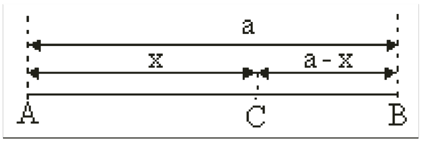
3. Zlatý řez a jeho vlastnosti

Zlatý řez je rozdělení úsečky AB na dva díly tak, že poměr větší části k menší je stejný jako poměr celé úsečky k větší části. Bod C dělí úsečku AB v poměru zlatého řezu (obr. 1).



Obr. 1

tedy platí : $\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x}$

poměr *a/x* (tedy i poměr *x/(a-x)*) nazýváme zlatým poměrem a značíme řeckým písmenem φ.

Hodnota zlatého řezu

Hodnotu zlatého řezu můžeme zjistit snadno. Vycházíme z poměru zlatého řezu

$$\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x}$$

po úpravě řešíme kvadratickou rovnici

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

celou rovnici vydělíme x^2 a dostáváme rovnici

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 - \left(\frac{a}{x}\right) - 1 = 0 \qquad (1)$$

jejíž kladný kořen je

$$\frac{a}{x} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803$$

Číslo 1,61803 je pouze přibližné, $\sqrt{5}$ je totiž iracionální číslo a proto je i zlomek $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ iracionální číslo.

Zlatý řez můžeme vyjádřit dvěma způsoby : $\frac{a}{x} = 1{,}61803$

nebo : $\frac{x}{a} = \frac{1}{0{,}61803}$

V příloze 1. uvádím číslo φ na 2000 desetinných míst.

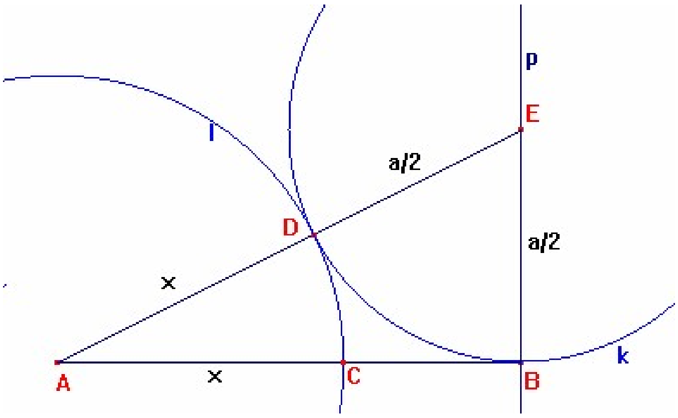
4. Konstrukce zlatého řezu

V této kapitole ukážu, jak jednoduše zlatý řez sestrojit. Uvedu zde čtyři konstrukce – v první známe úsečku *AB* a chceme najít bod *C*, který úsečku rozdělí v poměru zlatého řezu. U dalších dvou konstrukcí známe jen jeden z dílů úsečky *AB* a chceme najít celou úsečku. Poslední konstrukce ukáže, jak sestrojit zlatý řez úsečky bez rýsování, pouze pomocí skládání papíru.

Konstrukce 1

Dáno: Úsečka *AB* libovolné délky.
Úkol: Najít bod *C*, který dělí úsečku *AB* zlatým řezem.

Jde vlastně o geometrické řešení rovnice (1), v níž *a* je délka dané úsečky.



Obr. 2

1. $p; p \perp AB, B \in p$
2. $E; E \in p, |EB| = \frac{1}{2}|AB|$
3. $k; k(E, |EB|)$
4. $D; D \in k \cap AE$
5. $l; l(A, |AD|)$
6. $C; C \in l \cap AB$

Bod *C* dělí úsečku *AB* v poměru zlatého řezu. Tato konstrukce pochází od Heróna (1.st.př.n.l.) a lze ji odvodit z vyjádření zlatého poměru a Pythagorovy věty.

Důkaz:

V trojúhelníku *ABE* (obr. 2) označíme $|AB| = a, |AE| = y, |BE| = \frac{a}{2}, |AC| = |AD| = x$

Podle Pythagorovy věty potom platí:

$$y^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Z obr.2 je vidět, že $|AD| = |AC|$ a $|DE| = |BE|$, po dosazení dostaneme tuto rovnici:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Odtud úpravou

$$a^2 - ax - x^2 = 0,$$

po vydělení číslem $x \neq 0$ dostaneme následující rovnici:

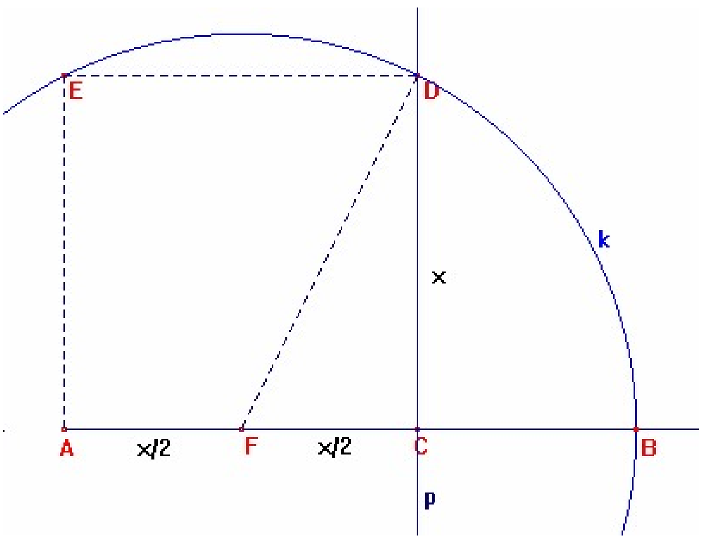
$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 - \left(\frac{a}{x}\right) - 1 = 0,$$

což je rovnice (1) pro poměr zlatého řezu, s kořenem $\frac{a}{x} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Konstrukce 2

Dáno: Úsečka AC libovolné délky.

Úkol: Najít na polopřímce AC bod B tak, aby bod C dělil úsečku AB zlatým řezem a přitom úsečka AC byla větší než BC.



1. $F; F \in \frac{1}{2}|AC|$
2. $p; p \perp AC, C \in p$
3. $D; D \in p, |CD| = |AC|$
4. $k; k(F, r = |FD|)$
5. $B; B \in k \cap AC$

Obr. 3

Důkaz:

Dělí-li bod C úsečku AB v poměru zlatého řezu, musí platit poměr $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|} = \phi$.

Zadanou úsečku AC označíme x. Z konstrukce (obr. 3) jsou zřejmé tyto rovnosti:

$$|AC| = |CD| = x$$

$$|AF| = |FC| = \frac{x}{2}$$

$$|FD| = |FB| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

Nyní ještě musíme pomocí již známých velikostí vyjádřit velikosti stran AB a CB:

$$|AB| = |AF| + |FB| = \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{5}}{2} = \frac{x\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$$

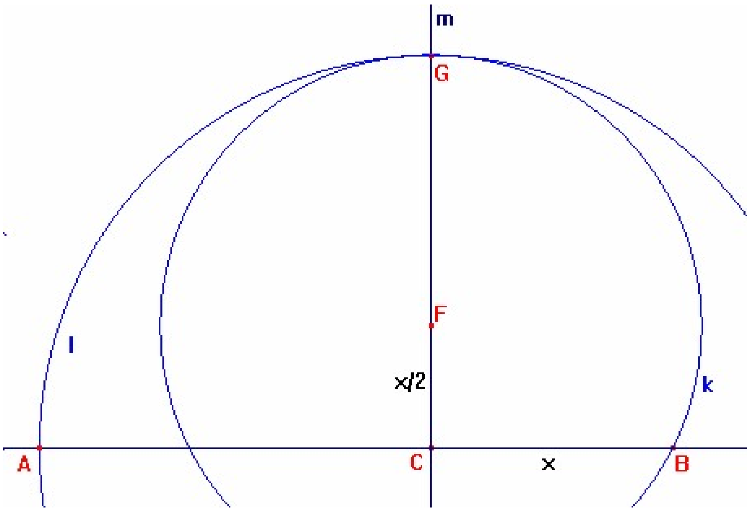
Teď už jen stačí zjistit hodnotu daných poměrů:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\frac{x\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}}{x} = \frac{x\left(\sqrt{5}+1\right)}{2x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

Konstrukce 3

Dáno: Úsečka BC libovolné délky.

Úkol: Najít na polopřímce BC bod A tak, aby bod C dělil úsečku AB zlatým řezem a přitom úsečka AC byla větší než BC.



1. $m;\ m \perp BC, C \in m$
2. $F;\ F \in m, |FC| = \frac{1}{2}|FB|$
3. $k;\ k(F, r = |FB|)$
4. $G;\ G \in k \cap CF$
5. $l;\ l(C, r = |CG|)$
6. $A;\ A \in l \cap BC$

Obr. 4

Důkaz:

Dělí-li bod C úsečku AB v poměru zlatého řezu, musí platit poměr $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|} = \phi$.

Zadanou úsečku CB označíme x. Z konstrukce (obr. 4) jsou zřejmé tyto rovnosti:

$$|FC| = \frac{x}{2}$$

$$|FB| = |FG| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

$$|CG| = |AC| = |CF| + |FG| = \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{5}}{2} = \frac{x\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$$

Nyní ještě musíme pomocí již známých velikostí vyjádřit velikost strany AB:

$$|AB| = |AC| + |BC| = \frac{x\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} + x = \frac{x\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}$$

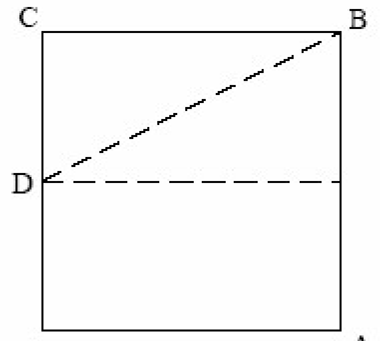
Teď už jen stačí zjistit hodnotu daných poměrů:

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{\frac{x\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}}{\frac{x\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}}=\frac{2x\left(3+\sqrt{5}\right)}{2x\left(1+\sqrt{5}\right)}=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{5}\right)}=\frac{3-2\sqrt{5}-5}{1-5}=\frac{2+2\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$$

Konstrukce 4 – konstrukce „přehýbáním papíru“

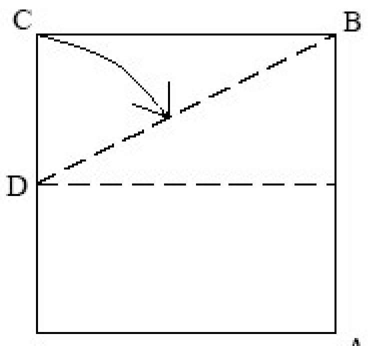
Poslední postup, jak rozdělit úsečku zlatým řezem je zajímavý tím, že k němu nepotřebujeme nic víc než kus papíru, ze kterého si na začátku vystřihneme čtverec. Za délku strany čtverce volíme velikost úsečky, kterou chceme zlatým řezem rozdělit.

Mějme tedy čtverec se stranou *AB*. Přeložíme jej napůl (vznikne obdélník) a opět rozevřeme. Střed strany protější ke straně *AB* si označíme *D*, druhý krajní bod úhlopříčky z bodu *A* si označíme *C*. Dále přehneme papír podle vyznačené přerušované čáry *BD* a opět rozložíme (obr. 5).

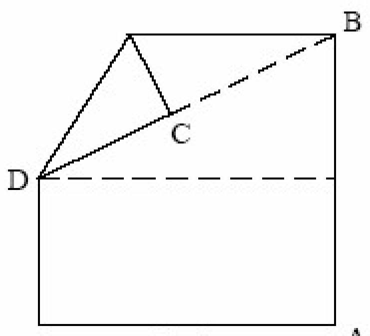


Obr.5

Teď vezmeme vrchol *C* a přiložíme jej na přehyb *BD*, tak aby úsečka *CD* byla částí úsečky *BD* a poloha bodu *D* se nezměnila (obr. 6 a 7).



Obr.6



Obr.7

Nyní přiložíme vrchol *A* opět na přehyb *BD*. Úsečka *AB* splývá s částí úsečky *BD*, poloha bodu *B* se nezměnila (obr. 8, 9).