Katolícka univerzita v Ružomberku

Pedagogická fakulta

Rovinná geometria v starej Mezopotámii

Miroslava Kyrczová

História matematiky

h. Doc. RNDr. Štefan Tkačik, PhD.

1.5.2009

V tejto práci sa pokúsime objasniť algoritmy, ktoré používali Mezopotámski matematici pri riešení geometrických úloh. Mezopotámskou kultúrou sa nazýva kultúra starovekej Mezopotámie, územie ležiace medzi riekami Eufrat a Tigris. Výsledky mezopotámskej matematiky poznáme lepšie ako matematiku egyptskú. Predovšetkým je to vďaka veľkému počtu hlinených tabuliek, do ktorých klinopisom zaznačovali svoje myšlienky.

Mezopotámske geometrické úlohy, ktoré sa nám zachovali, pochádzajú vo väčšine prípadov zo Starobabylonskej ríše, t. j. z obdobia 19. až 17. storočia p. n. l. a z obdobia vlády Seleukovcov, t. j. 3. až 1. storočie p. n. l. Najčastejšie vychádzajú z potrieb zememeračstva, stavebníctva a obchodu. Niektoré však nesúvisia s praktickými potrebami, lebo sú v nich zadané veličiny, ktoré sa v praxi skôr hľadajú a často sú udávané vo veľmi nevhodných jednotkách. Takéto úlohy boli zostavené pre pedagogické účely.

Štvorec a obdĺžnik

Obsah štvorca a obdĺžnika počítali mezopotámski počtári už od najstarších období. Tieto výpočty sú už na tabuľkách zo Starobabylonskej ríše a v našej súčasnej symbolike ich môžeme vyjadriť známym vzorcom $S = a^2 \quad resp. \quad S = a.b$, kde a je dĺžka strany štvorca a a,b sú dĺžky strán obdĺžnika. Mezopotámski matematici počítali pomerne jednoduché úlohy na obsahy štvorca a obdĺžnika, ktoré sa snažili komplikovať prevodom plošných jednotiek. Pri obdĺžniku hovorili o šírke a dĺžke, šírka je pritom vždy menšia ako dĺžka.

Trojuholník

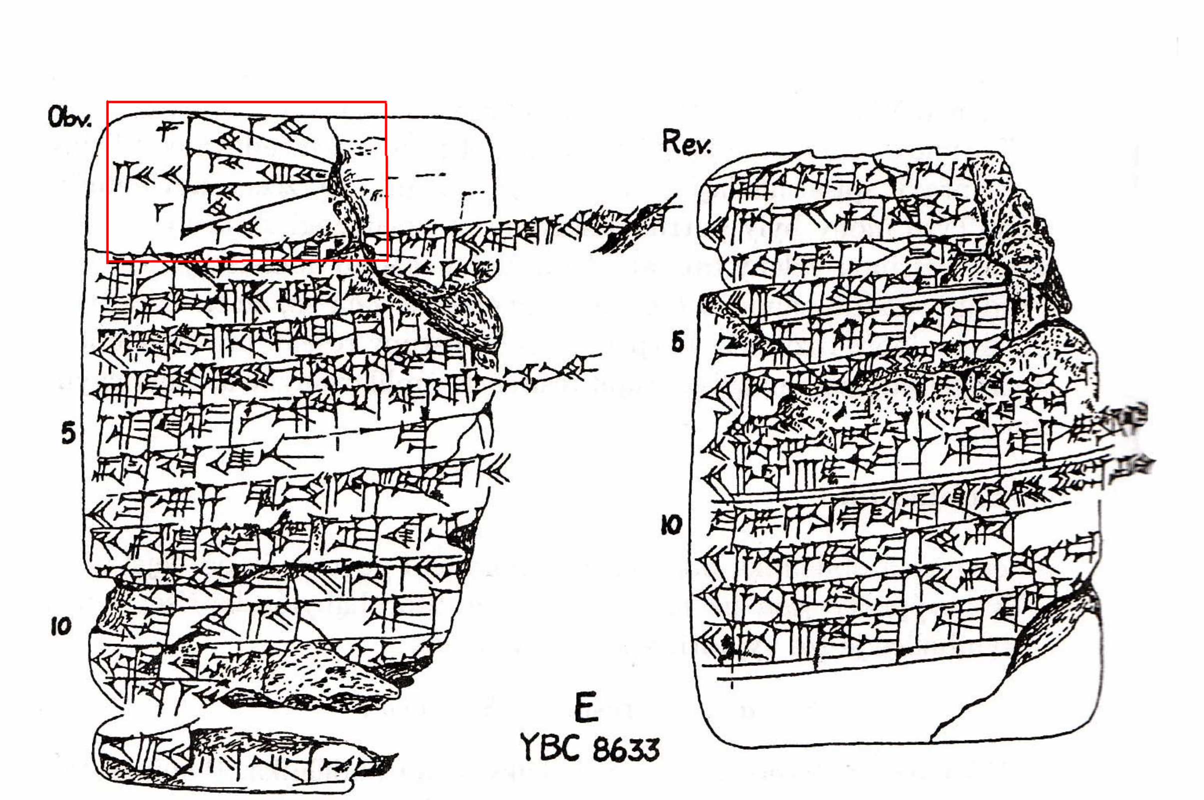
Na viacerých mezopotámskych tabuľkách sa vyskytli úlohy, v ktorých sa počíta obsah trojuholníka. Obvykle je zadaná základňa a a rameno r rovnoramenného trojuholníka alebo obidve odvesny a,b pravouhlého trojuholníka. Na výpočet obsahov trojuholníkov používali mezopotámski matematici nasledovné vzorce:

Obsah rovnoramenného trojuholníka je počítaný približne podľa vzorca: $S = \frac{1}{2}.a.r$

Obsah pravouhlého trojuholníka je počítaný presne podľa vzorca: $S = \frac{1}{2}.a.b$

V zadaniach niektorých príkladov nie je jasné, či je zadaná výška alebo dĺžka ramena trojuholníka, a preto je niekedy ťažké rozhodnúť, či je výpočet presný alebo iba približný. Ďalšia nejasnosť vyplýva z toho, že niekedy nie je jasné o aký druh trojuholníka sa jedná a táto informácia sa musí vyvodiť iba z kontextu.

Na obrázku je starobabylonská tabuľka na ktorej je príklad na výpočet obsahu trojuholníka doplnený zaujímavým obrázkom.



Preklad zadania príkladu:

Trojuholník. (1,40) dĺžka každej z dvoch strán, (2,20) šírka. Aká je plocha?

Preklad riešenia príkladu:

Ako pre teba od (2,20) šírka, ktorá […] odpočítaj 20 […] šírka trojuholníka […].

A potom rozpoľ (2,0), ktoré ti zostalo, výsledok je (1,0).

(1,0) je šírka jedného trojuholníka a (1,0) je šírka druhého trojuholníka. Aká je druhá dĺžka?

Násob (20), maksarum, (4) a výsledok je (1,20). (1,20) je druhá dĺžka.

Potom rozpoľ (1,0), šírka trojuholníka, a násob výsledok (30). (1,20) druhá dĺžka; výsledok (40,0) je plocha prvého trojuholníka.

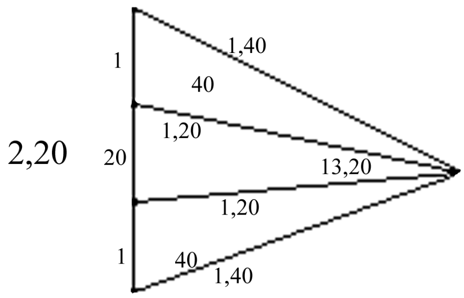
Rozpoľ (20), šírka trojuholníka, a násob výsledok (10). (1,20) je druhá dĺžka trojuholníka; výsledok (13,20) je plocha druhého trojuholníka.

Rozpoľ (1,0), šírka trojuholníka, a násob výsledok (30). (1,20) je druhá dĺžka; výsledok (40,0) je plocha tretieho trojuholníka.

(1,33,20) je správna plocha[…]

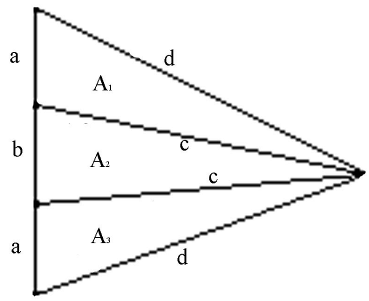
Nasledujúci obrázok 1 je prekreslením náčrtu, ktorý je vyrytý na tabuľke:

Obr.1



Aby sa nám lepšie ukázalo riešenie, ktoré mezopotámski matematici použili, prekreslíme si obrázok nasledovne:

Obr. 2



Zo zadania príkladu vieme, že je dané $d = (1,40)$ a $2a + b = (2,20) = 140$. Na tabuľke je najprv vypočítané $a = (1,0) = 60$ a $b = (20) = 20$. Ďalšia časť tabuľky je poškodená, a preto nevieme ako vypočítali $c = (1,20) = 80$. Obsahy jednotlivých trojuholníkov sú vypočítané ako:

$$A_1 = \frac{1}{2}.60.80 = 2400 = (40,0)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}.20.80 = 800 = (13,20)$$

$$A_3 = \frac{1}{2}.60.80 = 2400 = (40,0)$$

Obsah veľkého trojuholníka je súčtom jednotlivých trojuholníkov:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 5600 = (1,33,20)$$

Poznámka:

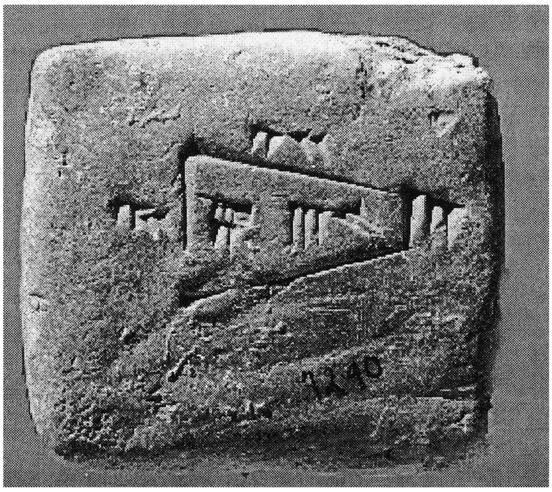
Tvary jednotlivých trojuholníkov na tabuľke nezodpovedajú uvedeným hodnotám. Obrázok sa skladá z dvoch zhodných pravouhlých trojuholníkov a jedného rovnoramenného trojuholníka. Pri tejto interpretácií je obsah A_1, A_3 presný a obsah trojuholníka A_2 je približný. Skutočný výsledok obsahu A_2 je menší, lebo c je strana a nie výška vnútorného trojuholníka. K veľkej chybe však nedošlo, lebo rameno má veľkosť 80 a výška 79,37.

Mezopotámski matematici počítali aj zložitejšie príklady. V niektorých bolo treba rozdeliť trojuholník úsečkou rovnobežnou so základňou, resp. úsečkami rovnobežnými so základňou na dve, resp. viac častí, t.j. na podobný trojuholník a lichobežník, resp. podobný trojuholník a niekoľko lichobežníkov. Popritom mali byť splnené určité podmienky, napr. rovnosť obsahov častí, daný pomer obsahu, daný pomer výšok jednotlivých útvarov a pod.

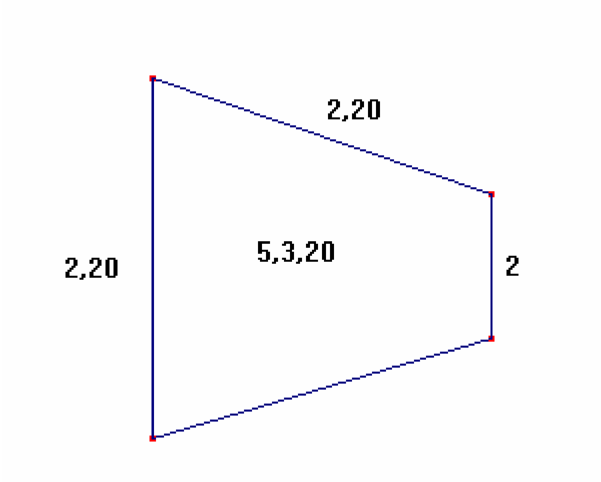
Lichobežník

Rovnoramenný lichobežník patril medzi najobľúbenejšie útvary mezopotámskych matematikov, čo potvrdzuje veľký počet úloh, pri ktorých sa počíta obsah lichobežníka alebo sa lichobežník delí na niekoľko častí s určitými vlastnosťami. Na obrázku 3 je nakreslený lichobežník a na obrázku 4 je lichobežník z obrázku 3 prekreslený aj so zodpovedajúcimi stranami.

Obr.3



Obr.4



Mezopotámski matematici používali k výpočtu obsahu lichobežníka algoritmus, ktorý je možné v našej symbolike zapísať nasledujúcim vzorcom:

$$S = \frac{1}{2}.(a+b).s$$

a, b – dĺžky základni

b – dĺžka ramena

Po dosadení čísel zo zadania dostávame nasledujúci výsledok:

$$S = \frac{(140+120).140}{2} = 18200$$

Vzhľadom na súčasne matematické poznatky vieme, že vzorec, ktorým mezopotámski matematici počítali obsah lichobežníka nie je správny, a teda ani výsledok nemôže byť správny. Podľa správneho vzťahu vypočítame obsah lichobežníka z príkladu nasledovne:

$$S = 130.\sqrt{140^2 - 10^2} = 18153{,}5$$

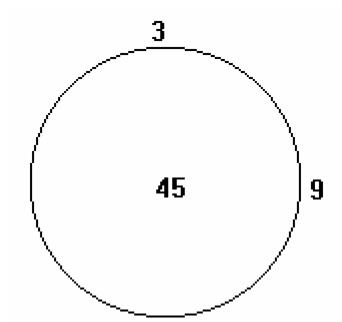
Chyba, ktorú mezopotámsky matematik urobil je vzhľadom ku zvolenému zadaniu iba 0,26%. Dnes je ťažké odhadnúť, či si mezopotámski matematici chybu uvedomovali alebo či nebola vlastne zadaná výška.

Mezopotámski matematici počítali veľa príkladov, pri ktorých bol lichobežník delený rovnobežkou (rovnobežkami) so základňou na dva lichobežníky (viac lichobežníkov) podľa vopred stanovených podmienok (zhodný obsah dielov, daný pomer výšok alebo základni, dané výšky, ramena atď.)

Kruh, kružnica

Na obrázku 5 je jedna z najstarších mezopotámskych tabuliek vzťahujúcich sa ku geometrii. Je to kruhová tabuľka, ktorej priemer je cca 8 cm. Nie je na nej žiadny text, ale iba obrázok kružnice a tri čísla. Nad kružnicou je napísané číslo 3, vpravo číslo 9 a vo vnútri číslo 45.

Obr.5



Pravdepodobná interpretácia z tabuľky (Obr. 5) je nasledovná: (0,45) je obsah kruhu, (3) je obvod a (9) je druhá mocnina obvodu.

Na výpočet obsahu kruhu bol používaný nasledovný algoritmus, ktorý môžeme zapísať v dnešnej symbolike nasledovne:

$$S = \frac{1}{12}o^2 \text{, kde } o \text{ je obvod kruhu}$$

Po dosadení hodnôt z príkladu dostávame nasledovné:

$$S = \frac{1}{12}.3^2 = (0,5)x(9) = (0,45)$$

Nie je ťažké zistiť, že „mezopotámska hodnota čísla π sa pri tomto výpočte rovná číslu 3. Oveľa ťažšie je však zistiť, aký význam tabuľka mala, čo bolo na nej zadané a čo bolo treba vypočítať.

Mezopotámska matematika obvykle pracovala s hodnotou $\pi = 3$. Dokonca sa z tabuľky z konca starobabylonského obdobia, ktorá bola objavená v roku 1936 podarilo zistiť, že Mezopotámčania použili aj aproximáciu $\pi = 3\frac{1}{8}$.

Obvod kružnice bol počítaný podľa algoritmu, ktorý môžeme pomocou dnešnej symboliky vyjadriť nasledovne:

$$O = \pi.d, \text{ kde } d \text{ je priemer kružnice a hodnota } \pi = 3$$

Použitá literatúra:

BEČVÁŘ, J. a kol.: *Matematika ve Starověku: Egypt a Mezopotámie.* Praha: Prometheus, 2003, s. 313-328.

GRIGORJEVIČ, A.: *Významné matematické úlohy.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989, s. 24 – 34.

ZNÁM,Š. a kol.: *Pohľad do dejín matematiky:* Bratislava: Alfa, 1986, s.19 - 22.