637, str. 5)

Nechává tak prostor k dořešení problému čtenáři. Čtenář už není pouhým pasivním příjemcem informací, ale musí se nad úlohou zamyslet a využívat aktivně nabyté znalosti. V čase se tak neposouvá pouze vývoj algebry, ale i přístup k čtenářům těchto knih v roli žáků. Od čistě pasivní role, kdy je čtenáři sdělován postup řešení bez vysvětlení, k výzvě řešit úlohu samostatně a učit se tak přemýšlet nad problémem. Je zde také patrná změna cíle. Egypťané měli za cíl naučit se reprodukovat postup. Descartes měl za cíl rozvíjet čtenářovo matematické myšlení.

Zjistil jsem, jakým způsobem se vyvíjel didaktický charakter matematických textů. Podobně se ale změnil i samotný obsah těchto prací o algebře. Tyto změny jsem popsal v historické části. Jednalo se o vývoj od jednoduchých aritmetických operací s čísly přes náhodnou manipulaci s čísly a striktní využívání konkrétních algoritmů po uvedení slovního popisu algebraických rovnic typu *„Dva kořeny a jeden kvadrát roven pěti.“* (kolem roku 800 n.l.). Dále se začala vyvíjet symbolika algebry a přitom se dlouho nepřicházelo s novými vědeckými výsledky až do doby italského matematika Cardana (počátek 16. století), který publikoval řešení kubické rovnice. V tomto mezičase (zhruba 800 let) se postupně vyvíjela matematická symbolika. Ve výuce oproti historickému vývoji zavádíme matematickou symboliku velmi brzy. Možná z toho důvodu je učiteli algebra uváděna jako jedno z kritických míst matematiky. Tato myšlenka je uvedena i v knize (Rendl a kol., 2013, str. 302). V dnešních učebnicích je cestou například tvorba nějakého mezistupně mezi matematikou bez dnešní symboliky a s ní. Tou může být například tvorba prostředí, která jsou nabízena žákům v učebnicích profesora Hejného.

Dalším cílem bylo zjistit, jakými způsoby žáci řeší historické slovní úlohy s důrazem na řešení podobná řešením historickým. V tomto rozboru se ukázalo, že některé historické principy, jako je egyptské postupné sčítání místo násobení nebo dělení, jsou v žácích relativně silně zakořeněny. Tento jev se totiž objevil napříč všemi testovanými ročníky zejména v řešeních první úlohy.

U druhé úlohy se objevoval často jev, který jsem nazval *Půlení*. Pokud bylo třeba hledat velikost dvou polí, tak si student nejprve zvolil, že jsou pole rozdělena na polovinu, a podle toho, jak úloha dopadla s tímto zvoleným vstupem, upravil svůj odhad.

V žákovských řešení al-Chvárizmího úloh se projevily příliš jednoduché matematické parametry úloh. Místo algebraických řešení těchto slovních úloh žáci často volili řešení odhadem nebo rozborem případů. Překvapilo mě však v jaké míře. Tato řešení byla oproti symbolickému zápisu rovnice často jednodušší. Pokud bych příště úlohy zadával, tak bych uvažoval o volbě matematických parametrů s většími čísly, nebo o úpravě úlohy tak, aby její výsledek nevycházel celočíselně. To by nejspíše vedlo žáky k nutnosti více využívat algebraický zápis.

Zbylé dvě úlohy byly pro žáky těžší, což vyplynulo z rozboru úloh ve třídách i rozboru jednotlivých řešení a celkové úspěšnosti. Vedly také ke složitějším algebraickým zápisům.

Celkově lze říci, že v žákovských řešeních se objevovaly principy z řešení historických, a to v různé míře. Pro pochopení úloh a žákovských řešení byl rozbor historických řešení přínosný. Zejména pak rozbor konkrétních řešených úloh.

Největší přínos výzkumu vidím ve zkušenostech, které jsem touto diplomovou prací nabyl. Historické úlohy i historický kontext vývoje matematiky určitě využiji při své učitelské praxi.

Seznam použité literatury

BROUSSEAU, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990.* Kluwer Academic Publishers, New York. ISBN 0-306-47211-2.

CAJORI, F. (1993). *History of Mathematical Notations, Two Volumes Bound As One.* Dover Publications, New York. ISBN 0-486-67766-4.

CHVÁRIZMÍ (počátek 9. st.). *Aritmetický a algebraický traktát.* 1. vydání. OPS, Nymburk. ISBN 978-80-87269-07-7. Přeložil Petr Bogan, 2009.

DESCARTES, R. (1637). *Geometrie.* Paříž. ISBN 978-80-7298-313-3. Český překlad: Jiří Fiala: Geometrie, Praha Oikoymenh, 2010.

FAUVEL, J. a GRAY, J. (1987). *The History of Mathematics: A Reader.* Macmillan press, London. ISBN 0-333-42790-4.

FIBONACCI (1202a). *Fibonacci's Liber Abaci.* Springer-Verlag New York, Inc. ISBN 0-387-40737-5. přeložil do angličtiny: Laurence Sigler, 2002.

FIBONACCI (1202b). *Incipit liber Abbaci compositus a Lionardo filio Bonaccii Pisano in anno MCCII.* Istituto e Museo di Storia della Scienza, Florencie, Dostupné z: `https://bibdig.museogalileo.it/Teca/Viewer?an=1072400`.

FRIBERG, J. (2007). *A remarkable collection of Babylonian mathematical texts.* Springer, New York London. ISBN 978-0-387-34543-7.

HEATH, T. L. (1910). *Diophantus of Alexandria a Study in history of Greek Algebra.* 2. vydání. Cambridge University Press, Cambridge.

HEJNÝ, M. (2004). Mechanizmus poznávacího procesu. In HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J. a STEHLÍKOVÁ, N., editors, *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, pages s. 23–42. PedF UK, Praha. ISBN 80-7290-189-3.

HEJNÝ, M., BENEŠOVÁ, M., BEREKOVÁ, H., BERO, P., HRDINA, L., REPÁŠ, V. a VANTUCH, J. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2.* 2. vydání. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava. ISBN 80-08-01344-3.

HEJNÝ, M., ŠALOM, P., JIROTKOVÁ, D., HANUŠOVÁ, J. a SUKNIAK, A. (2015). *Matematika B, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* 1. vydání, 3. dotisk. H-mat, o.p.s., Praha. ISBN 978-80-905756-1-5.

HERMAN, J., CHRPAVÁ, V., JANČOVIČOVÁ, E. a ŠIMŠA, J. (1999). *Matematika: rovnice a jejich soustavy.* Prometheus. ISBN 80-7196-137-X.

IMHAUSEN, A. (2003). Calculating the daily bread: Rations in theory and practice. *Historia Mathematica*, **30**(1), 3–16. doi: 10.1016/s0315-0860(02)00009-5. URL `https://doi.org/10.1016%2Fs0315-0860%2802%2900009-5`.

JUŠKEVIČ, A. P. (1978). *Dějiny matematiky ve středověku.* 1. vydání. Academia, nakladatelství Československé akademie věd, Praha. ISBN 80-08-01344-3.

Krátká, M. (2009). *Srovnání ontogenetického a fylogenetického vývoje porozumění jevu nekonečno v geometrickém kontextu.* Disertační práce, Univerzita Karlova v Praze.

Kuřina, F. (1990). *Umění vidět v matematice.* 1. vydání. Státní pedagogické nakladatelství, Praha. ISBN 8004237533.

Kvasz, L. (2008). *Patterns of Change: Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel. ISBN 978-3-7643-8839-3.

Neugebauer, O. (1935). *Mathematische Keilschrift-Texte.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-662-32794-4.

O'Connor, J. J. a Robertson, E. F. (1998). Girolamo Cardano. *MacTutor History of Mathematics.* University of St Andrews, Scotland, [online; cit. 14. 6. 2021]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cardan/.

O'Connor, J. J. a Robertson, E. F. (1999a). Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi. *MacTutor History of Mathematics.* University of St Andrews, Scotland, [online; cit. 10. 4. 2021]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi/.

O'Connor, J. J. a Robertson, E. F. (1999b). Diophantus of Alexandria. *MacTutor History of Mathematics.* University of St Andrews, Scotland, [online; cit. 10. 4. 2021]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Diophantus/.

O'Connor, J. J. a Robertson, E. F. (1999c). Luca Pacioli. *MacTutor History of Mathematics.* University of St Andrews, Scotland, [online; cit. 14. 6. 2021]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pacioli/.

O'Connor, J. J. a Robertson, E. F. (2000a). An overview of Babylonian mathematics. *MacTutor History of Mathematics.* University of St Andrews, Scotland, [online; cit. 10. 6. 2021]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian_mathematics/.

O'Connor, J. J. a Robertson, E. F. (2000b). Rafael Bombelli. *MacTutor History of Mathematics.* University of St Andrews, Scotland, [online; cit. 14. 6. 2021]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bombelli/.

O'Connor, J. J. a Robertson, E. F. (2004). Johann Müller Regiomontanus. *MacTutor History of Mathematics.* University of St Andrews, Scotland, [online; cit. 10. 4. 2021]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Regiomontanus/.

O'Connor, J. J. a Robertson, E. F. (2014). René Descartes. *MacTutor History of Mathematics.* University of St Andrews, Scotland, [online; cit. 10. 6. 2021]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Descartes/.

Ottův slovník naučný (1890). *ilustrovaná encyklopedie obecných vědomostí.* J. Otto, Praha.

Paton, W. R. (1918). *The Greek Anthology V.* New York G.P. Putnam's sons. ISBN 978-0674990951.

Rektorys, K. (2000). *Přehled užité matematiky I.* 7. vyd. Prometheus, Praha. ISBN 80-7196-180-9.

Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, L., Páchová, A., Pavelková, I., Smetáčková, I., Tauchmanová, E. a Žalská, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* 1. vydání. PedF UK, Praha. ISBN 978-80-7290-723-6.

Smida, J., Lukátšová, J., Šedivý, J. a Vocelka, J. (1985). *Matematika pro I. ročník gymnázií.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha.

Sír, Z. (2011). *Řecké matematické texty.* 1. vydání. Oikoymenh, Praha. ISBN 978-80-7298-308-7.

The British Museum. The Rhind Mathematical Papyrus. Rok pořízení muzeem 1865, Muzejní číslo: EA10058. Dostupné z: `www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10058`.

van der Waerden, B. L. (1954). *Science awakening.* P. Noordhoff, Groningen. ISBN 978-94-009-1379-0.

van der Waerden, B. L. (1983). *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Springer-Verlag, New York. ISBN 3-540-12159-5.

van der Waerden, B. L. (1985). *A History of Algebra.* Springer-Verlag. ISBN 978-3-642-51601-6.

Vondrová, N. (2019a). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice.* 1. vydání. PedF UK, Praha. ISBN 978-80-7603-109-8.

Vondrová, N. (2019b). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií.* Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, Praha. ISBN 978-80-246-4516-2.

Vygotskij, L. S. (1962). *Thought and Language.* Massachusetts Institute of Technology, Cambridge. V češtině: Vygotskij, L.S. (1970) Myšlení a řeč. Praha: SPN.

Vymazalová, H. (2006a). *Jazykové prostředky.* Jednota českých matematiků a fyziků, Praha. ISBN 80-7308-156-3. [online; cit. 4.4.2020]. Dostupné z: `https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/401071`.

Vymazalová, H. (2006b). *Rhindův matematický papyrus.* Jednota českých matematiků a fyziků, Praha. ISBN 80-7308-156-3. [online; cit. 4.4.2020]. Dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401065`.

ZELENDOVÁ, E. (2016). Metodické komentáře k oboru matematika a její aplikace. ISSN 1802-4785. [online; cit. 1.7.2021]. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/20617/METODICKE-KOMENTARE-K-OBORU-MATEMATIKA-A-JEJI-APLIKACE.html].

Seznam obrázků

1.1 Symboly diagram 6

2.1 Část Rhindova matematického papyru 18
2.2 Egyptský zápis jedné třetiny, Dostupné na: `https://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_fraction` 22
2.3 Úloha VAT 8389 z knihy Friberg (2007) 27
2.4 Základy - Kniha II, Věta 6 30
2.5 Doplnění čtverce (al-Chvárizmí, počátek 9. st., str. 146) 39
2.6 Leonardo da Pisa (Giovanni Paganucci) 43
2.7 Jedna z úloh z Fibonacciho *Liber Abaci* 46
2.8 Obrázek k řešení úlohy z patnácté kapitoly *Liber abaci*. Vlevo z originální knihy (Fibonacci, 1202b, str. 191r), vpravo z anglického překladu (Fibonacci, 1202a, str. 562). 47
2.9 Descartův zápis rovnice (Descartes, 1637, str. 6) 50
2.10 Regiomontanův zápis rovnice z knihy (Cajori, 1993, str. 95) 51
2.11 Regiomontanův zápis odmocniny z knihy (Cajori, 1993, str. 95) 51
2.12 Pacioliho zápis odmocnin z knihy (Cajori, 1993, str. 107) 52
2.13 Pacioliho zápis složené odmocniny (Cajori, 1993, str. 107) 52
2.14 Pacioliho zápis odmocňování (Cajori, 1993, str. 107) 52
2.15 Pacioliho zápis rovnice (Cajori, 1993, str. 110) 53
2.16 Cardanův zápis z knihy (Cajori, 1993, str. 118) 53
2.17 Bombelliho zápis z knihy (Cajori, 1993, str. 125) 54
2.18 Bombelliho zápis mocnin a odmocnin (O'Connor a Robertson, 2000b) 55
2.19 René Descartes (Frans Hals) 57
2.20 Zápis rovnice z (Descartes, 1637, str. 6) 59
2.21 Nákres z knihy (Descartes, 1637, str. 6) 59

3.1 Úloha z TIMSS 63
3.2 Úloha z TIMSS 63
3.3 Úloha 1 – Žákovská řešení 1, 2 70
3.4 Úloha 1 – Žákovská řešení 3, 4 70
3.5 Úloha 1 – Žákovské řešení 5 pomocí chybného předpokladu 71
3.6 Úloha 2 – Žákovské řešení 1 (sekunda) 72
3.7 Úloha 2 – Žákovské řešení 2 (sekunda) 73
3.8 Úloha 2 – Žákovské řešení 3 (kvarta) 73
3.9 Úloha 2 – Žákovské řešení 4 (sekunda) 73
3.10 Úloha 2 – Žákovské řešení 5 (tercie) 74
3.11 Úloha 2 – Žákovská řešení 6, 7 74
3.12 Úloha 3 – Žákovská řešení 1, 2 76
3.13 Úloha 3 – Žákovské řešení 3 (tercie) 76
3.14 Úloha 3 – Žákovská řešení 4,5 77
3.15 Úloha 3 – Žákovské řešení 6 (sekunda) 77
3.16 Úloha 4 – Žákovské řešení 1 (sekunda) 78
3.17 Úloha 4 – Žákovská řešení 2, 3 79

3.18 Úloha 4 – Žákovské řešení 4 (tercie) 79
3.19 Úloha 4 – Žákovské řešení 5 (sekunda) 79
3.20 Úloha 4 – Žákovská řešení 6, 7 80
3.21 Úloha 5 – Žákovské řešení 1 (sekunda) 82
3.22 Úloha 5 – Žákovské řešení 2 (tercie) 82
3.23 Úloha 5 – Žákovské řešení 3 (tercie) 82
3.24 Úloha 5 – Žákovské řešení 4 (kvarta) 83
3.25 Úloha 5 – Žákovské řešení 5 (sekunda) 83
3.26 Úloha 5 – Žákovské řešení 6 (kvarta) 84
3.27 Úloha 5 – Žákovské řešení 7 (tercie) 84
3.28 Úloha 6 – Žákovské řešení 1 (sekunda) 85
3.29 Úloha 6 – Žákovské řešení 2 (kvarta) 85
3.30 Úloha 6 – Žákovské řešení 3 (tercie) 86
3.31 Úloha 6 – Žákovské řešení 4 (kvarta) 86
3.32 Úloha 6 – Žákovské řešení 5 (kvarta) 86
3.33 Úloha 6 – Žákovské řešení 6 (kvarta) 87

Seznam tabulek

2.1 Inspirací pro tabulku byla tabulka Cosaliho uvedená v knize (Heath, 1910, str. 40), kterou jsem doplnil o zápis Diofantových znaků uvedených Heathem v téže knize. 32

3.1 Úloha 1 – četnost typů řešení ve třídách. 71
3.2 Úloha 2 – četnost typů řešení ve třídách. 75
3.3 Úloha 3 – četnost typů řešení ve třídách. 77
3.4 Úloha 4 – četnost typů řešení ve třídách. 81
3.5 Úloha 5 – četnost typů řešení ve třídách. 84
3.6 Úloha 6 – četnost typů řešení ve třídách. 87

A. Přílohy

A.1 Zadávaný test

Historické matematické úlohy

V tomto testu si zkusíte vypočítat rozličné úlohy z historie matematiky. Úlohy jsou z období dlouhého 2200 let. Začíná zhruba 1600 let před naším letopočtem a končí celkem nedávno. Nejmladší úloha je stará jenom 820 let. Uvidíte, že v dávné minulosti lidé řešily celkem podobné problémy, jaké řešíme dnes. Počítali rozlohu pole, velikost výdělku nebo rozdělovali mzdu.

První úloha je ze starověkého Egypta. (1600 let př. n. l.) Z doby pyramid a faraónů, kteří potřebovali vědět, jak velké bohatství se ukrývá v pytli. Dalšími úlohami, kteří tehdejší matematici řešili, byly úlohy o rozdělování chleba, možná jste takové potkali při výuce matematiky.

1) **Řekne-li se ti: Pytel, v němž je zlato, stříbro a cín, může být získán za 84 dukátů. Kolik prutů každého kovu je v pytli, jestliže prut zlata stojí 12 dukátů, prut stříbra 6 dukátů a cínu 3 dukáty? V pytli je od každého kovu stejně prutů. (4 díly)**

Druhá úloha je z podobného období jako úloha první. Jejími autory jsou tentokrát staří Babyloňané, kteří žili v Mezopotámii, kde pěstovali obilí.

2) **Na jednom hektaru prvního pole jsem sklidil 4 tuny obilí. Na jednom hektaru druhého pole jsem sklidil 3 tuny obilí. Sklizeň z celkové plochy prvního pole byla o 60 tun větší než z druhého pole. Celková rozloha obou polí je 50 hektarů. Jak velké je první a druhé pole?“ (30 hektary, 20 hektary)**

Další dvě úlohy pocházejí z období potomků proroka Mohameda. Konkrétně asi 800 let n. l., z doby, kdy Arabové ovládali rozsáhlé území od Indie po jih Španělska. Tehdy se většina světového vědění soustředila do Bagdádské knihovny, kde pracoval Al-Chvárizmí a ustanovil tam počátky matematického oboru, na kterém je založena většina dnešní matematiky. Tento obor se jmenuje Algebra a jeho název pochází z arabského slova al-džabr, což by se dalo přeložit jako umění převést výraz z jedné strany rovnice na stranu druhou.

3) **Rozdělil jsi deset na dvě části, potom jsi dělil jednu část druhou a jejich podíl je 4. Jak velké jsou tyto dvě části. (2,8)**

4) **Pokud tázající říká: Pracující, který má měsíční výdělek deset dukátů, pracoval šest dní. Kolik dukátů dostal, víš-li, že tento měsíc má 30 dní? (Díl zlatých ze mzdy je stejný, jako díl odpracovaného času z měsíce.) (2 zlaté)**

V následující úloze se vrátíme o zhruba 300 let zpět do tehdy řecké Alexandrie, která se dodnes nachází na severu Egypta. V ní byla známá Alexandrijská knihovna, která se dá považovat za centrum vědění tehdejšího světa. Z Alexandrie také pocházela celá řada věhlasných matematiků jako byli Eukleides, Pappos, Hérón nebo třeba Diofantos. O Diofantovi také známe následující povídku, která je zároveň zajímavou úlohou.

5) **Diofantovo dětství trvalo šestinu jeho života, za další dvanáctinu mu vyrašily vousy a za další 12 let se oženil. Za dalších pět let se mu narodil syn, jehož život byl však jen poloviční oproti životu otcovu. Po synově smrti žil Diofantes ještě 4 roky. Jak dlouho Diofantes žil? (84 let)**

Poslední text je od syna italského obchodníka, jehož pravé jméno je Leonardo Pisánský, říkalo se mu Fibonacci. Tato přezdívka pochází ze dvou latinských slov „filio Bonacci“, která znamenají syn Bonacciho. Fibonacci tím vyjadřoval příslušnost ke svému rodu. Byl to matematik, kterému se podařilo shromáždit a sepsat přehled o matematickém vědění z celého středomoří a položil tak základ, na kterém stavěla pozdější evropská matematika. Jeho dílo pochází z počátku 13. století.

6) **Lev by snědl jednu ovci za šest hodin a leopard (by ji snědl) za 8 hodin, a medvěd (by ji snědl) za 3 hodiny: Ptají se nás, pokud by jim byla vhozena jedna ovce, jak dlouho by jim trvalo, než by ji pozřeli? (1,6h)**