a mechanik Archimedes byl s tímto střediskem v úzkém korespondenčním styku. Rovněž poslední matematici helénistického období Hérón a Diofantos pracovali v tomto středisku.

Nejznámější výsledky helénistické matematiky jsou tedy bezesporu spojeny s alexandrijským Múseiem. Eukleidovy *Základy*, Apolloniovy *Kuželosečky* i jeho teoretické základy Ptolemaiovy „Velké sbírky"; ale i heuristická podstata Archimedovy „kvadratury paraboly" byla vyložena v dopise alexandrijskému Erastothénovi.

Eukleidovy *Základy* se na dlouhou dobu staly vzorem deduktivně budované o systém axiomů se opírající teorie, jejíž jednotlivá tvrzení lze logicky prokazovat, vzorem, který nepůsobil jen v matematice, ale rovněž v dalších oblastech vědy. Apolloniovy *Kuželosečky* ukázaly způsob, jak do té doby jen jako řezy na kuželi známé křivky lze bodově konstruovat, přičemž je užita metoda, která v jiných společenských podmínkách 17. století dala podnět Fermatovi k vytvoření souřadnicového aparátu a prvých kroků v analytické geometrii právě na základě studia Apolloniova díla a paralelně k objevu Descartovu. Archimedes důsledně využil Eudoxových teorií a položil základy konkrétním výpočtům délek „oblých" křivek a obsahů ploch či objemů těles omezených „oblými" křivkami či plochami. Tyto myšlenky se staly v dalším vývoji základem rozvoje infinitesimálního počtu. Diofantova *Aritmetika*, zabývající se problematikou řešení rovnic, skýtala do budoucna dva podněty: především podnítila zkoumání tzv. neurčitých rovnic a vedle toho poprvé přinesla zkratkovitý záznam rovnic zavedením obecnější symboliky.

Antická axiomaticky deduktivně budovaná matematická teorie

Eukleides (* asi 365 př. n. l., † asi 280 př. n. l.)

Na počátku 3. st. př. n. l. bylo v Alexandrii Ptolemaiem I. Soterem založeno Múseion a v něm se stal Eukleides vůdčí osobností. Múseion — stánek mús — středisko vědy shromažďující významné učence všech oborů mělo svou hvězdárnu, botanickou a zoologickou zahradu, pitevnu a proslulou knihovnu. Eukleides sem pravděpodobně přišel už se svými *Základy*, které v deduktivně budovaném, systematickém celku spojily a transformovaly starší teoretické matematické výsledky a staly se od té doby na dvě tisíciletí vzorem budování vědecké teorie. Originál *Základů* se nedochoval, nejstarší rukopis je z 9. st. a chová ho Vatikánská knihovna, řada

opisů komentátory různým způsobem přetvořených přispěla k jeho uchování.

O Eukleidovi je známo, že se zabýval i jinými oblastmi geometrie (např. kuželosečkami), též muzikou (tj. kvantitativním zkoumáním hudby), optikou i astronomií ale z jeho díla se zachovalo velice málo. Novější překlady jeho *Základů* do moderních jazyků vycházejí z Heibergovy a Mengeho řecko-latinské edice Euclidis opera omnia, I (1883)–VIII (1916). Český překlad Eukleidových *Základů* vydal v r. 1907 F. Servít. O Eukleidovi píše např. P. Schreiber (*Euklid*, Leipzig 1987).

Základy (řecky „Stoicheja“, latinsky „Elementa“) vznikly asi již před příchodem jejich autora Eukleida do alexandrijského Múseia, a i když se v nich podařilo shrnout do jednoho proudu výkladu tehdy nejnovější matematické teorie jako byla Theaitetova „teorie iracionalit“ nebo Eudoxova „teorie proporcí“, netvořily encyklopedii tehdejší matematiky; dokonce ani Eukleides do nich nezahrnoval všechny své výsledky z matematiky (mezi které patřila mj. jeho vlastní nedochovaná teorie kuželoseček).

Eukleidův traktát se zřejmě opíral o tehdy známé spisy, ale zahrnul do sebe i teorie v té době nedávno nové. „Stoicheia“, i když mohla mít vzor v nedochovaných spisech stejného názvu, jejichž autory byli Hippokrates z Chiu (? 440 př. n. l.) či blíže neznámý Leon (? 370 př. n. l.) či Theodosios z Magnesie (? 340 př. n. l.), jsou však prvým známým zachovaným matematickým dílem, opírajícím se o eudoxovskou koncepci čísla na rozdíl od pythagorejských „mathémat“ (tj. nauk). Při vytváření struktury výkladu Eukleidova díla hrály bezesporu důležitou roli Sokratovy úvahy o „definici“ a snad jen o dvě desetiletí starší Aristotelova formulace zásad logiky, jak se objevila v jeho „Prvních analytikách“.

Už sám název „stoicheia“, který může být překládán jako základy, ale také jako „řazení“ či „uspořádání“ základních znalostí, ukazuje, v čem je pojetí Eukleidova traktátu nové. Jaké jsou tyto nové prvky výkladu?

Výklad začíná *definicemi.* Na rozdíl od dnes nominativních definic jsou Eukleidovy definice genetické, popisné, snaží se charakterizovat objekty, které v dalším výkladu budou použity na základě popisu jejich vlastností a jejich vytváření z objektů jednodušších. Některé vlastnosti a pojmy však takovýmto způsobem definovat nemohou a přijímají je bez vymezení intuitivně.

Příklady definic:

D1. Bod je to, co nemá dílu.

D2. Čára pak délka bez šířky.

D4. Přímá je čára, která svými body se táhne rovně.

D5. Plocha je to, co jen délku a šířku má.
D23. Rovnoběžky jsou přímky, které prodlouženy jsouce na obě strany do nekonečna, nikde se nesbíhají.

Současně se v souboru definic objevují pojmy a vztahy, které by měly být zařazovány do systému axiomů či postulátů. Nutno však vidět, že v Eukleidově díle se tyto formy základů matematické teorie teprve tvoří, že pro dlouhou dobu předběhly další vývoj matematiky a že matematika byla schopna zpřesnit přístup ke svým logickým základům teprve v situaci, kdy bylo nezbytné po rozsáhlém extenzivním rozvoji znovu uspořádat, vyjasnit a zpřesnit celé základy matematiky a k tomu došlo až ke konci 19. a na počátku 20. století.

Zatímco téměř každá kniha *Základů* začíná definicemi, pouze před prvou knihou jsou uvedeny axiomy a postuláty. *Axiomy* (tj. zásady) jsou spíše aritmetického charakteru a vymezují vlastnosti veličin, s kterými se v *Základech* pracuje. Veličinou se zde rozumí jak racionální čísla, tak také geometrické úsečky a jejich poměry, které zahrnují širší oblast kvantitativních vztahů.

Z axiomů uveďme např.:
A1. Veličiny témuž rovné i navzájem rovné jsou.
A2. Když se přidají veličiny rovné k rovným, i celky rovny jsou.
A6. A co se navzájem kryje, navzájem rovno jest.
A7. A celek je větší než díl.

Postuláty (tj. požadavky) jsou vlastně fixací předpokladů geometrické konstruovatelnosti objektů. Jsou to vymezení těch geometrických konstrukcí, kterým se posléze začalo říkat „eukleidovské konstrukce“, čímž se rozumělo omezení geometrických prostředků pouze na konstrukce pomocí kružítka a pravítka. Takové vymezení geometrické konstrukce vylučovalo z matematických úvah v eukleidovském pojetí mnohé útvary či řešení, o nichž už jsme slyšeli a kde bylo např. používáno kinematických metod.

P1. Dvěma body lze položit přímku.
(Prvý postulát zaručuje možnost narýsování úsečky.)
P2. Přímku omezenou lze nepřetržitě rovně prodloužit.
(Druhý postulát zdůrazňuje délkovou neomezenost konstrukce zaručené P1, tj. „délkově neomezené pravítko“.)

P3. Z jakéhokoliv středu a jakýmkoliv poloměrem lze narýsovat kružnici.
(Třetí postulát zaručuje konstrukci kružítkem libovolného rozevření.)

P4. Všechny pravé úhly jsou rovné.
(Čtvrtý postulát stejně jako šestý axiom tvoří spojovací článek mezi geometrickým útvarem a jeho kvantitativním ukazatelem (velikostí).)

P5. Když přímka protínající dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní úhly menší dvou pravých, pak ty přímky prodlouženy jsouce do nekonečna se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.
(Poslední pátý postulát zaručuje vlastně konstrukci nejjednoduššího rovinného útvaru trojúhelníka.)

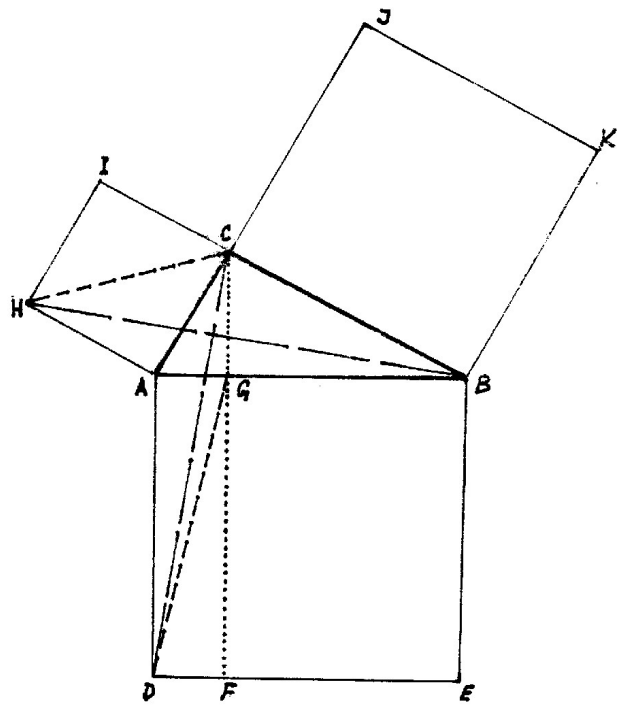
Přitom právě složitost formulace P5 vedla už záhy v antice ke kritice jeho zařazení mezi jednoduchá tvrzení axiomatického systému. Jeho formulace navozuje okamžitě souvislost s vymezením rovnoběžek (D23). Snaha o jeho nahrazení vedla zároveň k jinému vymezení rovnoběžek a zde byl základ dva tisíce let trvajícího úsilí o vybudování „jiné“ teorie rovnoběžek, či o dokázání pátého postulátu z ostatního axiomatického základu. Tyto snahy vedly v 19. století k vytvoření neeukleidovských geometrií a spolu s tím též ke zpřesnění axiomatického systému základů geometrie.

Uspořádání výkladů v každé knize *Základů* se snaží postupovat od jednodušších pojmů (tvrzení, vět) ke složitějším. To vidíme už na řazení definic, ale zejména pak na posloupnosti tvrzení, která jsou dokazována (či vyvozována) z toho, co bylo buď postulováno nebo už z postulovaného prokázáno.

Tento způsob vedení výkladu vědecké teorie, její logické — podle tehdejších kritérií — bezesporné konstrukce, se stal vzorem „vědeckosti“ nejen pro výklad dalších partií matematiky, ale i ostatních partií vědění. „Vyloženo geometricky“ dlouho znamenalo vyloženo způsobem analogickým metodě výkladu Eukleidových *Základů*. Všimneme-li si z tohoto hlediska třeba prvé knihy *Základů*, tak vidíme, že obsahuje

- základní konstrukce trojúhelníka
- věty o shodnosti trojúhelníků

– přeměny rovnoběžníků na trojúhelníky stejného obsahu
– na základě takto zkonstruovaných a prokázaných vztahů je na závěr prvé knihy dokázána platnost Pythagorovy věty



(47) Důkaz Pythagorovy věty

$CAD \equiv HAB$ a zároveň $CAD = GAD$ (stejná základna AD a stejná výška AG). Obdobně $HAB = CHA$ a tedy i $CHA = GAD$. Z čehož vyplývá že i $ACHI = GADF$ (což je vlastně obsah Eukleidovy věty). Totéž platí i mezi $GBEF = JCBK$ a tedy součet čtverců nad odvěsnami ($\square ACHI + \square CBKJ$) je roven čtverci nad přeponou ($\square ABED$) pravoúhlého trojúhelníka ABC.

Celé *Základy* tvoří třináct knih. Knihy 14. a 15., které jsou k Eukleidovým *Základům* připojovány, pocházejí z pozdější doby (z 2. st. př. n. l. a z 6.st. n. l. a jejich autorství se připisuje Hypsiklovi a (?) Damaskiovi). Z přehledu také vidíme, z jakých

pramenů *Základy* vznikaly. Eukleidova zásluha pak je především v uspořádání znalostí zde obsažených a možná i v jejich úpravě do jednotného celku a rozhodně podřízení obsahu jednotné metodě výkladu. Podle počtu v knihách obsažených „tvrzení“ („vět“) lze také nabýt představy o rozsahu jednotlivých částí *Základů*.

Eukleidovy *Základy* nejsou encyklopedií staré antické matematiky. Dokonce ani některé vlastní Eukleidovy výsledky do této práce nejsou zařazeny. Jsou však důležitým pokusem o budování výstavby celé matematiky a v tomto směru se nejen udržely až do počátku 19. století jako součást systému výkladu matematiky, ale platily rovněž za vzor axiomaticky deduktivně budované teorie i pro jiné vědní oblasti. Jeden z prvých pokusů o aplikaci této metody lze nalézt např. v Archimedově teorii páky.

Eukleidovy Základy*) Tématický obsah

KNIHA	OBSAH	ROZSAH	PŮVOD
1	Rovinná geometrie	48 vět	Ionské období
2	Elementární geometrická algebra	14 vět	a
3	O kruhu	37 vět	Pythagorejci
4	Mnohoúhelníky opsané či vepsané kružnici	16 vět	6.–5. století př. n. l.
5	Rozšíření veličin o proporce	24 vět	Eudoxos
6	Užití 5. knihy na rovinnou geometrii	33 vět	pol.4. st. př. n. l.
7	Teorie čísel. Dělitelnost, prvočísla	39 vět	Pythagorejci
8	Teorie čísel. Figurální čísla, posloupnosti	27 vět	Pythagorejci
9	Teorie čísel. Učení o sudém a lichém	36 vět	Pythagorejci
10	Kvadratické iracionality	117 vět	Theaitetos 1. pol. 4. st. př. n. l.
11	Elementární stereometrie	39 vět	Iónské obd. Pythagorejci
12	Exhaustivní metoda, počítání objemů (jehlan, kužel, koule)	18 vět	Eudoxos
13	Pravidelné mnohostěny	19 vět	Theaitetos

* Nejstarší dnes známé zlomky textu *Základů* tvoří šest střepů s texty a obrazci z 2. pol. 3. st. př. n. l. (nalezeno v Egyptě r. 1906-8). Obsahují co do smyslu (ne co do textu) 10. a 16. větu z 13. knihy. Z doby před 4. st. n. l. se dochovalo asi 120 řádek textu *Základů*. Ve 4. st. učinil redakci *Základů* Teon z Alexandrie, o jeho verzi se opírala většina vydání Eukleida do 19. st. 1908 F. Peyrard nalezl mezi Napoleonovými vojsky ve Vatikáně ukořistěnými materiály řecký kodex, obsahující Eukleidovy *Základy*, vzniklý mimo Teonovu tradici. Je to tzv. Codex Vat. Graec. 190 dnes opět ve vatikánské knihovně. To byl také hlavní pramen Heibergovy řecko-latinské edice Eukleidových *Základů*, edice, která se stala východiskem pro všechna vydání Eukleidových *Základů* v národních jazycích.