Obsah a obvod pravidelného n-uholníka v okolo kruhu s polomerom $r = 1$

Vzorec pre obsah pravidelného n-uholníka vpísaného do kruhu s polomerom $r = 1$.

1 Obsah pravidelného n-uholníka

Pravidelný n-uholník môžeme rozdeliť na n rovnakých rovnoramenných trojuholníkov, ktorých:

- základňa je strana a_n n-uholníka,
- ramená sú polomery kruhu, teda dĺžky 1,
- vrcholový uhol každého trojuholníka je $\frac{2\pi}{n}$.

Obsah jedného takého trojuholníka je:

$$A_{\text{troj}} = \frac{1}{2} \cdot \text{základňa} \cdot \text{výška}$$

Strana a_n je:

$$a_n = 2\sin\frac{\pi}{n}$$

Výška trojuholníka je zhodná s kolmou vzdialenosťou stredu kruhu od stredu tejto strany, čo je:

$$\cos\frac{\pi}{n}$$

Takže obsah jedného trojuholníka je:

$$A_{\text{troj}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sin\frac{\pi}{n} \cdot \cos\frac{\pi}{n}$$

Použitím identity:

$$2\sin x\cos x = \sin 2x$$

dostávame:

$$A_{\text{troj}} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

A keďže máme n takých trojuholníkov, celkový obsah n-uholníka je:

$$A_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

2 Obvod pravidelného n-uholníka

Obvod n-uholníka je jednoducho súčet jeho strán:

$$O_n = n \cdot a_n = n \cdot 2\sin\frac{\pi}{n}$$

$$O_n = 2n\sin\frac{\pi}{n}$$

Pomer obsahu k obvodu

$$\frac{A_n}{O_n} = \frac{\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}}{2n\sin\frac{\pi}{n}}$$

Po úprave:

$$\frac{A_n}{O_n} = \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}}$$

Limitné správanie pre $n \to \infty$

Použijeme aproximácie:

$$\sin\frac{2\pi}{n} \approx \frac{2\pi}{n}, \quad \sin\frac{\pi}{n} \approx \frac{\pi}{n}$$

$$\frac{A_n}{O_n} \approx \frac{\frac{2\pi}{n}}{4\cdot\frac{\pi}{n}} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

Preto v limite platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{O_n} = \frac{1}{2}$$

Záver

Správny vzorec pre pomer obsahu a obvodu pravidelného n-uholníka je:

$$\frac{A_n}{O_n} = \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}}$$

a pre veľké n sa blíži k **$1/2$**, čo je očakávané, keďže pre kruh platí pomer $\frac{r}{2} = \frac{1}{2}$.

Obvod pravidelného n-uholníka opísaného okolo kruhu s polomerom $r = 1$

Opísaný pravidelný n-uholník znamená, že jeho strany sa dotýkajú kruhu s polomerom $r = 1$ zvnútra (tangenciálne).

3 Dĺžka strany opísaného n-uholníka

Každá strana opísaného n-uholníka je dotyčnicou ku kruhu v jednom bode. **Vrcholy tohto n-uholníka ležia na kružnici s väčším polomerom** R (t.j. polomer kruhu, v ktorom je n-uholník opísaný).

Polomer opísanej kružnice R je pre pravidelný n-uholník dotýkajúci sa kruhu s polomerom $r = 1$:

$$R = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}$$

Teda vrcholy opísaného n-uholníka ležia na kružnici s polomerom R, takže dĺžka strany b_n je:

$$b_n = 2R\sin\frac{\pi}{n}$$

$$b_n = 2\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\sin\frac{\pi}{n}$$

$$b_n = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}$$

4 Obvod opísaného n-uholníka

Obvod O_n^{opis} je súčet všetkých n strán:

$$O_n^{\text{opis}} = n\cdot b_n$$

$$O_n^{\text{opis}} = n\cdot\frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}$$

Limitné správanie pre $n \to \infty$

Pre veľké n použijeme aproximácie:

$$\sin\frac{\pi}{n} \approx \frac{\pi}{n}, \quad \cos\frac{\pi}{n} \approx 1$$

Teda

$$O_n^{\text{opis}} \approx n\cdot\frac{2\cdot\frac{\pi}{n}}{1} = 2\pi$$

čo je presne **obvod kruhu s polomerom** 1.

Záver

Presný vzorec pre obvod pravidelného n-uholníka **opísaného** okolo kruhu s polomerom $r = 1$ je:

$$O_n^{\text{opis}} = \frac{2n\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}$$

A pre veľké n sa obvod opísaného n-uholníka blíži k 2π, čo je obvod kruhu.