UNIVERZITA MATEJA BELA V BANSKEJ BYSTRICI

FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

MULTIMEDIÁLNE PROSTREDIE AKO MOTIVAČNÝ NÁSTROJ V UČIVE GEOMETRIE TROJUHOLNÍKA NA ZÁKLADNEJ ŠKOLE

Dizertačná práca

16bc4f6b-bf0f-4c2e-a5c2-ebea4bf2657a

Študijný program: Teória vyučovania matematiky

Študijný odbor: číslo Teória vyučovania matematiky

Pracovisko: Katedra matematiky FPV UMB

Školiteľ dizertačnej práce: prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc.

Stupeň odbornej kvalifikácie: doktor (PhD.)

Dátum odovzdania práce: rrrr-mm-dd

Dátum obhajoby: rrrr-mm-dd

Banská Bystrica 2019 **Mgr. Veronika NOVÁKOVÁ**

Abstrakt

NOVÁKOVÁ, Veronika: Multimediálne prostredie ako motivačný nástroj v učive geometrie trojuholníka na základnej škole [Dizertačná práca]. Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici. Fakulta prírodných vied, Katedra matematiky. Vedúci práce: prof. Pavol Hanzel, CSc. Stupeň odbornej kvalifikácie: doktor – PhD. Banská Bystrica: FPV UMB, 20xx. Xxx strán

Text ....

Kľúčové slová: ....

Abstract

NOVÁKOVÁ, Veronika: Multimediálne prostredie ako motivačný nástroj v učive geometrie trojuholníka na základnej škole [Dizertačná práca]. Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici. Fakulta prírodných vied, Katedra matematiky. Vedúci práce: prof. Pavol Hanzel, CSc. Stupeň odbornej kvalifikácie: doktor – PhD. Banská Bystrica: FPV UMB, 20xx. Xxx strán

Text ....

Key words: ....

Predhovor

Text ...

Čestné vyhlásenie

Text ...

Obsah

ÚVOD

Moderná škola tretieho tisícročia si kladie za cieľ, aby žiaci, ktorí dokončili základné vzdelávanie, úspešne zvládali rodný jazyk, cudzí jazyk a jazyk prírody, teda matematiku. Matematika, ako náuka o číselných, kvantitatívnych a priestorových vzťahoch, patriaca medzi najstaršie prírodné vedy, má veľmi špecifické postavenie, pretože umožňuje kvantifikáciu javov a presné vyjadrenie vzťahov medzi nimi. Taktiež zasahuje do humanitných vied, do umenia a takmer do všetkých oblastí života spoločnosti, takže sa s rozličnými oblasťami matematiky stretávame v hospodárstve, ale aj v domácnostiach. Preto sa matematická príprava všetkých členov spoločnosti ukazuje ako nevyhnutná; začína už predškolským vzdelávaním a cez základné a stredné školstvo pokračuje až na školy vysoké.

Významné miesto medzi odbormi matematiky náleží geometrii, ktorá sa zaoberá vlastnosťami a vzťahmi rovinných a priestorových útvarov. Elementárne znalosti geometrie, získané v priebehu primárneho vzdelávania žiaci ďalej rozvíjajú na základných školách, kde sú jednotlivé tematické celky venované geometrii vyučované v rámci predmetu Matematika.

Táto dizertačná práca je zameraná na výučbu učiva trojuholníkov na základných školách v Českej a Slovenskej republike. Jej cieľom je charakterizovať uvedenú problematiku v jej komplexnosti, nadväzne vytvoriť vyučovací elektronický kurz a overiť jeho edukačnú efektivitu metódami pedagogického výskumu. Dizertačná práca je rozčlenená do siedmych, obsahovo na seba nadväzujúcich častí, vrátane predhovoru a záveru. Súčasťou práce je tiež zoznam *skratiek, obrázkov, grafov, tabuliek, bibliografických odkazov a príloh, a taktiež aj samostatné prílohy*.

V nadväznosti na charakteristiku súčasného stavu riešenej problematiky, zahrňujúcej v rámci prvej kapitoly aj komparáciu rozsahu a obsahu výučby v obidvoch štátoch, sú v druhej kapitole špecifikované ciele práce a v tretej kapitole zvolené metódy spracovania. Ťažiskom práce je štvrtá kapitola, venovaná metodickým usmerneniam pri práci s elektronickým kurzom s appletmi, ktoré boli vytvorené v dynamickom geometrickom softvéri GeoGebra a následne vložené do webového prostredia Moodle. Vytvorený elektronický kurz, umožňujúci žiakom dynamickú prácu s trojuholníkmi, mohol byť žiakmi využívaný nielen pri vyučovaní, ale vďaka internetu prakticky kdekoľvek a kedykoľvek (doma, na chate, v knižnici atď.). Piata kapitola je venovaná organizácii, uskutočneniu a vyhodnoteniu pedagogického výskumu, ktorého cieľom bolo zistenie a vyhodnotenie vybraných faktorov vzťahujúcich sa k preberanému učivu, hlavne zmeny efektivity výučby pri používaní elektronického kurzu. Nástrojmi výskumu, ktorý po obsahovej a formálnej stránke nadviazal na poznatky z predvýskumnej fázy, boli pribežne prebiehajúce pedagogické pozorovanie, dotazníková metóda a pedagogický experiment, v ktorého rámci boli porovnávané, analyzované a interpretované výsledky vyučovania v experimentálnej a kontrolnej skupine.

V závere dizertačnej práce sú zhrnuté získané poznatky a uvedené odporúčania pre ďalší postup pri výskume tejto problematiky. Niektoré poznatky z riešenej problematiky boli autorkou v priebehu doktorandského štúdia publikované v odborných a vedeckých časopisoch a tiež v zborníkoch z medzinárodných konferencií.

1 SÚČASNÝ STAV PROBLEMATIKY

Deti v dnešnej dobe veľakrát ovládajú informačné a komunikačné technológie (IKT) lepšie ako dospelí. Mobilné telefóny, notebooky, tablety a iné zariadenia vnímajú ako samozrejmú súčasť ich existencie. Prostredníctvom IKT bežne medzi sebou komunikujú, poznávajú nové veci a vyjadrujú svoje názory.

IKT nás obklopujú a ovplyvňujú tak, že by sme si bez nich už ani nevedeli svoj život predstaviť. Prenikli do každodenných rutinných činností, napr. zisťovanie cestovných poriadkov dopravných prostriedkov, kupovanie cestovných lístkov v MHD a na železnici, objednávanie stravy na školách, športovanie a pod.

Pre žiakov a študentov je používanie IKT vo vzdelávaní lákavé a zaujímavé, a naviac zefektívňuje samotný priebeh vyučovania (napr. vhodným použitím animácií, autotestov a pod.).[1] Vyučovanie pomocou IKT je dnes už bežnou súčasťou vyučovania hlavne na vysokých, ale aj na stredných a základných školách.

Informačné a komunikačné technológie (IKT) sú syntézou dvoch koncepcií:

- informačných technológií – technológií fungovania počítačov obsahujúcich technické vybavenie (hardvér) a programové vybavenie (softvér),
- komunikačných technológií – technológií a spôsobov komunikácie medzi počítačmi v počítačovej sieti.

V matematike sa využívajú rôzne technické prostriedky IKT. Prvými a stále ešte najrozšírenejšími technickými prostriedkami IKT sú **kalkulačky**, umožňujúce realizáciu viac či menej zložitých výpočtov. Pri práci s nimi je však stále riadiaca činnosť spojená s činnosťou operátora, ktorej rozsah klesá pri programovateľných typoch.

Základné typy kalkulačiek umožňujú uskutočnenie iba základných algebrických operácií (sčítania, odčítania, násobenia, delenia), stredné typy umožňujú výpočty s goniometrickými a cyklometrickými funkciami, ako aj prevody veľkosti uhlov. Vedecké typy kalkulačiek umožňujú výpočty derivácií a určitých integrálov

[1] Bude doplnené

a programovateľné typy, si používateľ môže sám naprogramovať. Grafické typy kalkulačiek sú vybavené obrazovkou, na ktorej sa graficky znázornia priebehy funkcií.

Vo vyučovaní matematiky sa kalkulačky využívajú ako prostriedok na uľahčenie výpočtov, ako heuristický prostriedok pre žiakov, ktorým umožňuje získavať poznatky, formulovať hypotézy a rozvíjať induktívne myslenie, a ako metodický prostriedok pri výučbe niektorých tematických celkov.

Využitie kalkulačiek vo vyučovaní má svoje pozitívne aj negatívne stránky. K pozitívnym patrí zvýšenie efektívnosti výučby, aktivizácia žiakov a možnosť riešenia aplikačných úloh. Negatívnym stránkami sú slepá dôvera žiakov aj v chybný výsledok a žiaľ často formálny prístup bez porozumenia podstaty riešenia problému.

Vyššiu úroveň technických prostriedkov IKT predstavujú **počítače** (analógové, číslicové, hybridné), ktoré pri svojej činnosti preberajú činnosť operátora. Z nich pre účely tejto práce majú význam iba **číslicové počítače**, a preto sa ďalej budeme zaoberať iba nimi.

Počítače sa dnes stále viac používajú vo vyučovaní, pričom edukácia s nimi má dva základné spôsoby. Jednak je to **výučba o počítačoch** (predmet informatika, kde sa žiaci oboznamujú s hardvérom a softvérom počítačov, ich údržbou a používaním programov) a ďalej **výučba s počítačmi** (v rámci rôznych predmetov; je nutná základná znalosť práce s počítačom a ovládaním konkrétneho programu). Výučba s počítačmi sa môže realizovať v dvoch podobách – ako **počítačom podporovaná výučba** (počítač je použitý ako doplnok alebo podpora učiteľa na vizualizáciu, testovanie, atď.) alebo **počítačom riadená výučba** (počítač je použitý ako organizátor vyučovania – zadáva úlohy, eviduje študijné výsledky a iné).

Vo vyučovaní matematiky sa používajú dve skupiny programov. Prvou skupinou sú programy typu CAS (Computer Algebra System), napr. Derive, Maple, Mathematica. Pomocou týchto programov môžeme riešiť kvadratické rovnice a počítať neurčité integrály, aj keď žiak nepozná algoritmy potrebné na riešenie daných úloh. Druhou skupinou sú programy zamerané na dynamickú geometriu, napr. GeoGebra, Cabri II Plus a C. a R. Tieto programy dynamizujú geometriu v rovine a niektoré aj geometriu v priestore.

Využívanie počítačov vo výučbe má taktiež svoje pozitíva a negatíva. Pozitívne môžeme vnímať zvýšenie motivácie a aktivity žiakov, väčšiu názornosť vizualizáciou matematických dát, možnosť riešenia reálnych problémov atď. Negatívnymi stránkami môže byť klesanie vyjadrovacích schopností žiakov, využitie počítačov len na prezentáciu textu alebo obrázkov, používanie dlhších prezentácií znižujúcich pozornosť, spôsovovanie fyzických problémov ako sú bolesti chrbta, stuhnutosť svalov, namáhanie očí.

Vzájomnú komunikáciu užívateľov počítačov umožňuje ich prepojenie do siete. Internet (World Wide Web) je otvorená, celosvetovo prepojená počítačová sieť, ktorá slúži na komunikáciu medzi jednotlivými účastníkmi. Učitelia môžu využívať internet na tvorbu alebo vyhľadávanie rôznych materiálov využiteľných pri výučbe. Tiež môžu využívať matematické online programy napr. WolframAlfa, vyhľadávať stránky so spracovaným obsahom tematických celkov matematiky pre základné alebo stredné školy, používať online matematické tabuľky, inšpirovať sa online matematickými hrami či sledovať webové stránky matematických súťaží.

Využitie internetu má svoje pozitívne stránky, napr. jednoduchá komunikácia aj v rámci kontinentov, rýchle vyhľadávanie inak ťažko dostupných informácií, vyhľadávanie pomocou kľúčových slov a vyhľadávačov, možnosť ďalšieho spracovania získaných údajov, zvýšenie názornosti a oživenie výučby; ale aj negatívne stránky, napr. nespoľahlivosť a neaktuálnosť prezentovaných údajov, občasné technické problémy s pripojením, neodôvodnená dôvera v stiahnuté materiály, jednostranné využívanie počítačov na zábavu, zdravotné problémy, pocit, že nie je potrebné si nič pamätať, lebo sa to dá nájsť na internete, matematické alebo jazykové chyby v materiáloch, veľa webových stránok s nie vždy kvalitným obsahom.[2]

Elektronické médiá výrazne ovplyvňujú – a nepochybne budú čím ďalej viac ovplyvňovať – aj edukačné procesy a vzdelávacie funkcie škôl všetkých stupňov.

[2] POLÁK, J.: *Didaktika matematiky. Obecná didaktika matematiky.* Fraus ***

Umožňujú totiž prístup k prakticky neobmedzenému množstvu informácií a zároveň efektívnu komunikáciu medzi svojimi užívateľmi. Ich významnou vlastnosťou je spätná väzba medzi informačnými zdrojmi a odoberateľmi informácií. Množstvo technických, právnych, pedagogických a psychologických aspektov tohto fenoménu pritom nie sme schopní v súčasnej dobe ani v plnom rozsahu predvídať.[3]

Vzhľadom k úzkej obsahovej súvislosti tejto práce v odbore učiteľstva s používaním elektronických médií mladou generáciou, a to od predškolského veku až po dospelosť, je na mieste pripomenúť aj potencionálne problémy, ktoré ich nevhodné využívanie alebo nadužívanie prináša. Na jednej strane netreba znižovať pokrok, ktorý elektronické médiá nesporne prinášajú, ale na strane druhej je potrebné pripomenúť, že z množstva výskumov – predovšetkým z výskumov ľudského mozgu – vyplýva, že výrazné nadužívanie digitálnych médií vedie k jeho menšiemu využívaniu. U mladých ľudí sa v dôsledku toho vývoj ich mozgu oneskoruje a duševná výkonnosť tak zostáva pod úrovňou ich možností; to sa týka myslenia, vôle, emócií, ale aj sociálneho správania sa. Skutočnosť, že súčasní žiaci trávia stále viac času pri počítačoch alebo televíznych obrazovkách je všeobecne známa. Obezita, nemotornosť alebo poruchy zraku tvoria len časť fyziologických problémov, závažnejšie sú však problémy psychické, ktoré sa prejavujú zhoršenou pamäťou, zníženou schopnosťou operácií s informáciami, nervozitou, asociálnymi prejavmi a pod.[4]

Napriek všetkým optimistickým predpovediam z výskumov vyplýva, že **digitálny domorodci** (označenie je prevzaté z anglického „digital native“ a prvýkrát ho použil americký pedagóg Marc Prensky[5]), teda populácia narodená po roku 1980, ktorá vyrastala s počítačom a internetom ako samozrejmou súčasťou svojho prostredia (v USA, u nás je to neskôr), neprejavujú ani v najmenšom lepšie duševné schopnosti (okrem zbehlosti pri ovládaní médií), oproti **digitálnym prisťahovalcom** (označenie je prevzaté z anglického „digital immigrants“), teda oproti populácii staršej. Ich zachádzanie s informáciami totiž býva povrchné,

[3] NOVÁK, D.: Digitální rozhlas a digitální televize prizmatem vzdělávací funkce školy. *Technológia vzdelávania (příloha Slovenský učiteľ)*, roč. XIV, 2006, č. 5, s. 5-7.
[4] Bude doplnené
[5] PRENSKY, M.: Digital natives, digital immigrants. *On the Horizon*, roč. 2001, č. 9, s. 1-6.

pretože neprechádzajú od jednotlivostí k poznaniu celku. K hlbokému osvojeniu vedomostí totiž zďaleka nestačí iba vyhľadanie potrebných informácií (napr. cez Google), lebo ukladanie vecných obsahov v mozgu závisí na hĺbke ich spracovania.

Je moderné poukazovať na **mediálne kompetencie** a zdôrazňovať ako sú zásadné, prípadne kľúčové. Avšak na druhú stranu podľa Manfreda Spitzera *„pokiaľ sa na vec pozrieme v pravom svetle, potom mediálnou kompetenciou nie sú mienené ani programovanie, ani schopnosť logického myslenia (Booleova algebra), ani ďalšie základné intelektuálne schopnosti spojené s digitálnymi médiami, ale skôr nič viac ako povrchné znalosti užívateľského softvéru“*.[6] Zmienený nemecký psychiater, psychológ a filozof, ktorý okrem iného pôsobil aj ako hosťujúci profesor na Harvardskej univerzite a v súčasnosti vedie psychiatrickú kliniku v Ulme, publikoval výsledky množstva výskumov zaoberajúcich sa touto problematikou. Jeho závery súvisia z pedagogicko-psychologického pohľadu s touto prácou a stoja za vážne zamyslenie sa rodičov aj pedagógov. Ako sa vraví – aj pre digitálne médiá platí, že sú dobrý sluha, ale zlý pán.

1.1 Komparácia výučby učiva geometrie v Slovenskej republike a Českej republike

Matematika je jedným zo základných predmetov, s ktorým sa žiaci základných škôl stretávajú už od prvého ročníka. Vo svojej didakticky transformovanej podobe umožňuje postupne preniknúť do svojej systematiky ako prírodnej vedy, rozvíja logické myslenie, schopnosť operovať s pojmami a poukazuje na možnosť jej využitia ako nástroja na riešenie problémov reálneho života. Matematika tiež od začiatku vytvára teoretický základ pre výučbu ďalších predmetov, s ktorými sa žiaci stretnú neskôr (napríklad fyzika, chémia, technika). Jej neoddeliteľnou a významnou súčasťou je geometria.

Komparácia učiva geometrie bola uskutočnená vzhľadom na inovovaný Štátny vzdelávací program[7,8], ktorý je na Slovensku účinný od 1.9.2015 a od školského

[6] SPITZER, M.: *Digitální demence.* Brno: Host, 2014, s. 279.
[7] Bude doplnené

roku 2019/2020 už bude výučba vo všetkých ročníkoch prebiehať podľa neho. V Českej republike je hlavným dokumentom Rámcový vzdělávací plán[9], v ktorom sú uvedené očakávané výstupy. Použiť sa dá aj Návrh osnov[10]***

1.1.1 Geometria na I. stupni základných škôl

Učivo geometrie sa na I. stupni v Slovenskej republike preberá v tematickom celku Geometria a meranie. I. stupeň na Slovensku tvorí 1. až 4. ročník ale v Českej republike je to 1. až 5. ročník. V Českej republike sa tematický celok zaoberajúci sa geometriou nazýva Geometrie v rovině a prostoru.

V Českej republike sa podľa RVP pre učivo geometrie na I. stupni stanovujú dve výstupové obdobia s očakávanými výstupmi. Prvé výstupové obdobie je po ukončení tretieho ročníka a obsahuje 3 výstupy, druhé výstupové obdobie je na konci piateho ročníka a obsahuje 5 výstupov.

V ďalšom texte je špecifikované časové zaradenie vybraných obsahov učiva na základných školách v obidvoch štátoch.

<u>Čiary, úsečka, dĺžka úsečky</u>

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- rozlíšiť, pomenovať a nakresliť krivú, otvorenú i uzavretú čiaru,
- rozlíšiť, pomenovať, narysovať rovnú čiaru,
- narysovať uzavretú čiaru,
- vyznačiť bod a pomenujú ho,
- narysovať, označiť a pomenovať priamku, polpriamku, úsečku,
- vyznačiť bod, ktorý danému útvaru (úsečke, priamke, polpriamke) patrí, resp. nepatrí,
- narysovať úsečku, ak sú dané dva krajné body,
- vyznačiť úsečku na priamke, polpriamke,
- porovnať a usporiadať úsečky podľa dĺžky,
- odmerať dĺžku úsečky (s presnosťou na centimetre),

[8] Bude doplnené
[9] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání 2017
[10] Bude doplnené

- odmerať dĺžku úsečky (s presnosťou na milimetre),
- narysovať úsečku danej dĺžky (s presnosťou na centimetre),
- narysovať úsečku danej dĺžky (s presnosťou na milimetre),
- odhadnúť dĺžku úsečky,
- osvojiť si a použiť základné zásady rysovania,
- určiť súčet dvoch a viacerých úsečiek graficky a numericky,
- určiť rozdiel dvoch úsečiek graficky a numericky,
- určiť násobok úsečky graficky a numericky.

Učivo sa na Slovensku preberá v 1. ročníku (rozlíšenie, pomenovanie a nakreslenie krivej, otvorenej a uzavretej čiary, narysovanie rovnej čiary), v 2. ročníku (vyznačenie a pomenovanie bodu, rysovanie priamky, polpriamky a úsečky, vyznačenie bodu, ktorý danému útvaru patrí alebo nepatrí, rysovanie úsečky, vyznačenie úsečky na priamke, polpriamke, porovnanie, meranie a rysovanie úsečky danej dĺžky s presnosťou na centimetre), v 3. ročníku (porovnanie, meranie a rysovanie úsečky s presnosťou na milimetre, odhad dĺžky a zásady rysovania) a v 4. ročníku (grafické a numerické určenie súčtu, rozdielu a násobku úsečiek). V Českej republike je učivo preberané v 1. ročníku (odhad a porovnanie dĺžok úsečiek s využitím pomôcok), 2. ročníku (meranie a odhad dĺžky úsečky, jednotky dĺžky) a vo 4. ročníku (rysovanie priamky, polpriamky, zásady rysovania, grafické sčítanie a odčítanie úsečiek, porovnanie podľa dĺžky, určenie dĺžky lomenej čiary); okrem toho sa ešte vo 4. ročníku preberá určenie vzájomnej polohy priamok v rovine, rysovanie rôznobežiek a označenie ich priesečníka, ako aj zostrojenie rovnobežných a kolmých priamok pomocou trojuholníka s ryskou.

<u>Meranie</u>

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- porovnať a usporiadať (vzostupne, zostupne) predmety podľa dĺžky (výšky, šírky, ...),
- odmerať dĺžku (výšku, šírku, ...) daného predmetu pomocou neštandardných jednotiek dĺžky,

- pri meraní dĺžky použiť vhodný nástroj na meranie a zvoliť vhodnú jednotku dĺžky,
- odmerať dĺžku predmetu za pomoci pravítka (s presnosťou na centimetre) a výsledok merania zapísať,
- odmerať dĺžku za pomoci neštandardných jednotiek,
- odmerať vzdialenosť za pomoci metra i pásma (s presnosťou na metre) a výsledok merania zapísať,
- správne použiť a označiť jednotky dĺžky,
- odmerať dĺžku (šírku) predmetu za pomoci pravítka (s presnosťou na milimetre) a výsledok merania zapísať,
- odmerať väčšie vzdialenosti v metroch,
- porovnať jednotky dĺžky,
- porovnať vzdialenosti,
- odhadnúť kratšiu dĺžku v centimetroch (milimetroch) a dlhšiu dĺžku v metroch,
- premeniť jednotky dĺžky (aj zmiešané).

Učivo sa na Slovensku preberá v 1. ročníku (porovnanie a usporiadanie podľa dĺžky, meranie dĺžky neštandardnými jednotkami), v 2. ročníku (použitia vhodného nástroja na meranie a vhodných jednotiek dĺžky, meranie pravítkom s presnosťou na centimetre, meranie v neštandardných jednotkách, meranie vzdialeností s presnosťou na metre, správne použitie a označenie jednotiek), v 3. ročníku (meranie pravítkom s presnosťou na milimetre, meranie väčších vzdialeností, porovnanie vzdialeností a jednotiek dĺžky, odhadovanie dĺžky) a v 4. ročníku (premena aj zmiešaných jednotiek dĺžky). V Českej republike je učivo preberané v 1. ročníku (porovnanie rovinných útvarov a telies rovnakého typu podľa veľkosti), 4. ročníku (meranie vzdialeností, použitie vhodných jednotiek dĺžky a ich premena, použitie základných jednotiek obsahu) a v 5. ročníku (zostrojenie kolmice a rovnobežky k danej priamke daným bodom pomocou trojuholníka s ryskou).

<u>Pohyb vo štvorcovej sieti</u>

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- nájsť a vyznačiť cestu v jednoduchom bludisku, labyrinte,

- na základe symbolov ↑ → ↓ ← nakresliť (narysovať) v štvorcovej sieti obrázok,
- pomocou symbolov ↑ → ↓ ← popísať obrázok v štvorcovej sieti.

Učivo sa na Slovensku preberá v 1. ročníku. V Českej republike táto téma preberaná nie je.

Rovina všeobecne

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- umiestniť (dokresliť) rovinné geometrické útvary podľa pokynov,
- rozlíšiť, pomenovať, nakresliť rovinné geometrické útvary,
- identifikovať strany a vrcholy rovinných geometrických útvarov,
- vyznačiť bod, ktorý danému geometrickému útvaru patrí, resp. nepatrí,
- narysovať rovinné útvary v štvorcovej sieti a označiť ich vrcholy veľkým tlačeným písmenom,
- popísať vlastnosti rovinných geometrických útvarov (trojuholník, štvorec, obdĺžnik).

Učivo sa na Slovensku preberá v 1. ročníku (umiestnenie, rozlíšenie, pomenovanie a nakreslenie), v 2. ročníku (identifikovanie strán a vrcholov), v 3. ročníku (vyznačenie bodu a rysovanie vo štvorcovej sieti) a vo 4. ročníku (popísanie vlastností). V Českej republike je učivo preberané v 1., 2. a v 3. ročníku (rozoznanie, pomenovanie a načrtnutie rovinných útvarov, príklady v okolí, modelovanie rovinných útvarov pomocou stavebnice).

Mnohouholníky

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- identifikovať a pomenovať mnohouholníky,
- identifikovať a pomenovať mnohouholník (štvoruholník, päťuholník, ...),
- vymenovať vrcholy a strany mnohouholníka (trojuholníka, štvorca a obdĺžnika, štvoruholníka, päťuholníka, ...)
- označiť vrcholy mnohouholníka (trojuholníka, štvorca a obdĺžnika, štvoruholníka, päťuholníka, ...),

- vyznačiť protiľahlé i susedné strany štvorca a obdĺžnika,
- v štvorci a obdĺžniku vyznačiť uhlopriečky,
- odmerať dĺžky strán trojuholníka, štvorca, obdĺžnika (s presnosťou na milimetre),
- narysovať trojuholník a pomenovať jeho vrcholy,
- vypočítať obvod trojuholníka, štvorca a obdĺžnika ako súčet dĺžok strán.

Učivo sa na Slovensku preberá v 2. ročníku (identifikovania a pomenovanie mnohouholníkov), ostatné učivo vo 4. ročníku. V Českej republike je učivo preberané v 3. ročníku (triedenie trojuholníkov podľa dĺžky strán, ich príklady v okolí), 4. ročníku (rysovanie štvorca, obdĺžnika, trojuholníka vo štvorcovej sieti, určenie obsahu štvorca, obdĺžnika, trojuholníka pomocou štvorcovej siete, porovnanie obsahov, určenie obvodu mnohouholníka sčítaním dĺžok jeho strán) a v 5. ročníku (konštrukcia rovinných útvarov s využitím ich základných vlastností, určenie obsahu rovinného obrazca tvoreného štvorcami, obdĺžnikmi a trojuholníkmi vo štvorcovej sieti, porovnanie obsahov).

<u>Kruh, kružnica</u>

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- rozlíšiť, pomenovať kruh a kružnicu,
- určiť, vyznačiť a pomenovať v kružnici (kruhu) stred, polomer, priemer,
- narysovať kružnicu (kruh) pomocou kružidla.

Učivo sa na Slovensku preberá vo 4. ročníku. V Českej republike je učivo preberané tiež vo 4. ročníku.

<u>Súmernosť, zhodnosť, podobnosť</u>

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- v štvorcovej sieti dokresliť (dorysovať) osovo súmerný obrázok.
- v štvorcovej sieti dokresliť (dorysovať) zhodný obrázok,
- zväčšiť a zmenšiť rovinné útvary v štvorcovej sieti (štvorec, obdĺžnik).

Učivo sa na Slovensku preberá postupne v 1. ročníku (osová súmernosť), 2. ročníku (zhodnosť) a 3. ročníku (podobnosť). V Českej republike sa na I. stupni preberá iba osová súmernosť a to v 3. a 4. ročníku (modelovanie osovo súmerných útvarov, znázornenie vo štvorcovej sieti, určenie osi súmernosti prekladaním papiera a využitie v praktických činnostiach a situáciach).

Priestor

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- rozlíšiť a pomenovať priestorové geometrické útvary,
- určiť polohu geometrických útvarov v priestore,
- umiestniť (dokresliť) priestorové geometrické útvary podľa pokynov,
- identifikovať steny, hrany a vrcholy kocky.

Učivo sa na Slovensku preberá v 1. ročníku (rozlíšenie, pomenovanie, určenie polohy a umiestnenie podľa pokynov) a v 3. ročníku (identifikovanie stien, hrán a vrcholov kocky). V Českej republike je učivo preberané tiež v 1. a 2. ročníku (orientácia v priestore, rozoznanie a pomenovanie základných telies, príklady telies v okolí, modelovanie telies pomocou stavebnice).

Stavby z kociek

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- postaviť jednoduchú stavbu z kociek podľa vzoru a podľa obrázka,
- postaviť stavbu z kociek na základe plánu,
- vytvoriť plán stavby z kociek.
- vytvoriť z kociek rôzne stavby podľa plánu,
- vytvoriť a slovne opísať vlastnú stavbu z kociek,
- nakresliť plán stavby z kociek.

Učivo sa na Slovensku preberá postupne v 2., 3. a 4. ročníku. V Českej republike je daná téma preberaná iba v 1. ročníku ako modelovanie priestorových útvarov pomocou stavebnice.

Komparáciou základnej pedagogickej dokumentácie oboch štátov sa zistilo, že z hľadiska výkonových a obsahových štandardov sú vo veľkej miere zhodné. Slovenskí žiaci oproti českým žiakom nemajú učivo:

- modelovanie rovinných útvarov pomocou stavebníc,
- jednotky obsahu mm^2, cm^2, m^2; dané učivo sa preberá len ako určenie počtu štvorcov v štvorcovej sieti, z ktorých sa útvar skladá.

Českí žiaci oproti slovenským žiakom nemajú učivo:

- využitie symbolov ↓, →, ↑, ← na pohyb, orientáciu, popis a kreslenie obrazcov v štvorcovej sieti,
- nájdenie a popísanie cesty v jednoduchom labyrinte a bludisku,
- využitie štvorcovej siete na dokreslenie zhodného obrázku (propedeutika posunutia) a zväčšenie a zmenšenie obrázku (propedeutika podobnosti),
- stavby z kociek na základe obrázku, ich kódovanie pomocou pôdorysu a počtu na sebe stojacich kociek, stavby z kociek na základe kódu, určovanie počtu kociek, z ktorých sa stavba skladá (propedeutika objemu),
- stredová súmernosť – útvary stredovo súmerné, hľadanie stredu súmernosti, zostrojenie bodov, úsečiek, a jednoduchých geometrických útvarov v stredovej súmernosti.

Absentujúce učivo je v oboch štátoch postupne preberané v ďalších ročníkoch základných škôl.

1.1.2 Geometria na II. stupni základných škôl

Učivo geometrie sa na II. stupni v Slovenskej republike preberá v tematickom celku Geometria a meranie. II. stupeň na Slovensku tvorí 5. až 9. Ročník, ale v Českej republike je to 6. až 9. ročník. V Českej republike sa tematický celok zaoberajúci sa geometriou nazýva Geometrie v rovině a prostoru.

V Českej republike sa podľa RVP pre učivo geometrie na II. stupni stanovuje iba jedno výstupové obdobie na konci 9. ročníka, ktoré obsahuje 13 očakávaných výstupov.

Osová súmernosť v rovine

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- pre daný bod nájsť bod, s ktorým je osovo súmerný podľa danej osi,
- identifikovať rovinné geometrické útvary súmerné podľa osi,
- nájsť os súmernosti dvojice bodov, úsečky,
- nájsť osi súmernosti osovo súmerného útvaru,
- zostrojiť obraz bodu, úsečky, priamky, kružnice alebo jednoduchého útvaru (obrazca) zloženého z úsečiek a častí kružnice v osovej súmernosti,
- pracovať s osovo súmernými útvarmi vo štvorcovej sieti, dokresliť, opraviť ich.

Učivo sa preberá na Slovensku v 5. ročníku, v Českej republike v 6. ročníku.

Stredová súmernosť v rovine

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- pre daný bod nájsť bod, s ktorým je stredovo súmerný podľa daného stredu,
- identifikovať rovinné geometrické útvary súmerné podľa stredu,
- nájsť stred súmernosti dvojice bodov,
- nájsť stred súmernosti stredovo súmerných rovinných útvarov,
- zostrojiť obraz bodu, úsečky, priamky, kružnice alebo jednoduchého útvaru (obrazca) zloženého z úsečiek a častí kružnice v stredovej súmernosti,
- pracovať so stredovo súmernými útvarmi vo štvorcovej sieti, dokresliť, opraviť ich.

Učivo sa preberá na Slovensku v 5. ročníku, v Českej republike v 7. ročníku.

Uhol a jeho veľkosť

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- odmerať veľkosť narysovaného uhla v stupňoch,

- narysovať pomocou uhlomera uhol s danou veľkosťou,
- primerane odhadnúť veľkosť uhla,
- premeniť stupne na minúty a naopak,
- zostrojiť os uhla pomocou uhlomera,
- numericky porovnať uhly podľa ich veľkosti,
- rozlíšiť vrcholové a susedné uhly,
- vypočítať veľkosť vrcholového a susedného uhla k danému uhlu,
- sčítať a odčítať veľkosti uhlov v stupňoch,
- využiť vlastnosti uhlov pri riešení kontextových úloh.

Učivo sa preberá na Slovensku v 6. ročníku, v Českej republike tiež v 6. ročníku,

Trojuholník

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- rozlíšiť základné prvky trojuholníka,
- vypočítať veľkosť vonkajších uhlov trojuholníka**,**
- vyriešiť úlohy s využitím vlastností vnútorných a vonkajších uhlov trojuholníka**,**
- pomenovať trojuholník podľa veľkosti jeho vnútorných uhlov,
- vypočítať veľkosť tretieho vnútorného uhla trojuholníka, ak pozná veľkosť jeho dvoch vnútorných uhlov v stupňoch,
- zostrojiť trojuholník podľa slovného postupu konštrukcie s využitím viet sss, sus a usu**,**
- opísať slovne postup konštrukcie trojuholníka**,**
- vetu o trojuholníkovej nerovnosti**,**
- na základe vety o trojuholníkovej nerovnosti rozhodnúť o možnosti zostrojenia trojuholníka z troch úsečiek**,**
- opísať rovnostranný a rovnoramenný trojuholník a ich základné vlastnosti (veľkosti strán a uhlov, súmernosť)**,**
- presne a čisto narysovať rovnostranný a rovnoramenný trojuholník**,**
- zostrojiť výšky trojuholníka (v ostrouhlom, tupouhlom a pravouhlom) a ich priesečník.

- vypočítať obvod a obsah trojuholníka,
- vyriešiť slovné (kontextové a podnetové) úlohy z reálneho života s využitím poznatkov o obsahu a obvode trojuholníka a s využitím premeny jednotiek dĺžky a obsahu.

Učivo sa preberá na Slovensku v 6. ročníku, rozdelenie trojuholníkov podľa veľkostí ich vnútorných uhlov a výpočet veľkosti tretieho vnútorného uhla v trojuholníku sa preberá s učivom o uhloch. V Českej republike sa toto učivo preberá tiež v 6. ročníku.

<u>Zhodnosť trojuholníkov</u>

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- rozhodnúť o zhodnosti dvoch trojuholníkov v rovine**.**

Učivo sa preberá na Slovensku v 6. ročníku, v Českej republike tiež v 6. ročníku.

<u>Kváder a kocka, ich povrch a objem v desatinných číslach, premieňanie jednotiek objemu</u>

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- načrtnúť a narysovať obraz kvádra a kocky vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- vyznačiť na náčrte kvádra a kocky ich viditeľné a neviditeľné hrany a ich základné prvky,
- načrtnúť a narysovať sieť kvádra a kocky,
- zostaviť na základe náčrtu alebo opisu teleso skladajúce sa z kociek a kvádrov,
- zhotoviť náčrt telies skladajúcich sa z kvádrov a kociek,
- nakresliť nárys, bokorys a pôdorys telies zostavených z kvádrov a kociek,
- vzťah 1 liter = 1 dm^3,
- vypočítať povrch a objem kvádra a kocky, ak pozná dĺžky ich hrán,
- vyriešiť primerané slovné úlohy na výpočet povrchu / objemu kvádra a kocky aj s využitím premeny jednotiek obsahu / objemu.

Učivo sa preberá na Slovensku v 7. ročníku, v Českej republike v 6. ročníku.

Rovnobežník, obvod a obsah rovnobežníka

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- zostrojiť dve rovnobežné priamky (rovnobežky), ktoré sú preťaté priečkou,
- určiť súhlasné a striedavé uhly pri dvoch rovnobežných priamkach preťatých priečkou,
- vyriešiť úlohy s využitím vlastností súhlasných a striedavých uhlov, načrtnúť a pomenovať rovnobežníky: štvorec, kosoštvorec, obdĺžnik, kosodĺžnik,
- rozlíšiť a vysvetliť rozdiel medzi pravouhlými a kosouhlými rovnobežníkmi,
- narysovať štvorec, kosoštvorec, obdĺžnik, kosodĺžnik a správne označiť všetky ich základné prvky,
- zostrojiť a odmerať v rovnobežníku (štvorci, kosoštvorci, obdĺžniku, kosodĺžniku) jeho dve rôzne výšky,
- vyriešiť primerané konštrukčné úlohy pre štvoruholníky s využitím vlastností konštrukcie trojuholníka a s využitím poznatkov o rovnobežníkoch,
- vypočítať obvod a obsah štvorca, kosoštvorca, obdĺžnika, kosodĺžnika,
- vyriešiť slovné (kontextové a podnetové) úlohy z reálneho života s využitím poznatkov o obsahu a obvode rovnobežníka a s využitím premeny jednotiek dĺžky a obsahu.

Učivo sa preberá na Slovensku v 8. ročníku, v Českej republike v 7. ročníku.

Lichobežník, obvod a obsah lichobežníka

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- načrtnúť lichobežník, pomenovať a opísať jeho základné prvky,
- zostrojiť ľubovoľný lichobežník (všeobecný, pravouhlý, rovnoramenný) podľa daných prvkov a na základe daného konštrukčného postupu,
- vyriešiť primerané konštrukčné úlohy pre štvoruholníky s využitím vlastností konštrukcie trojuholníka a s využitím poznatkov o lichobežníkoch,
- vypočítať obvod a obsah lichobežníka,

- vyriešiť slovné (kontextové a podnetové) úlohy z reálneho života s využitím poznatkov o obsahu a obvode lichobežníka a s využitím premeny jednotiek dĺžky a obsahu.

Učivo sa preberá na Slovensku v 8. ročníku, v Českej republike v 7. ročníku.

Kruh, kružnica

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- zostrojiť kružnicu s daným polomerom alebo daným priemerom,
- vysvetliť vzťah medzi polomerom a priemerom kružnice,
- určiť vzájomnú polohu kružnice a priamky,
- zostrojiť dotyčnicu ku kružnici v určenom bode ležiacom na tejto kružnici,
- zostrojiť dotyčnicu ku kružnici z daného bodu, ktorý leží mimo tejto kružnice,
- slovne opísať postup konštrukcie dotyčnice ku kružnici približnou metódou aj pomocou Tálesovej kružnice,
- vyznačiť na kružnici kružnicový oblúk a kružnicový oblúk prislúchajúci danému stredovému uhlu,
- vyznačiť v kruhu kruhový výsek a kruhový výsek prislúchajúci danému stredovému uhlu,
- vyznačiť v kruhu kruhový odsek,
- určiť a odmerať stredový uhol prislúchajúci k danému kružnicovému oblúku alebo kruhovému výseku,
- vypočítať obsah a obvod kruhu a dĺžku kružnice,
- vyriešiť slovné úlohy, ktoré využívajú výpočet obsahu alebo obvodu kruhu, alebo dĺžky kružnice.

Učivo sa preberá na Slovensku v 8. ročníku, v Českej republike tiež v 8. ročníku.

Kocka a kváder

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- načrtnúť kocku a kváder vo voľnom rovnobežnom premietaní,

- opísať kocku a kváder a identifikovať ich základné prvky,
- určiť počet hrán, stien a vrcholov kocky a kvádru,
- zostrojiť sieť kocky a kvádru,
- použiť príslušné vzorce na výpočet objemu a povrchu kocky a kvádru,
- vypočítať objem a povrch kocky, kvádru,
- vyriešiť slovné úlohy s využitím objemu alebo povrchu kocky a kvádru.

Učivo sa preberá na Slovensku v 8. ročníku, v Českej republike v 6. ročníku.

Hranol

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- načrtnúť hranol (trojboký, štvorboký) vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- opísať hranol a identifikovať jeho základné prvky,
- určiť počet hrán, stien a vrcholov hranola,
- zostrojiť sieť kolmého hranola,
- použiť príslušné vzorce na výpočet objemu a povrchu hranola,
- vypočítať objem a povrch hranola,
- vyriešiť slovné úlohy s využitím objemu alebo povrchu hranola.

Učivo sa preberá na Slovensku v 8. ročníku, v Českej republike v 7. ročníku.

Pytagorova veta

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- vymenovať základné prvky a vlastnosti pravouhlého trojuholníka,
- formuláciu Pytagorovej vety a jej význam,
- zapísať Pytagorovu vetu v pravouhlom trojuholníku *ABC* s pravým uhlom pri vrchole *C* vzťahom $c^2 = a^2 + b^2$, ale aj vzťahom pri inom označení strán pravouhlého trojuholníka,
- vyjadriť a zapísať zo základného vzťahu Pytagorovej vety obsah štvorca nad odvesnami ($a^2 = c^2 - b^2$, $b^2 = c^2 - a^2$), podobne aj pri inom označení strán trojuholníka,

- vyjadriť vzťah pre výpočet dĺžky odvesien pomocou odmocnín ($a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$), podobne aj pri inom označení strán trojuholníka,
- vypočítať dĺžku tretej strany pravouhlého trojuholníka, ak sú známe dĺžky jeho dvoch zvyšných strán,
- samostatne použiť Pytagorovu vetu na riešenie kontextových úloh z reálneho praktického života.

Učivo sa preberá na Slovensku v 9. ročníku, v Českej republike v 8. ročníku.

<u>Ihlan, objem a povrch ihlana</u>

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- načrtnúť ihlan vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- opísať ihlan a pomenovať jeho základné prvky,
- určiť počet hrán, stien a vrcholov ihlana,
- zostrojiť sieť ihlana,
- dosadením do vzorcov vypočítať objem a povrch ihlana,
- vyriešiť primerané slovné úlohy na výpočet objemu a povrchu ihlana.

Učivo sa preberá na Slovensku v 9. ročníku, v Českej republike tiež v 9. ročníku.

<u>Valec, objem a povrch valca</u>

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- načrtnúť valec vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- opísať valec a pomenovať jeho základné prvky,
- zostrojiť sieť valca,
- dosadením do vzorcov vypočítať objem a povrch valca,
- vyriešiť primerané slovné úlohy na výpočet objemu a povrchu valca.

Učivo sa preberá na Slovensku v 9. ročníku, v Českej republike v 8. ročníku.

<u>Kužeľ, objem a povrch kužeľa</u>

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- načrtnúť kužeľ vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- opísať kužeľ a pomenovať jeho základné prvky,
- zostrojiť sieť kužeľa,
- dosadením do vzorcov vypočítať objem a povrch kužeľa,
- vyriešiť primerané slovné úlohy na výpočet objemu a povrchu kužeľa.

Učivo sa preberá na Slovensku v 9. ročníku, v Českej republike tiež v 9. ročníku.

Guľa, objem a povrch gule

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- opísať guľu a pomenovať jej základné prvky,
- dosadením do vzorcov vypočítať objem a povrch gule,
- vyriešiť primerané slovné úlohy na výpočet objemu a povrchu gule.

Učivo sa preberá na Slovensku v 9. ročníku, v Českej republike v 8. ročníku.

Podobnosť trojuholníkov

Po prebratí učiva by žiak mal vedieť:

- vysvetliť podstatu podobnosti dvoch geometrických útvarov,
- rozhodnúť o podobnosti dvojice trojuholníkov v rovine,
- vypočítať pomer podobnosti dvoch podobných trojuholníkov,
- na základe viet o podobnosti trojuholníkov vyriešiť primerané výpočtové a konštrukčné úlohy,
- využiť vlastnosti podobnosti trojuholníkov pri riešení praktických úloh zo života pri meraní (odhadovaní) vzdialeností a výšok,
- určiť skutočnú vzdialenosť (mierka mapy) a skutočné rozmery predmetov (mierka plánu).

Učivo sa preberá na Slovensku v 9. ročníku, v Českej republike tiež v 9. ročníku.

Učivo geometrie na II. stupni základných škôl je prakticky, až na malé rozdiely v rozsahu, zhodné.

1.2 Tematický celok Trojuholník

Učivo o trojuholníku sa preberá vo viacerých tematických celkoch. V **5. ročníku** sa v tematickom celku Geometria a meranie žiaci naučia narysovať trojuholník, ak poznajú dĺžky jeho troch strán; niektoré základné vlastnosti trojuholníka (jeho strany a vrcholy). V tematickom celku Súmernosť v rovine (osová a stredová) sa žiaci naučia nájsť, nakresliť a zostrojiť osi súmernosti osovo súmerného útvaru (rovnostranný a rovnoramenný trojuholník). V **6. ročníku** sa v tematickom celku Uhol a jeho veľkosť, operácie s uhlami žiaci naučia pomenovať trojuholník podľa veľkosti jeho vnútorných uhlov (trojuholník ostrouhlý, pravouhlý a tupouhlý) a vypočítať veľkosť tretieho vnútorného uhla, ak poznajú veľkosti jeho dvoch zvyšných vnútorných uhlov v stupňoch. Tematický celok Trojuholník, zhodnosť trojuholníkov je celý zameraný na učivo o trojuholníku. Žiaci sa naučia rozlíšiť základné prvky trojuholníka (vrcholy, strany, uhly); vypočítať veľkosť vonkajších uhlov trojuholníka a vyriešiť úlohy s využitím vlastností vnútorných a vonkajších uhlov trojuholníka; rozhodnúť o zhodnosti dvoch trojuholníkov v rovine (podľa viet sss, sus a usu); zostrojiť trojuholník podľa slovného postupu konštrukcie s využitím vety sss, sus a usu a slovne opísať postup konštrukcie trojuholníka (tiež narysovať pravidelný šesťuholník, ktorý je zložený zo šiestich pravidelných/rovnostranných trojuholníkov); vetu o trojuholníkovej nerovnosti ($a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$) a na jej základe rozhodnúť o možnosti zostrojenia trojuholníka z troch úsečiek; opísať rovnostranný a rovnoramenný trojuholník a ich základné vlastnosti (špeciálne názvy strán a uhlov, veľkosti strán a uhlov, počet osí osovej súmernosti); presne a čisto narysovať rovnostranný a rovnoramenný trojuholník (pritom využiť ich vlastnosti); zostrojiť výšky trojuholníka (v ostrouhlom, tupouhlom a pravouhlom) a ich priesečník (definovanie výšky ako priamky, úsečky a veľkosti, označenie päty výšky, priesečník výšok). V **7. ročníku** sa učivo o trojuholníku nevyskytuje. V **8. ročníku** sa v tematickom celku Rovnobežník, lichobežník, obvod a obsah rovnobežníka, lichobežníka a trojuholníka žiaci naučia vyriešiť primerané konštrukčné úlohy (v zadaní aj s výškou) a využiť vlastnosti konštrukcie trojuholníka pre konštrukciu štvoruholníkov; vypočítať obvod a obsah trojuholníka (obsah už vo forme vzorca odvodeného z obsahu lichobežníka). V **9. ročníku** sa v tematickom celku Pytagorova veta žiaci naučia vymenovať základné prvky a vlastnosti pravouhlého trojuholníka (pravý uhol, odvesny, prepona);

formuláciu Pytagorovej vety a jej význam, zapísať Pytagorovu vetu v pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C vzťahom $c^2 = a^2 + b^2$, ale aj vzťahom pri inom označení strán pravouhlého trojuholníka; vyjadriť a zapísať zo základného vzťahu Pytagorovej vety obsah štvorca nad odvesnami ($a^2 = c^2 - b^2$, $b^2 = c^2 - a^2$), podobne aj pri inom označení strán trojuholníka; vyjadriť vzťah pre výpočet dĺžky odvesien a prepony pomocou odmocnín ($a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ a $c = \sqrt{a^2 + b^2}$), podobne aj pri inom označení strán trojuholníka; vypočítať dĺžku tretej strany pravouhlého trojuholníka, ak sú známe dĺžky jeho dvoch zvyšných strán; samostatne použiť Pytagorovu vetu na riešenie kontextových úloh z reálneho praktického života. V tematickom celku Podobnosť trojuholníkov sa žiaci naučia vysvetliť podstatu podobnosti dvoch geometrických útvarov (súvis so zhodnosťou); rozhodnúť o podobnosti dvojice trojuholníkov v rovine a vypočítať pomer podobnosti dvoch podobných trojuholníkov; na základe viet o podobnosti trojuholníkov vyriešiť primerané výpočtové a konštrukčné úlohy (vety sss, sus, a uu); využiť vlastnosti podobnosti trojuholníkov pri riešení praktických úloh zo života pri meraní (odhadovaní) vzdialeností a výšok a určiť skutočnú vzdialenosť (mierka mapy) a skutočné rozmery predmetov (mierka plánu).

1.3 LMS Moodle

E-learning (elektronické vzdelávanie, e-vzdelávanie) predstavuje moderný spôsob výučby s využitím IKT, ktorý je spojený s implementáciou IKT do vývoja, distribúcie a riadenia vzdelávania. Umožňuje efektívne spojenie učiteľa so žiakmi a študentmi, ako aj obojstranný diaľkový tok informácií. Prenos informácií je najčastejšie realizovaný prostredníctvom on-line kurzov.

Samoštúdium prostredníctvom e-learningu je časovo flexibilné a poskytuje okamžitú spätnú väzbu. Štúdium je zväčša organizované do niekoľkých on-line kurzov v závislosti od vzdelávacieho okruhu. Kurz môže obsahovať teoreticky neobmedzené množstvo dát, kontrolné otázky, testy a nakoniec aj certifikát o úspešnom absolvovaní. Výstupy vzdelávania, teda štatistiky úspešnosti testov, majú veľkú výpovednú hodnotu pre vzdelávacie inštitúcie pokiaľ ide o efektivitu kurzov, motiváciu študentov a ich schopnosť učiť sa.

Vzdelávanie pomocou e-learningu môže mať viacero foriem, a tak sa dokonale prispôsobiť individuálnym potrebám študentov. Najosvedčenejšou formou e-learningu je takzvaný asynchrónny e-learning. Zahŕňa samoštúdium jednotlivých študentov, ktorí si sami volia, aké informácie potrebujú, kedy a akým tempom ich budú prijímať. Niektoré situácie však vyžadujú prezenčnú formu kurzov. V takom prípade e-learning pomáha eliminovať nedostatky klasickej výučby a zo všedného vyučovacieho procesu sa stáva interaktívna vyučovanie, ktoré je pútavé a adresné, čo zvyšuje jeho efektivitu.

Hlavným prínosom e-learningu je odbremenenie učiteľa od podávania informácií, ktoré sú študenti schopní osvojiť si aj sami a učiteľ sa môže sústrediť na problematické oblasti učiva, diskusiu a praktické aktivity. Pre pochopenie niektorých procesov je e-learningová animácia efektívnejšia, a keďže človek najviac informácii prijíma zrakom, je tu aj vyššia šanca, že si danú informáciu zapamätá.[11]

LMS (learning management system – systém na riadenie výučby) je aplikácia na administratívu a organizáciu výučby v rámci elektronického vzdelávania. LMS sú aplikácie, ktoré v sebe integrujú spravidla najrôznejšie on-line nástroje pre komunikáciu a riadenie štúdia (nástenka, diskusné fórum, chat, evidencia atď.) a zároveň sprístupňujú študentom učebné materiály či učebný obsah on-line alebo aj off-line. LMS aplikácií je veľa - od tých jednoduchých, cez najrôznejšie LMS z akademickej sféry, až po rozsiahle širokospektrálne komerčné aplikácie. Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici umožňuje od roku 2011 používať systém LMS Moodle.[12]

Moodle je softvérový balíček na tvorbu výučbových systémov a elektronických kurzov na internete. Je poskytovaný zadarmo ako otvorený softvér so všeobecnou verejnou licenciou GNU. Slovo Moodle je akronymom pre ***M**odular **O**bject – **O**riented **D**ynamic **L**earning **E**nviroment* čiže Modulové objektovo – orientované dynamické prostredie pre výučbu. Pôvodným autorom softvéru Moodle je Martin

[11] Čo je e-learning. Dostupné na internete: <http://www.elearning.sk/co-je-elearning.html> [cit. 2017-09-19].
[12] Smernica č. 3/2016 o využívaní e-learningu na Univerzite Mateja Bela v Banskej Bystrici. Dostupné na internete: <https://lms.umb.sk> [cit. 2019-08-19]

Dougiamas, ktorý koordinuje jeho vývoj dodnes. Prvá verzia v jazyku PHP bola zverejnená 20. augusta 2002.[13,14]

Blended learning je kombináciou e-learningu a klasického vzdelávania. Tieto dve koncepcie sa navzájom miešajú (blend = zmes) a prelínajú. Blended learning viac či menej integruje prvky e-learningu do klasického vzdelávania a jeho cieľom je využitie možností, ktoré IKT ponúkajú v spojitosti s osvedčenými postupmi klasického vyučovania.

E-learningové kurzy majú vo všeobecnosti veľa výhod aj nevýhod. Je však potrebné si uvedomiť, že to čo jeden používateľ považuje za výhodu, môže iný používateľ považovať za nevýhodu. Vzhľadom k tomu sme sa na to pozreli z troch rôznych hľadísk – z hľadiska žiaka, učiteľa a školy.

V dnešnej dobe veľa žiakov vlastní rôzne zariadenia IKT, ako sú smartfóny a tablety, v rodinách sú počítače alebo notebooky. Bežné je internetové pripojenie cez kábel, alebo čoraz častejšie cez wifi. Cena týchto technológií klesá, a preto sú dostupnejšie pre stále širšiu časť obyvateľstva. Veľa škôl má internetové pripojenie v rámci budovy školy realizované cez wifi. Žiak sa tak môže pripojiť kdekoľvek a kedykoľvek. Ďalšou výhodou je možnosť rýchleho vyhľadávania informácií, ich uloženia do svojho zariadenia, spracovania, úpravy a archivovania. Inou výhodou je možnosť individuálneho prispôsobenia. Elektronický kurz môže okrem základného učiva, ktoré je určené pre všetkých žiakov, obsahovať aj rozširujúce učivo, historické poznámky k danej téme, motivačné a problémové úlohy. Elektronické kurzy ponúkajú aj možnosť chatu (komunikácia medzi účastníkmi kurzu, ktorá prebieha v reálnom čase), kde si môžu žiaci vzájomne poradiť, pýtať sa a spolupracovať na danej úlohe. Zároveň si žiaci rozvíjajú svoju počítačovú a informačnú gramotnosť.

Nevýhodou môžu byť nedostatočné znalosti vo využívaní online technológií, prípadne všeobecne negatívny postoj k týmto technológiám. Taktiež môžu mať žiaci obavu zo straty súkromia alebo zo špehovania, pretože komunikácia v elektronickom kurze sa ukladá a tak sa aj po čase dá zistiť, kto čo napísal. Môže

[13] Moodle. Dostupné na internete: <https://en.wikipedia.org/wiki/Moodle> [cit. 2017-10-07].
[14] Moodle. Dostupné na internete: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Moodle> [cit. 2017-10-07].

nastať aj rozpor medzi učebným štýlom žiaka a spôsobom spracovania elektronického kurzu. Žiaci môžu byť zahltení množstvom informácií, ktoré si navzájom odporujú a nevedia ich selektovať, nevedia sa sústrediť na jednu úlohu, ale majú naraz viacero aktivít (napr. okrem elektronického kurzu sú zároveň prihlásení na sociálnej sieti, majú pustenú hudbu, film, hrajú hry atď.), ktoré rozptyľujú ich pozornosť, majú problém so sebadisciplínou a nedostatok motivácie. Veľkou nevýhodou je aj podvádzanie či už pri posielaných úlohách, kde si žiaci môžu medzi sebou riešenie úlohy zdieľať, ale aj pri vypracovávaní prác, ktoré sú často stiahnuté odniekiaľ z internetu a učiteľ to nemusí zistiť.

Z pohľadu učiteľa môže byť hlavnou výhodou tvorba a následne distribúcia alebo inovácia učebných materiálov. Tie sa v elektronickej verzii taktiež dajú obohatiť o rôzne multimediálne prvky, napr. odkazy na internetové stránky, nahrávky skladieb na hudobnej výchove, ukážky obrazov na výtvarnej výchove, videá pokusov na chémii alebo použitím geometrických appletov na matematike. Učitelia môžu pomocou štatistických nástrojov sledovať postup žiakov v elektronických kurzoch, s čím má žiak ťažkosti, úspešnosť v autotestoch atď., a podľa toho si pripraviť vyučovaciu hodinu.

Samozrejme aj učiteľ môže mať ťažkosti s používaním IKT. Rôzne programy sa stále menia a inovujú. Nie každá téma sa dá transformovať do elektronického kurzu (napr. praktické hodiny v školskej dielni, práce vo fyzikálnom alebo chemickom laboratóriu). Príprava multimediálnych učebných materiálov je náročná po časovej, ale aj didaktickej stránke.[15] Závažnou nevýhodou je, keď učiteľ na začiatku perfektne pripravenej vyučovacej hodiny zistí, že vypadlo internetové pripojenie, počítačová sieť je preťažená a pomalá a on musí rýchlo meniť a prispôsobovať dej hodiny. Táto skutočnosť sa síce pomaly vytráca, ale stále vie odradiť učiteľov od využívania IKT na vyučovacích hodinách.

Školy môžu sprostredkovávať učebné zdroje, ale aj práce od vyučujúcich, vytvárať autotesty na rôzne predmety. Tiež sú dostupné rôzne štatistiky úspešnosti, údaje sa dajú filtrovať podľa kritérií, archivovať, škola môže hromadne rozosielať

[15] Molnár P.: Prečo učitelia (ne)využívajú dynamické geometrické systémy vo vyučovaní matematiky. In: *Jarná škola doktorandov UPJŠ.* 2015.

oznamy rodičom. Škola tak môže zvýšiť svoju popularitu v subjektívnom hodnotení medzi žiakmi, ale aj ich rodičmi a verejnosťou.[16]

1.4 Dynamický geometrický systém a softvér GeoGebra

Dynamické geometrické systémy (DGS) umožňujú zostrojovať geometrické konštrukcie pomocou rôznych tlačidiel a/alebo algebraických vstupov. Ich výhodou je, že môžeme meniť vstupné údaje a na monitore sledovať, aký to má dopad na konštrukciu. Z tohto pohľadu sú dynamické geometrické systémy veľmi názorné. V rámci DGS sú dostupné rôzne programy, napríklad: GeoGebra, Cabri II Plus, Compass and Ruller (C. a R.), Cinderella, Cabri 3D, a iné.

Uvedené programy sú dnes na pomerne vysokej úrovni a kvalitatívne sú porovnateľné. Za spoločné vlastnosti DGS môžeme považovať:

- **interaktivitu** – pri zmene vstupných údajov môžeme sledovať zmeny závislých častí konštrukcie,
- **dynamiku** – statické konštrukcie môžeme pomocou nástrojov dynamizovať na animácie,
- **vizualizáciu** – môžeme znázorňovať základné, ale aj odvodené geometrické pojmy a vzťahy medzi nimi; medzi týmito zostrojenými útvarmi nemusí byť žiadna závislosť alebo môžu byť čiastočne viazané, či viazané,
- **realizáciu geometrického modelovania** – pomocou virtuálneho kružidla a pravítka môžeme na virtuálnom výkrese realizovať konštrukcie.[17]

GeoGebra je matematický softvér, ktorý je interaktívny a využíva sa na učenie a vyučovanie od základnej až po vysoké školy. Názov GeoGebra vznikol spojením slov geometria a algebra – program v sebe integruje prvky geometrie a algebry, ale aj štatistiky a matematickej analýzy. Pracuje na operačných systémoch Windows, MacOS a Linux a tiež na tabletoch s operačnými systémami Android, iPad a Windows. Autor Markus Hohenwarter začal vyvíjať GeoGebru v roku 2001

[16] ZOUNEK, J. a kol.: *E-learning : Učení (se) s digitálními technogiemi.* Praha: Wolters Kluwer ČR, a. s., 2016, s. 230-247. ISBN 978-80-7552-217-7
[17] ŽILKOVÁ, K.: Dynamické geometrické systémy (DGS) – softvérová podpora vzdelávania. In: *Journal of Technology and Information Education*. 2011.

ako časť svojej diplomovej práce na univerzite v Salzburgu, pokračoval na univerzite na Floride a v súčasnosti na univerzite v Linzi.

Konštrukcie môžu byť vytvorené z bodov, priamok, úsečiek, kružníc, mnohouholníkov, kužeľosečiek, polynómov a funkcií. Všetky objekty môžu byť následne dynamicky menené, buď priamo označením a posúvaním myšou alebo zmenou parametrov v Algebraickom okne. Učitelia a študenti môžu využiť GeoGebru na pochopenie a ilustrovanie dôkazov matematických viet.

Dynamické applety môžu byť priamo nahraté na stránku GeoGebra Materiály (ktorá vznikla v roku 2011 ako GeoGebra Tube a v roku 2016 sa premenovala). Stránka obsahuje množstvo materiálov – interaktívnych pracovných listov, simulácií, hier a e-kníh, v ktorých sú spracované ucelené témy. Materiály sa dajú stiahnuť v rôznych formátoch, napr. ako statické obrázky alebo animácie vo formáte .gif. Obrázky, stiahnuté ako vektorová grafika vo formáte .svg, je možné ďalej upravovať v iných programoch. Tiež je možné vygenerovať kód, ktorý sa priamo použije v LaTeX súboroch.

Zdrojový kód GeoGebry je licencovaný ako GNU General Public License (GPL), čo znamená, že sa môže voľne upravovať pre nekomerčné využitie a úpravy sú opäť voľne dostupné pod touto licenciou. Tiež vznikol Medzinárodný GeoGebra Inštitút (International GeoGebra Institute – IGI), ktorý podporuje spoluprácu medzi učiteľmi, študentmi, programovými vývojármi a výskumníkmi. Lokálne užívateľské skupiny podporujú učiteľov a študentov priamo v ich regióne, zdieľajú voľné výučbové materiály prostredníctvom GeoGebra Materiálov a organizujú workshopy. IGI môže certifikovať lokálnych užívateľov.

Softvér GeoGebra bol ocenený viacerými cenami na rôznych súťažiach[18], napr.:

- Archimedes 2016: MNU Award in category Mathematics (Hamburg, Germany),
- MERLOT Classics Award 2013: Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching (Las Vegas, Nevada, USA),
- BETT Award 2009: Finalist in London for British Educational Technology Award. Zlom strany ....

[18] Ocenenia softvéru GeoGebra. Dostupné na internete: <https://www.geogebra.org/about> [cit. 2019/08/16].

2 CIELE DIZERTAČNEJ PRÁCE

Pred spracovaním dizertačnej práce boli stanovené nasledujúce ciele:

1. Zmapovanie obsahu učiva geometrie so zameraním na trojuholník na slovenských a českých základných školách a zistenie rozdielov v základnej pedagogickej dokumentácii.
2. Vytvorenie elektronického kurzu v systéme LMS Moodle na podporu vyučovania geometrie trojuholníka v nižšom strednom vzdelávaní.
3. Vytvorenie metodickej príručky pre prácu učiteľov s elektronickým kurzom.
4. Odučenie učiva zameraného na geometriu trojuholníka s využitím vytvoreného elektronického kurzu, spojené so sledovaním reakcií žiakov.
5. Overenie efektivity výučby pri použití vytvoreného elektronického kurzu.
6. Zistenie názorov žiakov na applety obsiahnuté vo vytvorenom elektronickom kurze.

Elektronický kurz je významným faktorom vo výchovne vzdelávacom procese a môže prispieť k zlepšeniu výsledkov vyučovania. S ohľadom na analyzované informácie o riešenej problematike a vymedzené ciele dizertačnej práce boli pre vytvorený elektronický kurz stanovené tieto hypotézy:

H_1 ?

Aspoň tri štvrtiny žiakov vnímajú vyučovanie geometrie trojuholníka pomocou vytvoreného elektronického kurzu s appletmi priaznivo.

H_2

Žiaci vyučovaní pomocou vytvoreného elektronického kurzu zameraného na geometriu trojuholníka dosahujú lepšie výsledky v teste vedomostí a zručností, ako žiaci vyučovaní klasicky.

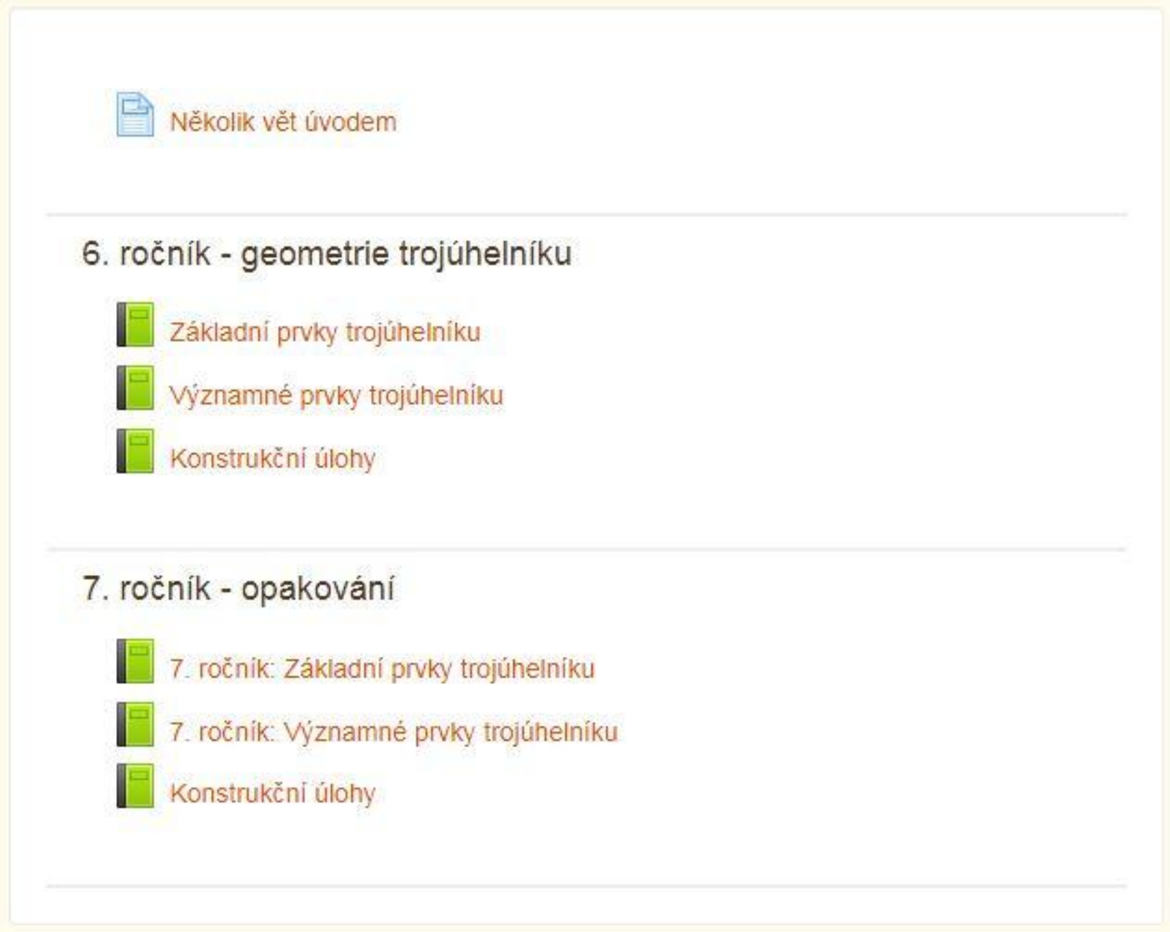
3 ZVOLENÉ METÓDY SPRACOVANIA

Pri spracovaní dizertačnej práce boli použité nasledujúce metódy:

1. Obsahová analýza a komparácia učiva geometrie na základných školách podľa Štátneho vzdelávacieho programu, platného na Slovensku a Rámcového vzdělávacího plánu, platného v Českej republike.
2. Obsahová analýza a komparácia tematických celkov zameraných na učivo o trojuholníkoch na II. stupni základných škôl podľa Štátneho vzdelávacieho programu, platného na Slovensku a Rámcového vzdělávacího plánu, platného v Českej republike.
3. Obsahová analýza učiva o trojuholníkoch obsiahnutého v učebniciach, pracovných zošitoch a metodických príručkách, používaných na školách, kde prebiehal predvýskum a následne pedagogický výskum, za účelom prípravy elektronického kurzu.
4. Syntéza poznatkov získaných v bode 3. za účelom vytvorenia metodickej príručky pre prácu učiteľov s elektronický kurzom.
5. Pozorovanie priebehu vyučovania zamerané na kooperáciu učiteľa a žiakov pri práci s elektronickým kurzom.
6. Prirodzený pedagogický experiment, korigovaný za základe analýzy predvýskumu, s meraním výsledkov prostredníctvom testov.
7. Dotazníková metóda, korigovaná na základe analýzy predvýskumu, za účelom zistenia názorov žiakov na applety obsiahnuté v elektronickom kurze.
8. Matematické spracovanie získaných dát prostredníctvom štatistických metód používaných pri pedagogických experimentoch.
9. Syntéza poznatkov získaných v prechádzajúcich bodoch za účelom stanovenia platnosti hypotéz a odporúčaní pre pedagogickú prax.

4 ELEKTRONICKÝ KURZ TROJÚHELNÍK NA ZŠ

Elektronický kurz (ďalej e-kurz) Trojuholník na ZŠ je určený pre šiesty ročník základných škôl, k použitiu pri preberaní tematického celku Trojuholník. E-kurz je dostupný na odkaze https://lms.umb.sk/enrol/index.php?id=2220 alebo „ručne“ po načítaní stránky https://lms.umb.sk a preklikaní sa cez: Fakulta prírodných vied (Faculty of Natural Sciences), Katedra matematiky, Učiteľské štúdium, Didaktika matematiky a Trojúhelník na ZŠ. Pre vstup do e-kurzu je požadované prihlásenie sa cez hosťovský prístup a zadanie hesla „TZS“. Po prihlásení sa zobrazí úvodná stránka e-kurzu, ktorá je ukázaná na obrázku.

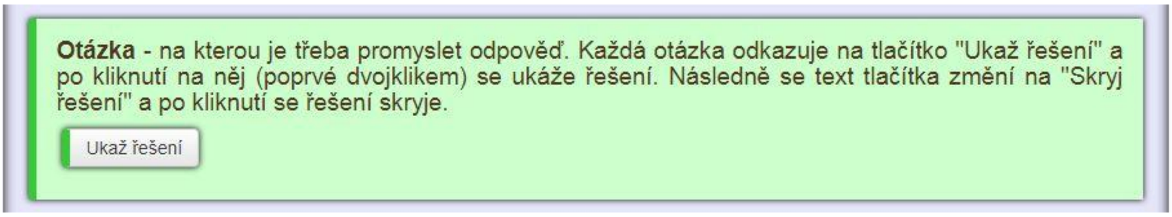


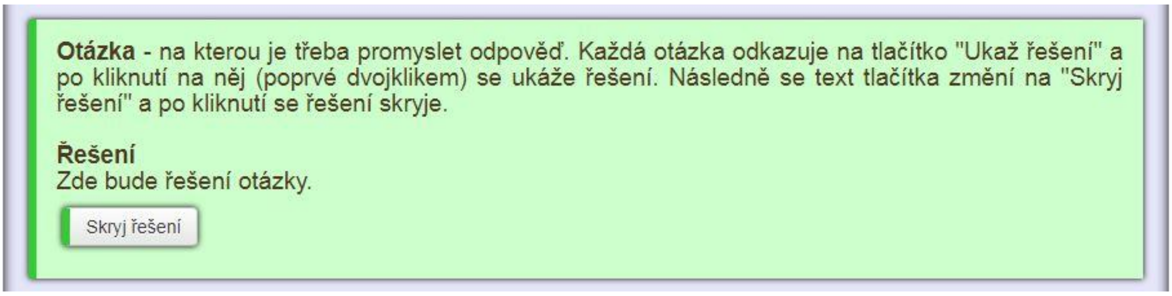
Celý kurz je v českom jazyku, pretože pedagogický výskum prebiehal na českých základných školách. Táto kapitola môže učiteľom slúžiť aj ako metodická príručka pre prácu s e-kurzom. Applety sú zobrazené v rozpracovanom stave tak, aby bolo možné si ich celkovo predstaviť.

Na začiatku je časť Několik vět úvodem, kde je postupne uvedené, ako pracovať s týmto e-kurzom. E-kurz obsahuje farebne zvýraznené polia. Červenou farbou sú zvýraznené nové poznatky, s ktorými sa žiak stretáva prvý krát.

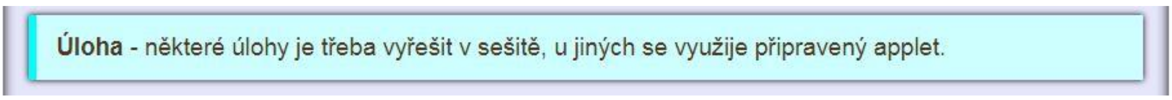
Žltou farbou sú zvýraznené pripomenutia učiva, ktoré už žiaci preberali, ale mali by si ho pred ďalším postupom pripomenúť.

Zelenou farbou sú zvýraznené otázky. Každá otázka obsahuje tlačidlo na ukázanie riešenia – odpovede. Po kliknutí naň sa zobrazí text riešenia a po opätovnom kliknutí sa text riešenia skryje.



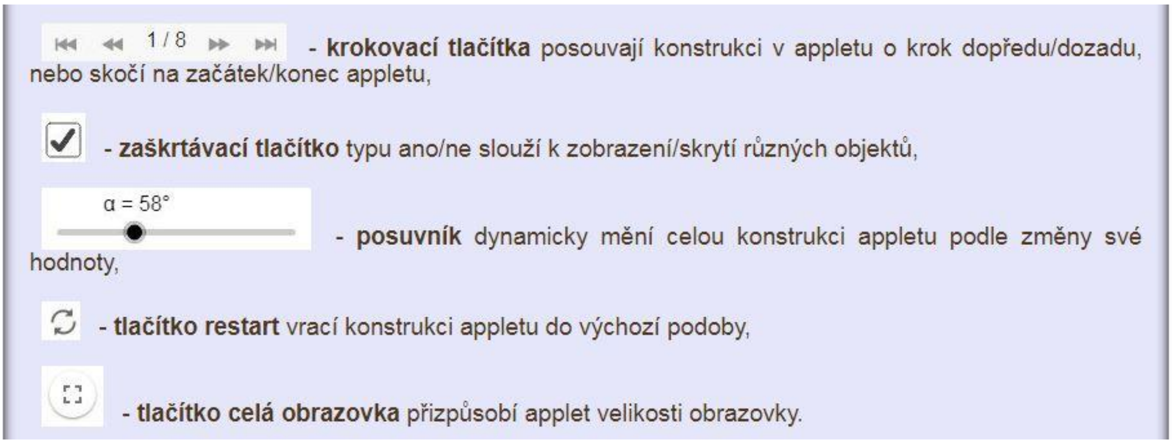


Modrou farbou sú zvýraznené úlohy, ktoré majú žiaci vyriešiť. Niektoré úlohy vyžadujú zapísať riešenie do zošita, pri niektorých stačí len slovné riešenie. K úlohe sa často viaže applet, ktorý je potrebné pri riešení úlohy využiť.



Applet je väčšinou jednoduchá aplikácia, ktorá sa spúšťa cez iný program. Na rozdiel od programu, v ktorom bola vytvorená, má obmedzené práva úprav a taktiež niektoré funkcie. Appletom môžu byť napríklad online hry na webových stránkach, videá na stránke YouTube a podobne.

Applety je možné ovládať viacerými spôsobmi. Tie spôsoby, ktoré boli použité v e-kurze, sú popísané na nasledujúcom obrázku. Tlačidlo Celá obrazovka bolo automaticky pridané systémom Moodle, ale po kliknutí naň sa nič nedeje.



Ďalej je časť 6. ročník – geometria trojuholníku, ktorá sa delí na tri kapitoly:

- Základné prvky trojuholníku,
- Významné prvky trojuholníku,
- Konštrukčné úlohy.

A následne časť 7. ročník – opakovanie, ktorá má tiež tri kapitoly, ale ich obsah bol prispôsobený predvýskumu v rámci opakovania učiva o trojuholníkoch v 7. ročníku.

4.1 Základné prvky trojuholníka

Za základné prvky trojuholníka považujeme jeho vrcholy, strany, vnútorné a vonkajšie uhly. Táto časť sa venuje:

- zavedeniu pojmu trojuholník,
- pomenovaniu jeho vrcholov a strán,
- vzťahu medzi vnútornými a vonkajšími uhlami,

- súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku,
- rozdeleniu trojuholníkov podľa veľkostí ich strán a podľa veľkostí ich vnútorných uhlov,
- trojuholníkovej nerovnosti,
- bližšie oboznamuje s rovnoramenným a rovnostranným trojuholníkom a prezentuje rôzne kombinácie trojuholníkov.

4.1.1 Zavedenie pojmu

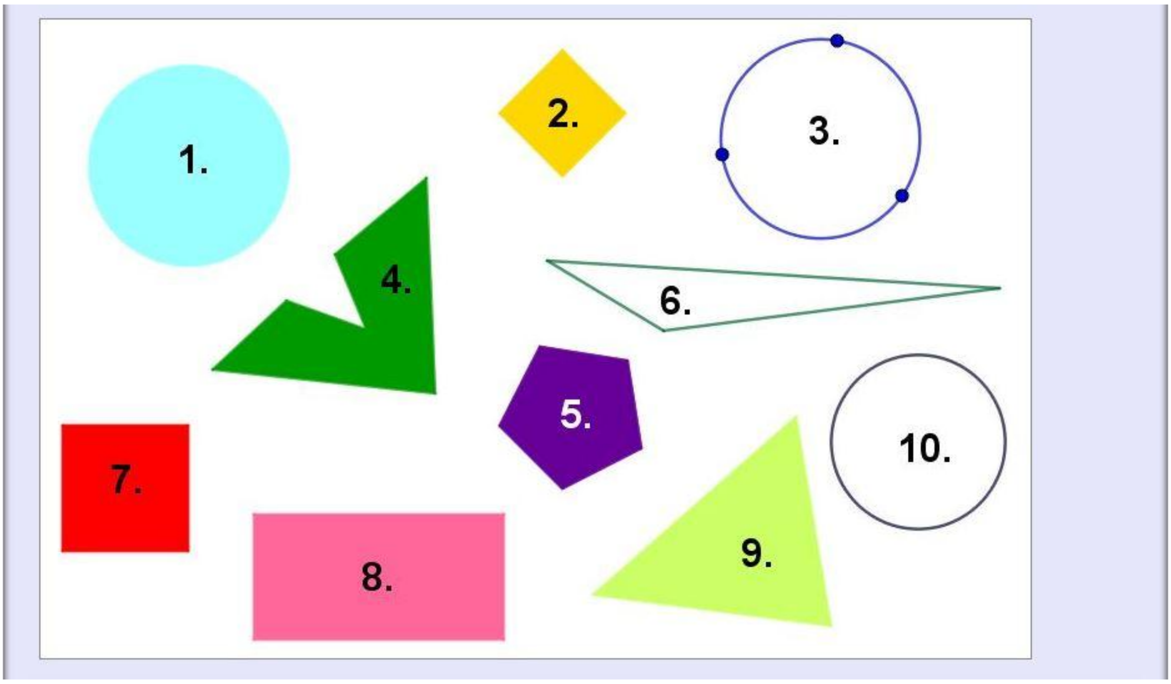
U každého z následujících útvarů rozhodni, zda je nebo není trojúhelník a proč.

Řešení

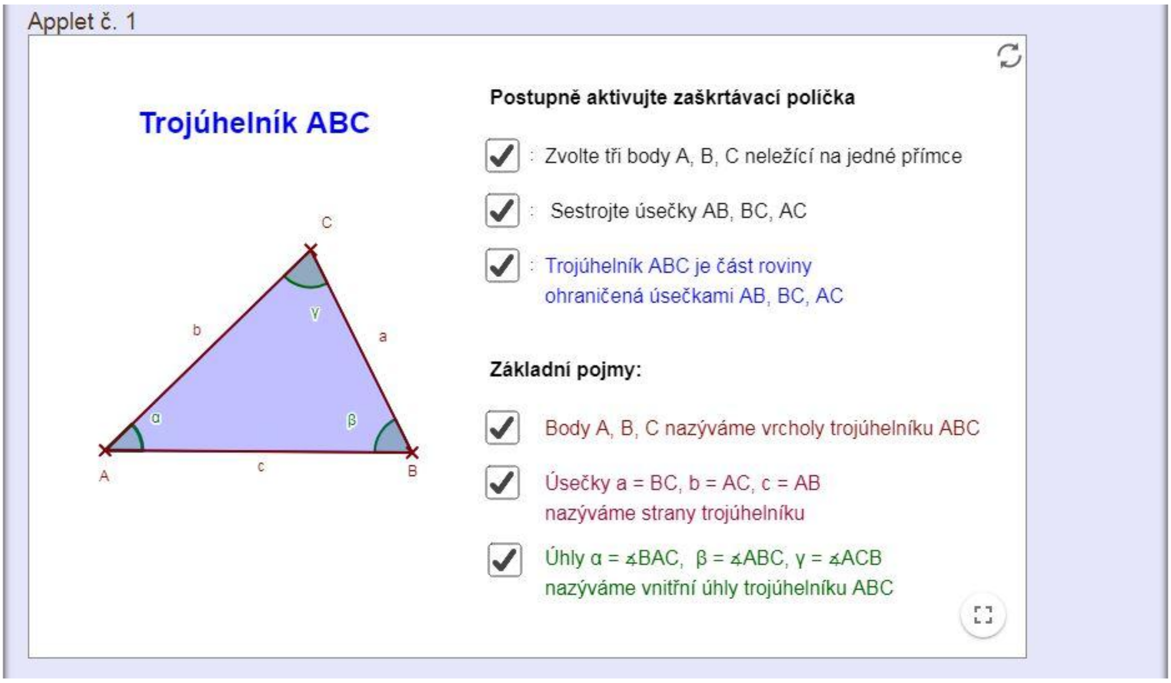
- 1. Ne, je to kruh.
- 2. Ne, je to čtverec.
- 3. Ne, je to kružnice se třemi body.
- 4. Ne, je to šestiúhelník.
- 5. Ne, je to pětiúhelník.
- 6. Ne, jsou to tři úsečky.
- 7. Ne, je to čtverec.
- 8. Ne, je to obdélník.
- 9. Ano, je to trojúhelník.
- 10. Ne, je to kružnice.

Při rýsování na papír vnitřek trojúhelníku nevybarvujeme, ale vždy si musíme uvědomit, že trojúhelník vnitřek má.

Skryj řešení



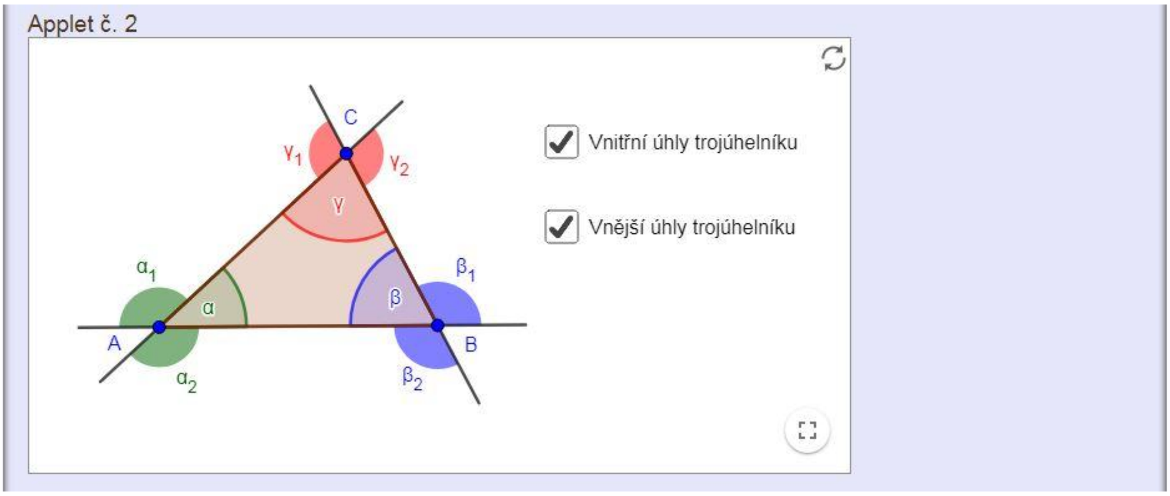
Žiak pravdepodobne odpovie, že útvary 6. a 9. sú trojuholníky. Učiteľ by sa mal spýtať, aký je rozdiel medzi útvarom 1. (kruh) a útvarom 10. (kružnica). Po tejto otázke by si žiak mal uvedomiť, že len útvar 9. je trojuholník.



V applete č. 1 sa postupne zaškrtávajú políčka a týmto spôsobom sa zobrazujú jednotlivé prvky. Zaškrtnutím políčka sa prvok zobrazí, odstránením zaškrtnutia prvok zmizne a tým je možné zvýrazňovať konkrétne prvky. Vrcholmi *A*, *B*, *C* môže žiak pohybovať a meniť tak tvar trojuholníka. Označenie jednotlivých prvkov sa nemení, strana *c* je vždy strana *AB*, uhol *β* je vždy uhol ∡*ABC*, a podobne.

> Načrtněte trojúhelník *ABC* a vyznačte 2 vnitřní body, 2 vnější body a 2 hraniční body.

Žiak si načrtne ľubovoľný trojuholník, napr. trojuholník *ABC*. Vyznačí dva body, ktoré sú vo vnútri trojuholníka, dva body ležiace mimo trojuholník a dva body ležiace na stranách trojuholníka. Všetkých šesť bodov žiak pomenuje.



V applete je možné zaškrtnúť vnútorné uhly, vonkajšie uhly, alebo oboje zároveň. K vnútorným uhlom sú prislúchajúce vonkajšie uhly rovnako farebne vyznačené. Ak žiak pohybuje niektorým vrcholom (napr. *B*), môže sledovať zmenu veľkosti uhlov. Ak sa vnútorný uhol zmenšuje, prislúchajúce vonkajšie uhly sa zväčšujú a naopak, ak sa vnútorný uhol zväčšuje, prislúchajúce vonkajšie uhly sa zmenšujú.

Zapište z předchozího appletu všechny dvojice úhlů, z nichž jeden je vnitřní úhel a druhý je přiléhající vnější úhel.

Žiak by mal zapísať týchto šesť dvojíc: α a α_1, α a α_2, β a β_1, β a β_2, γ a γ_1, γ a γ_2.

Jaký bude součet velikostí vnějšího a vnitřního úhlu při stejném vrcholu?

Řešení
Součet velikostí vnějšího a vnitřního úhlu při stejném vrcholu je 180°.
Vnější úhly trojúhelníku jsou **vedlejší** k vnitřním úhlům trojúhelníku.

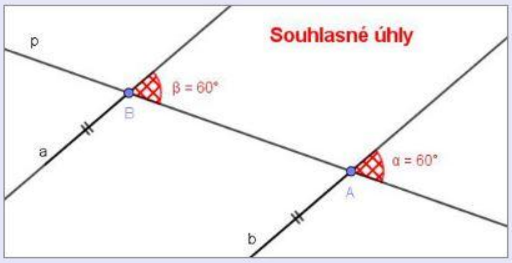
Skryj řešení

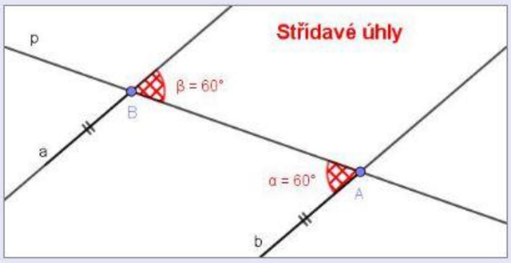
Žiak by si mal uvedomiť, že vonkajší a vnútorný uhol pri rovnakom vrchole sú uhly vedľajšie a súčet veľkostí vedľajších uhlov je 180°.

4.1.2 Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku

Připomeňme si:

Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b, které protíná přímka p v bodech A, B. Úhly α, β nazýváme **souhlasné**, popř. **střídavé**.
Souhlasné a střídavé úhly mají stejnou velikost.

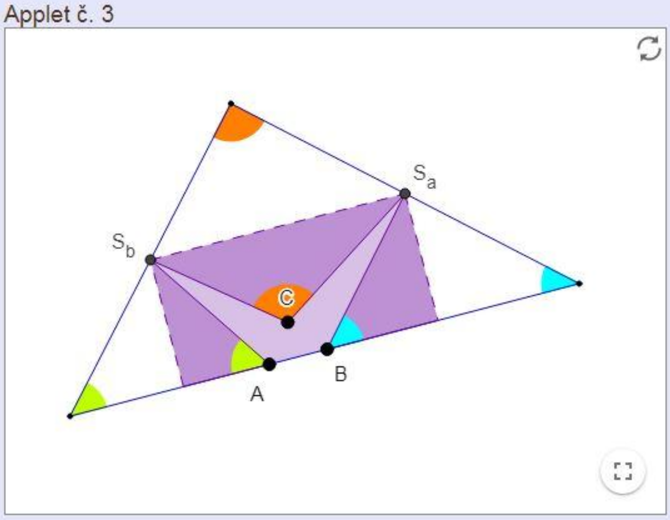




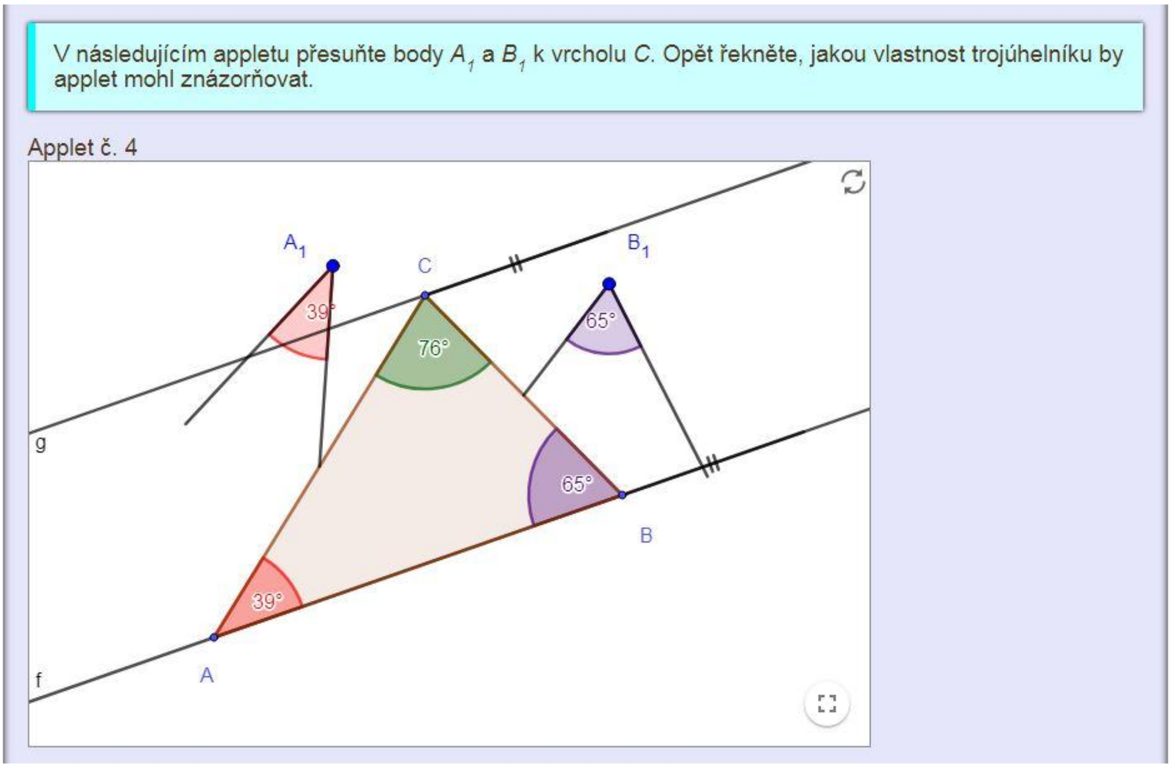
Žiak by sa mal rozpamätať na vlastnosti súhlasných a striedavých (prípadne vrcholových) uhlov.

V appletu č. 3 pohybujte vrcholy A, B a C. Řekněte, jakou vlastnost trojúhelníku by applet mohl znázorňovat.

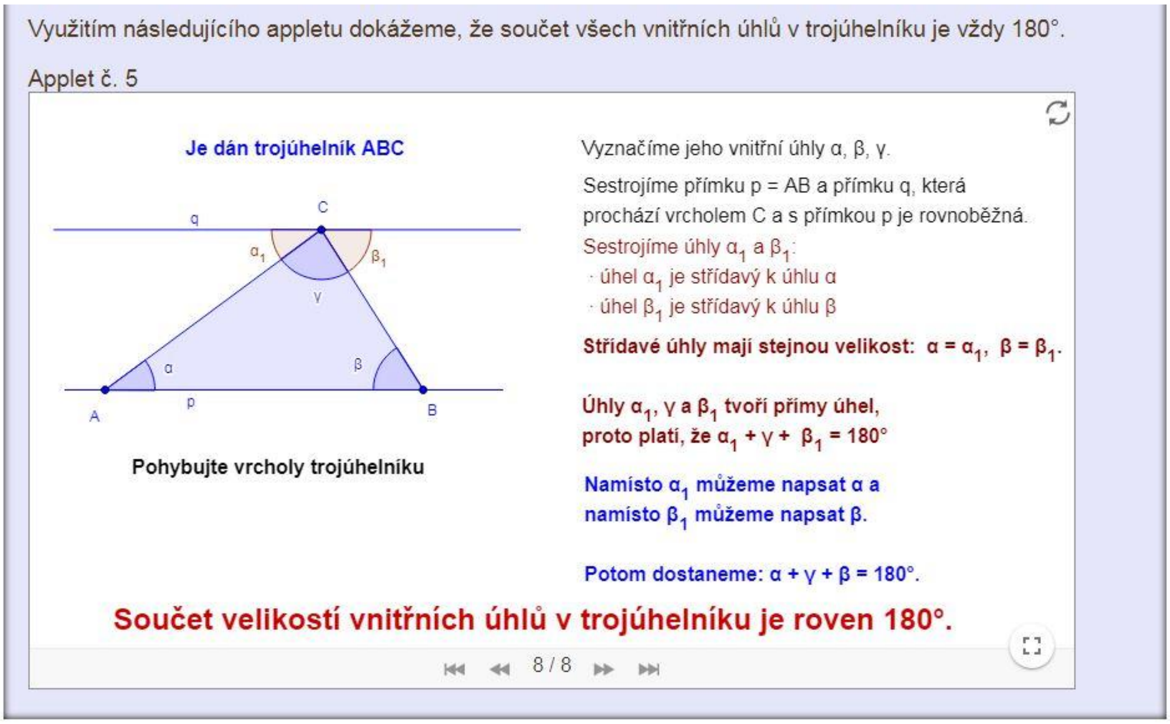
Applet č. 3



Na začiatku sú v trojuholníku v applete farebne vyznačené vnútorné uhly. Pri pohnutí niektorým vrcholom sa na stranách trojuholníka objavia body S_a – stred strany a a S_b – stred strany b. vrcholy je možné posúvať po „neviditeľných“ úsečkách. Ich jedným krajným bodom je vrchol pôvodného trojuholníka a druhým krajným bodom je bod na strane c, ktorý je osovo súmerný s vrcholom C pôvodného trojuholníka podľa osi S_aS_b. Tento bod však nie je vyznačený. Pohyblivé vrcholy sa presunú do tohto bodu. Trojuholník vyzerá ako papierová skladačka, v ktorej sa prekladajú vrcholy. Po presunutí vrcholov do jedného bodu na strane *c* sa zameriame na uhly. Máme tri uhly pôvodného trojuholníka a tri uhly preloženého trojuholníka. Odpovedajúce si uhly, vyznačené rovnakou farbou, sú zhodné (majú rovnakú veľkosť). Žiak by si mal všimnúť, že súčet troch preložených uhlov je uhol priamy. Keďže odpovedajúce si uhly majú rovnakú veľkosť, mohol by žiak vysloviť myšlienku, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°.



Žiak ma presunúť vrcholy A_1 a B_1 uhlov k vrcholu *C* trojuholníka. Vrcholy A_1 a B_1 sa pohybujú po polkružniciach, zostrojenými nad stranami *a* a *b*. Tentokrát už vnútorné uhly trojuholníka majú konkrétne veľkosti. Po presunutí uhlov by mal žiak zistiť, že súčet uhlov pri vrchole *C* je 180° a zároveň je to aj súčet vnútorných uhlov v trojuholníku. Pohybom vrcholov *A*, *B*, *C* je možné zmeniť tvar trojuholníka a zároveň aj veľkosti vnútorných uhlov a postup opakovať. Opäť by mal žiak vysloviť myšlienku, že súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°. Môže však nastať nepresnosť pri zaokrúhľovaní (napr. veľkosti uhlov: 69°38´, 54°48´ a 55°34´ applet zaokrúhli na 70°, 55° a 56° a ich súčet už je 181°).

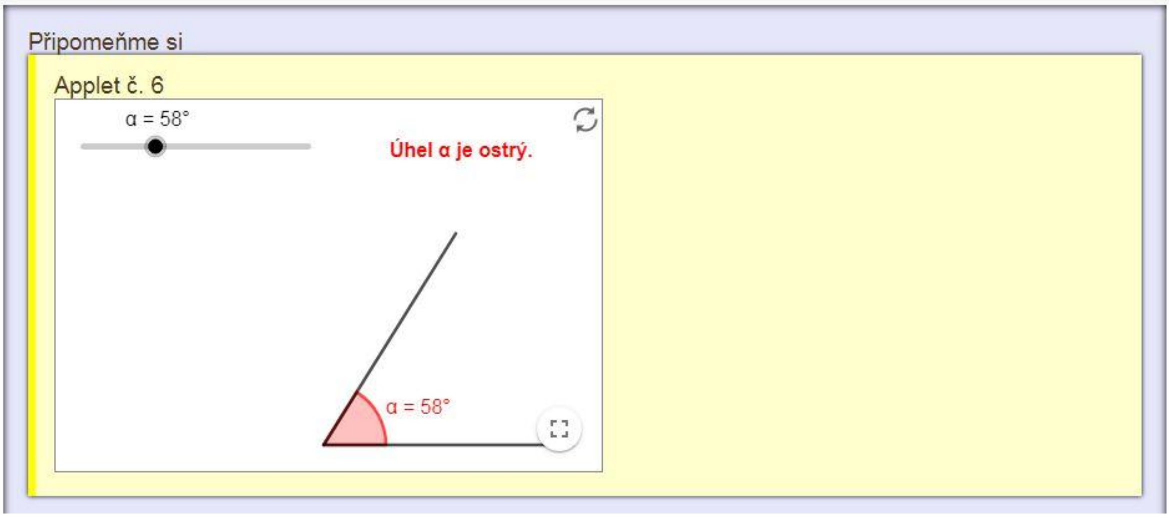


V applete je ilustrovaný dôkaz vety „Súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je vždy 180°.“. Jednotlivé kroky v applete sú nasledovné:

1. Na začiatku je zobrazený trojuholník *ABC*.
2. Zobrazí sa text „Vyznačíme jeho vnitřní úhly α, β, γ.“ a v trojuholníku sa vyznačia uhly α, β a γ.
3. Zobrazí sa text „Sestrojíme přímku $p = AB$ a přímku q, která prochází vrcholem C a s přímkou p je rovnoběžná.“ a zobrazí sa priamka q prechádzajúca bodom C a rovnobežná s priamkou AB.
4. Zobrazí sa text „Sestrojíme úhly α_1 a β_1: - úhel α_1 je střídavý k úhlu α, - úhel β_1 je střídavý k úhlu β“ a hnedou farbou sa vyznačia uhly α_1 a β_1 pri vrchole C.
5. Zobrazí sa text „Střídavé úhly mají stejnou velikost: $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$. Úhly α_1, γ a β_1 tvoří přímý úhel, proto platí, že $\alpha_1 + \gamma + \beta_1 = 180°$“.
6. Zobrazí sa text „Namísto α_1 můžeme napsat α a namísto β_1 můžeme napsat β. Potom dostaneme: $\alpha + \gamma + \beta = 180°$.“.
7. Zobrazí sa text „Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven 180°.“.
8. Zobrazí sa text „Pohybujte vrcholy trojúhelníku“. Pri pohybovaní vrcholmi *A*, *B*, *C* sa trojuholník mení a menia sa aj veľkosti vnútorných uhlov. Je možné

na začiatku v prvom kroku trojuholník zmeniť a potom postup opakovať (napr. nastaviť trojuholník na tupouhlý, ...).

4.1.3 Rozdelenie trojuholníkov podľa veľkosti vnútorných uhlov



Žiak si má appletom pripomenúť typy uhlov. Zahrnutý je len ostrý, pravý a tupý uhol. Uhol nulový, priamy a väčší ako priamy nie je zahrnutý. Posúvaním posuvníka so zobrazenou veľkosťou uhla je možné veľkosť uhla meniť. Zostrojený uhol sa mení. Od 1° do 89° je uhol vyznačený červenou farbou a zobrazí sa text „Úhel *α* je ostrý.“ Pri veľkosti 90° je uhol vyznačený zelenou farbou a zobrazí sa zelený text „Úhel *α* je pravý.“. Od 91° do 179° je uhol vyznačený modrou farbou a zobrazí sa text „Úhel *α* je tupý.“.

Existuje trojúhelník, který má dva tupé vnitřní úhly?

Řešení
Neexistuje, protože součet vnitřních úhlů v takovémto trojúhelníku by byl větší než 180° (kupř. trojúhelník s velikostmi vnitřních úhlů 91°, 92° a 13° by měl součet velikostí úhlů 196°) a to nemůže nastat.

Skryj řešení

Je vhodné, aby si žiaci črtali obrázky do zošita.

Existuje trojúhelník, který má jen jeden ostrý vnitřní úhel?

Řešení

Když je jeden vnitřní úhel ostrý, zbývající dva úhly mohou být:

- pravý a pravý - součet vnitřních úhlů je více než 180° (kupř. 11° + 90° + 90° = 191°) a takový trojúhelník neexistuje,
- pravý a tupý - součet vnitřních úhlů je více než 180° (kupř. 11° + 90° + 95° = 196°) a takový trojúhelník neexistuje,
- tupý a tupý - součet vnitřních úhlů je více než 180° (kupř. 11° + 95° + 95° = 201°) a takový trojúhelník neexistuje.

Skryj řešení

Opäť si môžeme načrtnúť obrázok. Začneme jedným ostrým uhlom $\measuredangle BAX$ a z bodu B budeme viesť polpriamku BY. Uhol $\measuredangle ABY$ už nemôže byť ostrý, preto bude pravý alebo tupý. Ak bude pravý, na tretí uhol ostane menej ako 90°, a preto tretí uhol bude ostrý. Ak bude $\measuredangle ABY$ tupý, na tretí uhol tiež ostane menej ako 90°, a preto tretí uhol bude ostrý. Dostali by sme trojuholník s jedným pravým a dvoma ostrými uhlami alebo trojuholník s jedným tupým a dvoma ostrými uhlami. Ani jedna možnosť nevyhovuje zadaniu otázky, preto trojuholník s jedným ostrým uhlom neexistuje.

Trojúhelník má dva ostré vnitřní úhly. Co se dá říci o zbývajícím vnitřním úhlu?

Řešení

Třetí vnitřní úhel může být:

- ostrý (kupř. trojúhelník s velikostmi vnitřních úhlů 35°, 70° a 75°),
- pravý (kupř. trojúhelník s velikostmi vnitřních úhlů 30°, 60° a 90°),
- tupý (kupř. trojúhelník s velikostmi vnitřních úhlů 15°, 45° a 120°).

Skryj řešení

Žiak môže uvažovať aj takto – súčet vnútorných uhlov je 180°; ak súčet dvoch ostrých uhlov je:

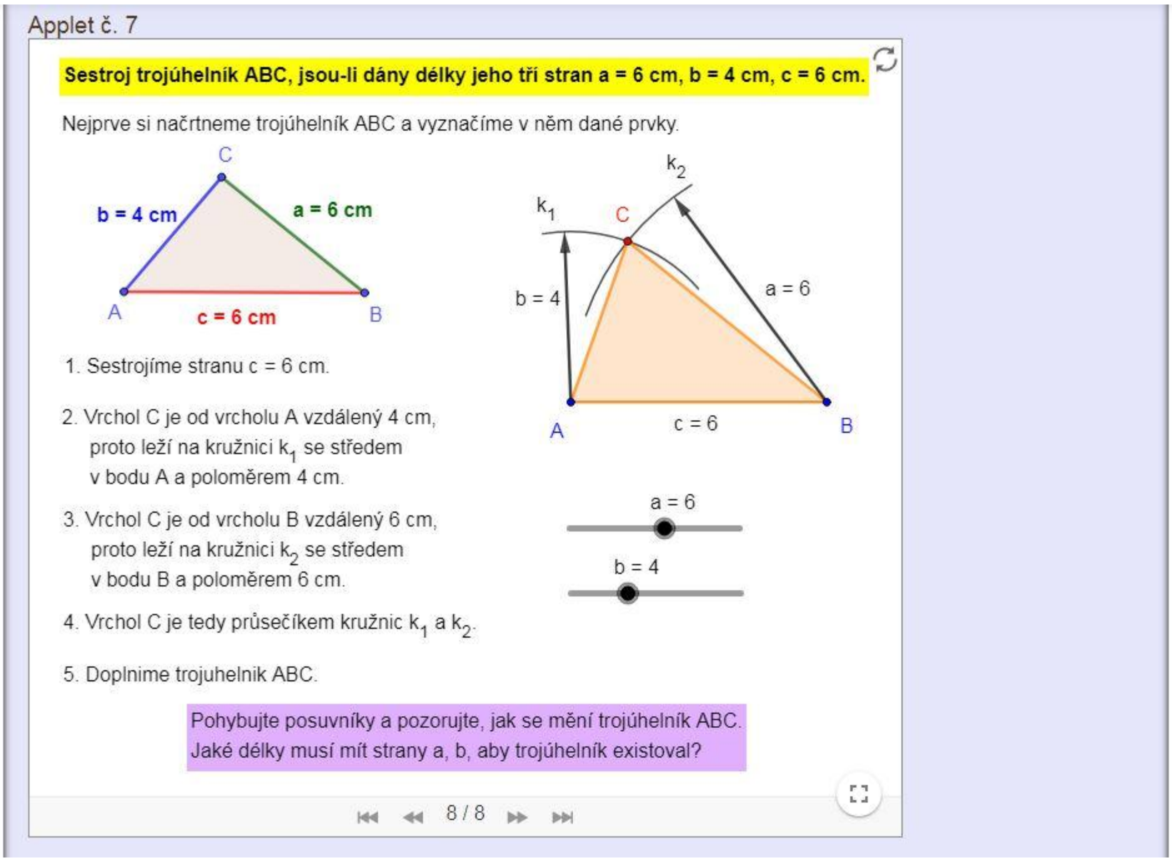
- menej ako 90°, potom tretí uhol má viac ako 90° → tretí uhol je tupý,
- presne 90°, potom tretí uhol má tiež 90° → tretí uhol je pravý,
- viac ako 90°, potom tretí uhol má menej ako 90° → tretí uhol je ostrý.

4.1.4 Trojuholníková nerovnosť

Žiak si pripomenie označovanie vrcholov a strán trojuholníka.

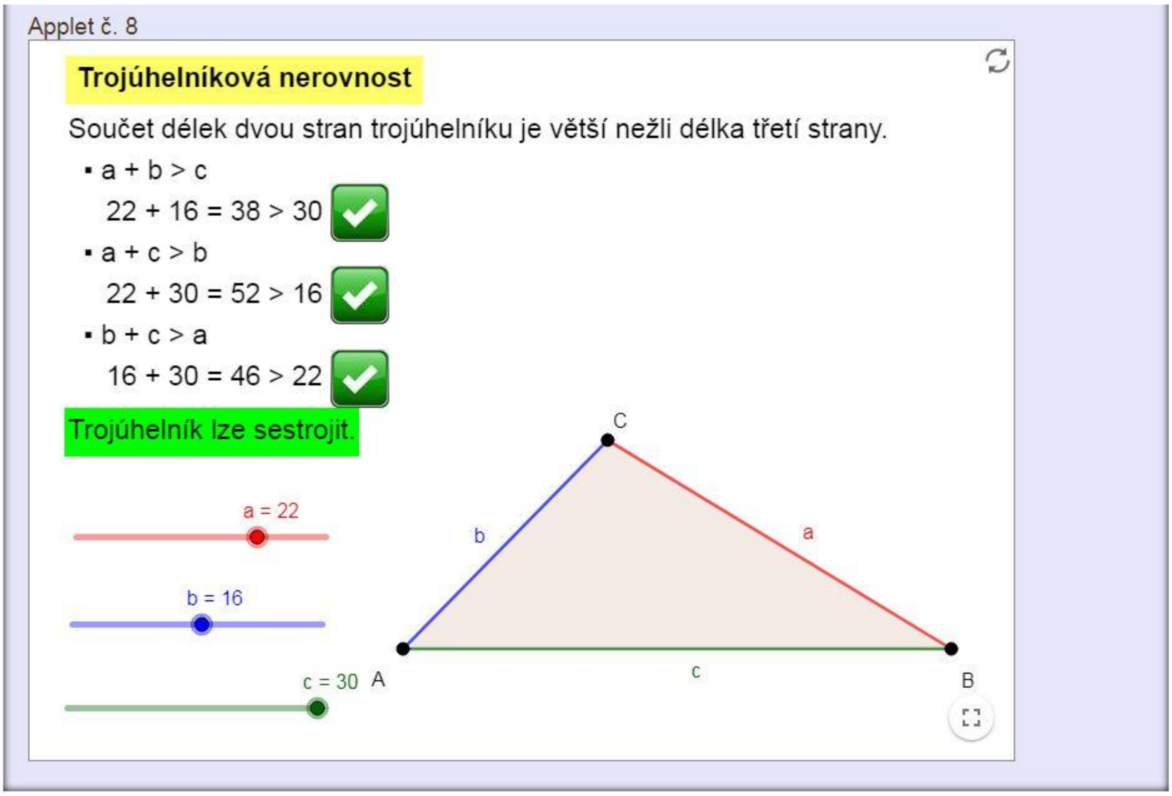
> Načrtni trojúhelník *KLM* a správně označ jeho strany.

Žiak načrtne trojuholník, vrcholy označí písmenami *K*, *L*, *M* a správne označí strany: strana *k* = *LM*, *l* = *KM* a *m* = *LK*.



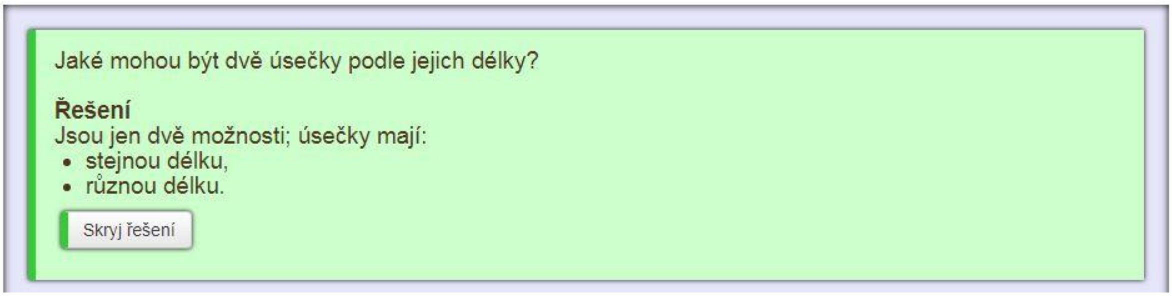
Applet ilustruje postup riešenia konštrukčnej úlohy. Jednotlivé kroky v applete sú nasledovné:

1. Na začiatku je vidieť zadanie úlohy a dva posuvníky (pre stranu *a* a pre stranu *b*). Posuvníkmi môžeme meniť dĺžku strán v zadaní (a automaticky aj v náčrte, postupe konštrukcie a v konštrukcii). Je vhodné začať s takými dĺžkami strán, aby sa trojuholník dal zostrojiť.
2. Zobrazí sa text „Nejprve si načrtneme trojúhelník *ABC* a vyznačíme v něm dané prvky." a zobrazí sa náčrt, kde sú farebne vyznačené dané prvky.
3. Zobrazí sa text „1. Sestrojíme stranu c = 6 cm." a zostrojí sa úsečka $c = AB$ s dĺžkou 6 cm. Je vhodné spýtať sa žiakov, ako by hľadali vrchol *C*. Žiaci by mali prísť na to, že bod vzdialený o nejakú danú vzdialenosť od iného bodu leží na kružnici so stredom v danom bode a polomerom rovnajúcim sa tejto vzdialenosti. Najskôr nech vychádzajú z toho, že vrchol *C* je od vrcholu *A* vzdialený 4 cm → kružnica k_1 so stredom v bode *A* a polomerom b = 4 cm. Obdobne aj pre kružnicu k_2 z bodu *B* a polomerom a = 6 cm.
4. Zobrazí sa text „2. Vrchol *C* je od vrcholu *A* vzdálený 4 cm, proto leží na kružnici k_1 se středem v bodu *A* a poloměrem 4 cm." a v konštrukcii sa zobrazí časť kružnice k_1 s ilustratívnou šípkou udávajúcou polomer kružnice k_1 podľa posuvníka.
5. Zobrazí sa text „3. Vrchol *C* je od vrcholu *B* vzdálený 6 cm, proto leží na kružnici k_2 se středem v bodu *B* a poloměrem 6 cm." a v konštrukcii sa zobrazí časť kružnice k_2 s ilustratívnou šípkou udávajúcou polomer kružnice k_2 podľa posuvníka. Žiaci by mali prísť na to, že hľadaný vrchol *C* je priesečník kružníc k_1 a k_2, pretože musí spĺňať obidve podmienky zároveň.
6. Zobrazí sa text „4. Vrchol *C* je tedy průsečíkem kružnic k_1 a k_2." a zobrazí sa vrchol *C* vyznačený červenou farbou.
7. Zobrazí sa text „5. Doplnime trojúhelník *ABC*." a v konštrukcii sa zobrazí oranžový trojuholník *ABC*.
8. Zobrazí sa text „Pohybujte posuvníky a pozorujte, jak se mění trojúhelník *ABC*. Jaké délky musí mít strany *a*, *b*, aby trojúhelník existoval?". Žiak by mal posúvať posuvníkmi (najskôr pre stranu *a*, potom pre stranu *b*; strana *c* má pevnú dĺžku) a pozorovať, kedy trojuholník existuje (je zostrojený) a kedy nie (nie je zostrojený). Mal by prísť k záveru, že pre existenciu trojuholníku platí, že súčet dĺžok strán $a + b$ musí byť väčší než dĺžka strany *c*. Ak je rovnaký, tak body *A*, *B*, *C* ležia na jednej priamke, a ak je menší, tak kružnice k_1 a k_2 nemajú priesečník, teda hľadaný vrchol *C*.



Applet sa ovláda posuvníkmi, na ktorých sa menia dĺžky strán *a*, *b*, *c* trojuholníka *ABC*. Ďalej je tam znovu text trojuholníkovej nerovnosti a pre jednotlivé nerovnosti je uvedený ich prepis s dĺžkami nastavenými na posuvníku. Napríklad v prvej nerovnosti $a + b > c$ je pre $a = 22$, $b = 16$, $c = 30$ uvedené 22 + 16 = 38 > 30. Táto nerovnosť je platná, preto je za ňou odškrtnutá zelená ikonka. Ak sa posuvníkom zmenia dĺžky napríklad na $a = 14$, $b = 16$, $c = 30$, tak nerovnosť 14 + 16 = 30 > 30 nie je splnená, zobrazí sa červená ikonka s X a trojuholník sa nezostrojí. Rovnako to funguje aj pre ostatné nerovnosti. Žiak by si mal všimnúť, že pre existenciu trojuholníku musia byť splnené všetky tri nerovnosti; ak hociktorá nie je splnená, tak trojuholník neexistuje. Učiteľ sa môže spýtať, či je nutné kontrolovať vždy všetky tri nerovnosti. Žiaci by mali prísť na to, že stačí porovnať súčet dĺžok dvoch kratších strán s dĺžkou najdlhšej strany.

4.1.5 Rozdelenie trojuholníkov podľa veľkosti strán

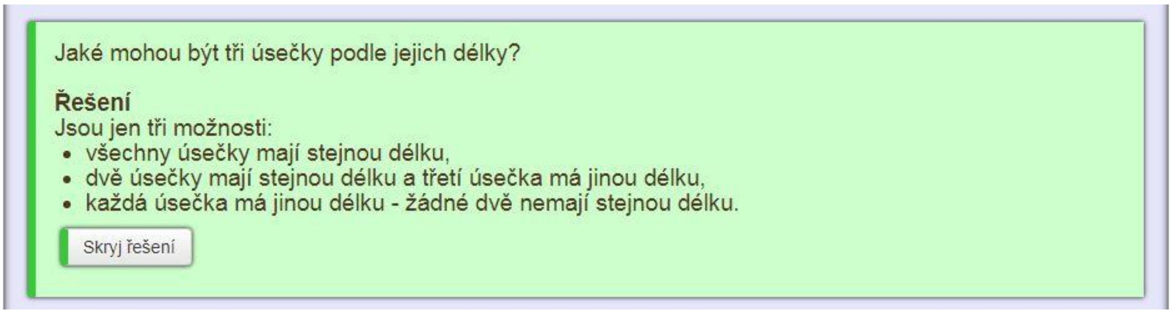

Jaké mohou být dvě úsečky podle jejich délky?

Řešení
Jsou jen dvě možnosti; úsečky mají:

- stejnou délku,
- různou délku.

Skryj řešení

Žiak by si mal uvedomiť, že pri porovnávaní dĺžok dvoch úsečiek už nie je iná možnosť. Dve úsečky buď sú, alebo nie sú rovnako dlhé (veľké).


Jaké mohou být tři úsečky podle jejich délky?

Řešení
Jsou jen tři možnosti:

- všechny úsečky mají stejnou délku,
- dvě úsečky mají stejnou délku a třetí úsečka má jinou délku,
- každá úsečka má jinou délku - žádné dvě nemají stejnou délku.

Skryj řešení

Pri tejto otázke sa porovnávajú dĺžky troch úsečiek. Žiaci by mali vymenovať všetky tri možnosti a dodať, že iná možnosť už nie je. Na to je vhodné naviazať trojuholníkom, ktorého strany sú úsečky a spýtať sa, aké môžu byť tri strany trojuholníka podľa dĺžky. Žiaci by mali transformovať odpoveď pre strany trojuholníka. Učiteľ by mal doplniť názvy trojuholníkov – rovnostranný, rovnoramenný, rôznostranný (v češtine sa používa pojem „obecný“) pre každú možnosť dĺžok strán.

Pre šikovnejších: V akom vzťahu môžu byť štyri úsečky podľa dĺžky?

- Všetky štyri úsečky sú rovnako dlhé.
- Tri úsečky sú rovnako dlhé a jedna je iná.
- Dve úsečky sú rovnako dlhé a dve ďalšie sú navzájom rovnaké.
- Dve úsečky sú rovnako dlhé a dve ďalšie sú navzájom rôzne.
- Každá úsečka má inú dĺžku.

Může existovat další skupina trojúhelníků při rozdělení podle velikosti stran?

Řešení
Ne; pro tři velikosti stran trojúhelníku (resp. pro tři čísla: *a*, *b*, *c*) mohou nastat jen tři možnosti:

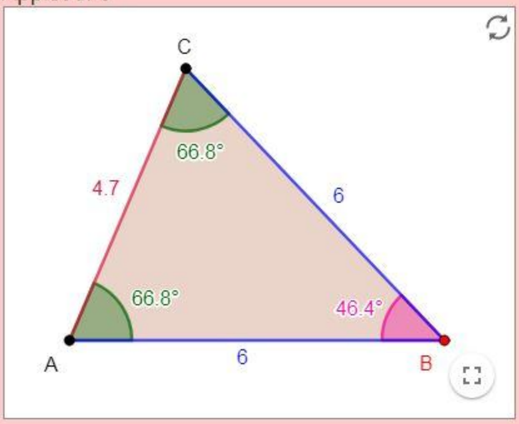
- $a = b = c$ - všechny strany jsou shodné,
- $a = b \neq c$ - dvě strany jsou shodné, třetí je jiná,
- $a \neq b \neq c$ - každá strana je jiná.

Skryj řešení

Žiak by si mal uvedomiť, že situácia je rovnaká ako pri troch úsečkách.

4.1.6 Trojuholník rovnoramenný a rovnostranný

Applet č. 9



Rovnoramenný trojúhelník je trojúhelník, ve kterém dvě strany mají stejnou délku.

- Strany se stejnou délkou nazýváme ramena.
- Třetí stranu nazýváme základna.
- Společný bod ramen nazýváme hlavní vrchol.
- Vnitřní úhly při základně jsou shodné.

V applete sú farebne vyznačené jednotlivé pojmy. Vrcholmi *A* a *B* je možné pohybovať, trojuholník *ABC* je v applete nastavený tak, aby bol vždy rovnoramenný.

Trojúhelník *XYZ* má velikosti vnitřních úhlů: $|\measuredangle ZXY| = 40°$, $|\measuredangle XYZ| = 70°$, $|\measuredangle XZY| = 70°$.
1. Který vrchol trojúhelníku je hlavním vrcholem?
2. Které strany trojúhelníku jsou rameny?
3. Je strana *YX* základnou? Pokud ne, tak která strana je základnou?
4. Které úhly jsou vnitřními úhly při základně?

Řešení
1. Hlavním vrcholem je vrchol *X*.
2. Rameny jsou strany *XY* a *XZ*.
3. Ne, základnou je strana *YZ*.
4. Vnitřními úhly při základně jsou úhly $|\measuredangle XYZ|$ a $|\measuredangle XZY|$.

Skryj řešení

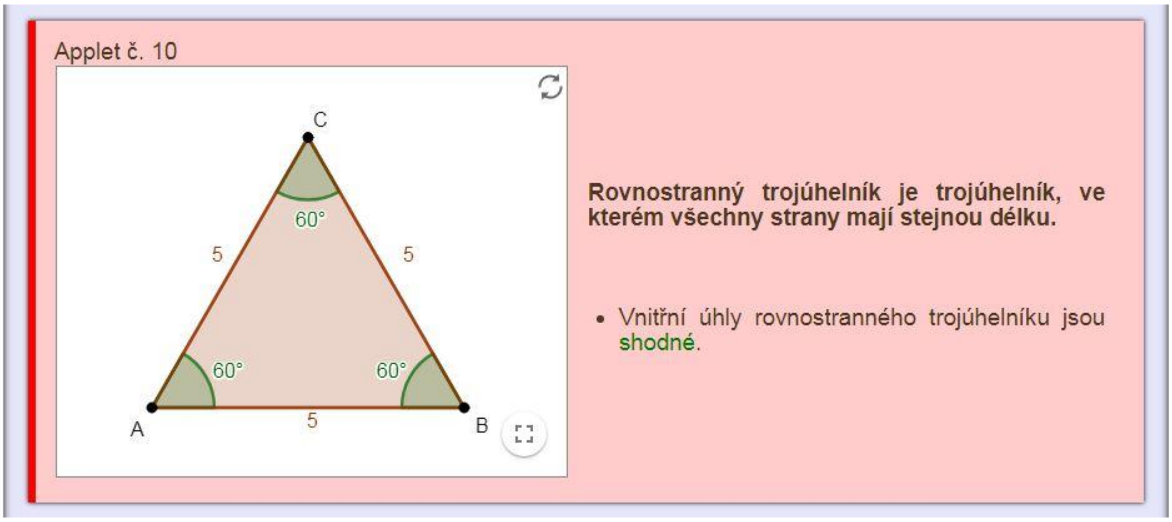
Učiteľ by sa po prečítaní zadania mal spýtať, či trojuholník s takými veľkosťami vnútorných uhlov existuje. Žiaci by mali odpovedať, že áno, pretože súčet daných vnútorných uhlov je 180°. Žiaci by si mali urobiť náčrt a podľa zadania v ňom vyznačiť jednotlivé uhly a vrcholy. Podľa svojho náčrtu by mali odpovedať na otázky.

> Jeden vnitřní úhel v rovnoramenném trojúhelníku má velikost 36°. Jakou velikost mají zbývající dva vnitřní úhly?
>
> **Řešení**
> Mohou nastat dvě možnosti; 36° má:
> - úhel při hlavním vrcholu - zbývající dva vnitřní úhly jsou při základně a každý má velikost 72°.
>   (180° - 36°) : 2 = 144° : 2 = 72°
> - úhel při základně - i druhý úhel při základně má 36° a úhel při hlavním vrcholu má 108°.
>   180° - 36° - 36° = 108°.
>
> Skryj řešení

Žiak by si mal načrtnúť rovnoramenný trojuholník a vyznačiť vnútorný uhol s veľkosťou 36°. Tu by sa mal zaraziť nad tým, že nevie, ktorý uhol má presne vyznačiť, a preto môže byť viac možností riešenia. Môže určiť, že veľkosť 36° má uhol pri hlavnom vrchole a dopočítať veľkosti uhlov pri základni, alebo určí, že 36° má vnútorný uhol pri základni (a teda aj druhý uhol pri základni má 36°) a dopočíta veľkosť uhla pri hlavnom vrchole. Učiteľ sa môže spýtať, akú veľkosť môže mať uhol pri základni. Žiak by si mal uvedomiť, že uhly pri základni musia mať rovnakú veľkosť a teda aj typovo sú rovnaké (dva ostré / dva pravé / dva tupé). Zároveň však z predchádzajúceho výkladu učiva vie, že v trojuholníku môžu byť len dva ostré uhly. Ak by totiž oba uhly pri základni boli pravé alebo tupé už by súčet vnútorných uhlov nebol 180°, ale bol by väčší.

> Jeden vnitřní úhel v rovnoramenném trojúhelníku má velikost 100°. Jakou velikost mají zbývající dva vnitřní úhly?
>
> **Řešení**
> 100° má:
> - úhel při hlavním vrcholu - zbývající dva vnitřní úhly jsou při základně a každý má velikost 40°.
>   (180° - 100°) : 2 = 80° : 2 = 40°
> - úhel při základně - tato možnost nemůže nastat, protože i druhý úhel při základně by měl 100° a to už je více než 180°.
>
> Skryj řešení

Žiak by si už po prečítaní zadania mal uvedomiť, že veľkosť 100° nemôže mať uhol pri základni (lebo aj druhý uhol pri základni by mal veľkosť 100° a súčet vnútorných uhlov v tomto trojuholníku by bol väčší než 180°), preto to musí byť uhol pri hlavnom vrchole. Učiteľ sa môže spýtať, aký je to trojuholník pri rozdelení podľa veľkosti uhlov.



Applet znázorňuje rovnostranný trojuholník, má zobrazené veľkosti strán a vnútorných uhlov. Pohybom vrcholov A a B je možné meniť dĺžky strán. Trojuholník vždy ostáva rovnostranný a vnútorné uhly majú vždy veľkosť 60°.

Zdůvodni, proč má každý vnitřní úhel rovnostranného trojúhelníku velikost 60°.

Řešení
Součet velikostí vnitřních úhlů v každém trojúhelníku je 180°. Rovnostranný trojúhelník má tři shodné vnitřní úhly, proto má každý z nich velikost 180° : 3 = 60°.

Skryj řešení

Žiak by si mal uvedomiť, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180° a keďže vnútorné uhly rovnostranného trojuholníka sú zhodné, tak 180° potrebuje rozdeliť na tri rovnaké časti, 180° : 3 = 60°. Preto má každý vnútorný uhol v rovnostrannom trojuholníku veľkosť 60°.

4.1.7 Rôzne typy trojuholníkov

Žiak by si mal uvedomiť, že trojuholník môže byť ostrouhlý, pravouhlý a tupouhlý a zároveň rovnostranný, rovnoramenný a rôznostranný, čo je celkom deväť možností. Avšak nie všetky možnosti musia existovať. Ak je trojuholník rovnostranný, tak je ostrouhlý; pravouhlý ani tupouhlý byť nemôže. Ostatné kombinácie sú možné, celkovo teda môže vzniknúť sedem možností. Je vhodné vytvoriť tabuľku 3x3 a pre každú kombináciu uviesť, či existuje alebo nie.

4.2 Významné prvky trojuholníka

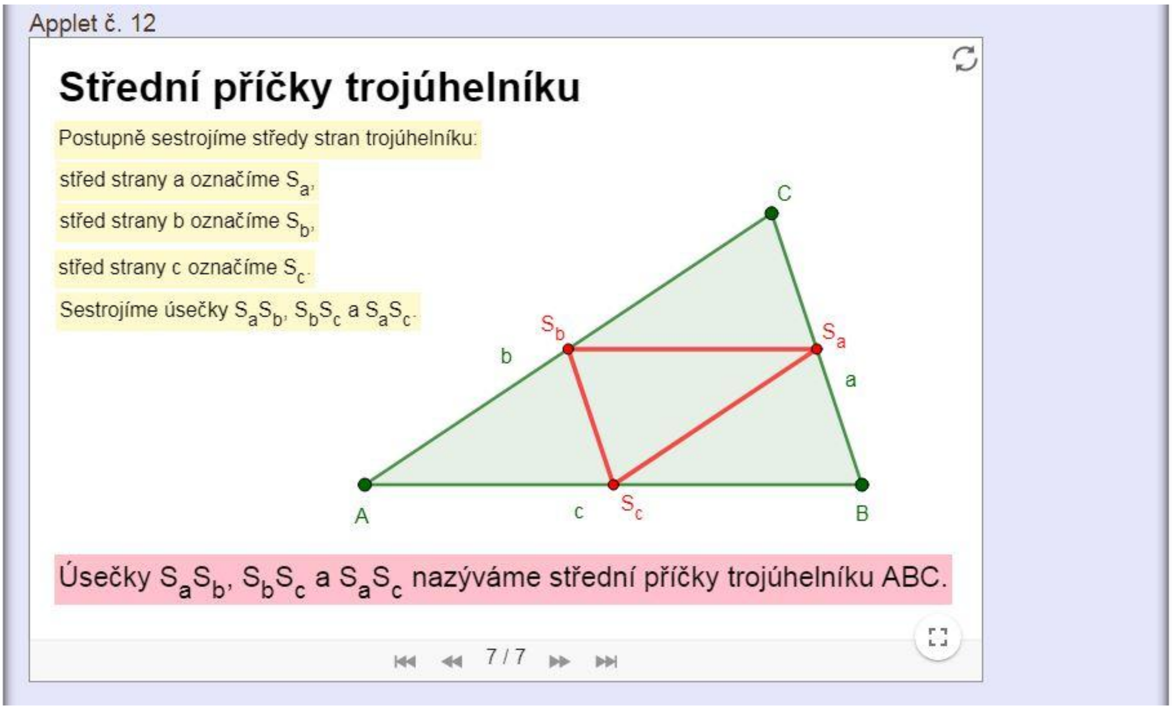
Medzi významné prvky trojuholníka zaraďujeme jeho stredné priečky, výšky a priesečník výšok, ťažnice a ťažisko, opísanú a vpísanú kružnicu. Táto časť sa venuje zavedeniu:

- stredných priečok a ich vlastnostiam,
- výšok, priesečníku výšok a ich vlastnostiam,
- ťažníc, ťažiska a ich vlastnostiam,

- zavedeniu opísanej a vpísanej kružnice a ich vlastnostiam.

Za základné prvky trojuholníka považujeme jeho vrcholy, strany, vnútorné a vonkajšie uhly. Táto časť sa venuje zavedeniu pojmu trojuholník, pomenovaniu jeho vrcholov a strán, vzťahu medzi vnútornými a vonkajšími uhlami, súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku, rozdeleniu trojuholníkov podľa veľkostí ich strán a podľa veľkostí ich vnútorných uhlov, trojuholníkovej nerovnosti, bližšie oboznamuje s rovnoramenným a rovnostranným trojuholníkom a prezentuje rôzne kombinácie trojuholníkov.

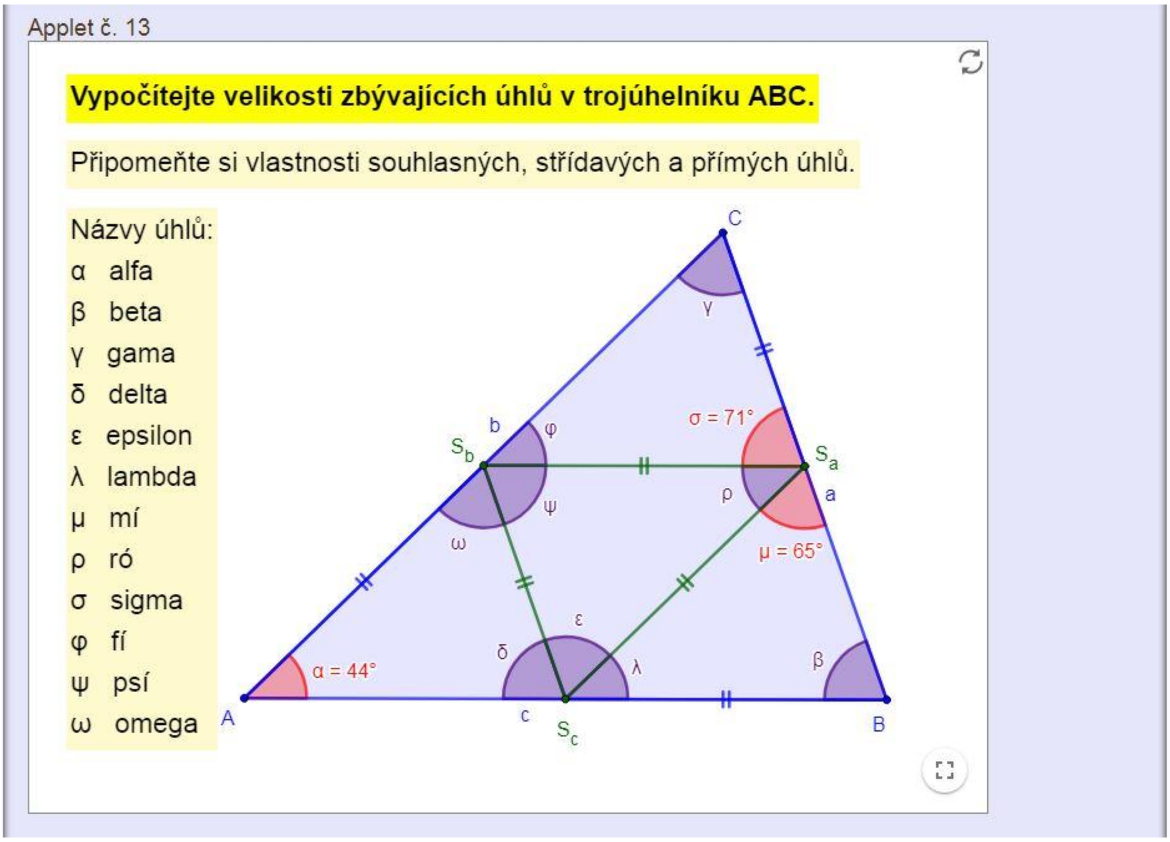
4.2.1 Stredné priečky trojuholníka



Applet ukazuje postup konštrukcie stredných priečok v trojuholníku. Učiteľ by mal so žiakmi zopakovať konštrukciu stredu úsečky. Pre stredy strán používame označenie S (stred) s dolným indexom podľa strany, kde stred leží, napríklad S_a – stred strany a.

1. Na začiatku je zobrazený ľubovoľný trojuholník, pohybom vrcholov A, B, C ho môžeme zmeniť
2. Zobrazí sa text „Postupně sestrojíme středy stran trojúhelníku:“.
3. Zobrazí sa text „střed strany a označíme S_a,“ a zobrazí sa červený bod S_a.

4. Zobrazí sa text „střed strany b označíme S_b,“ a zobrazí sa červený bod S_b.
5. Zobrazí sa text „střed strany c označíme S_c.“ a zobrazí sa červený bod S_c.
6. Zobrazí sa text „Sestrojíme úsečky S_aS_b, S_bS_c a S_aS_c.“ a červene sa zobrazia úsečky S_aS_b, S_bS_c a S_aS_c.
7. Zobrazí sa text „Úsečky S_aS_b, S_bS_c a S_aS_c nazýváme střední příčky trojúhelníku *ABC*.“. Aj teraz môžeme pohybovať vrcholmi *A*, *B*, *C* a zároveň pozorovať, ako sa menia stredné priečky, alebo môžeme vrcholmi pohybovať v 3. kroku a pozorovať posun stredu strany.

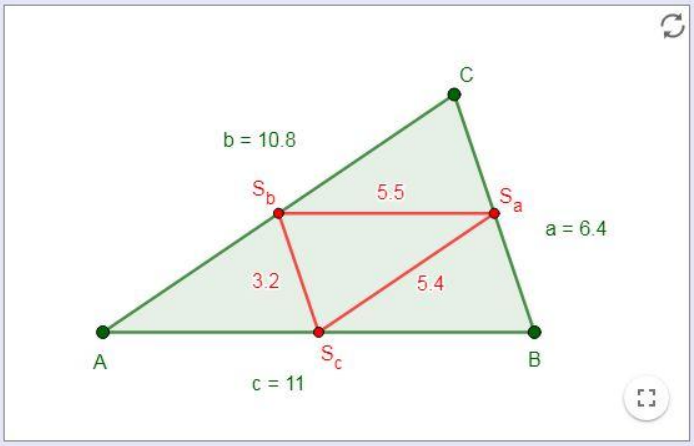


Uhly *α*, *μ*, a *σ* sú dané, uhly *β*, *γ*, *δ*, *ε*, *λ*, *ρ*, *φ*, *ψ*, *ω* je potrebné vypočítať. Applet je na začiatku možné nastaviť na rôzne veľkosti uhlov, ale je potrebné dať pozor na zaokrúhľovanie, aby súčet známych uhlov bol 180°. Je vhodné so žiakmi zopakovať vlastnosti súhlasných, striedavých a priamych uhlov. Žiak asi začne výpočtom veľkosti uhla *ρ*. Potom by si mohol uvedomiť, že uhly *α* a *λ*, *α* a *φ*, *σ* a *β*, *μ* a *ω* sú súhlasné, preto majú rovnakú veľkosť, a uhly *μ* a *ε*, *σ* a *ψ* sú striedavé, a preto tiež majú rovnakú veľkosť. Následne by využil veľkosť priameho uhla a súčtu veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku, potom by dopočítal ostatné uhly. Žiak by si mal všimnúť, že trojuholník *ABC* je zložený zo štyroch „malých“

trojuholníkov so zhodnými odpovedajúcimi si uhlami. Žiak by si mal do zošitu načrtnúť primerane veľký obrázok a zapísať doň dané aj vypočítané veľkosti uhlov.

Pohybujte vrcholy trojúhelníku ABC a přitom pozorujte délky některé strany trojúhelníka a k ní rovnoběžné střední příčky. Je na délkách něco zajímavého? Pozor na zaokrouhlení délek.

Applet č. 14



Žiak by mal pohybovať niektorým vrcholom trojuholníka *ABC* a pozorovať jeho jednu stranu a prislúchajúcu strednú priečku. Mal by vysloviť tvrdenie, že stredná priečka má vždy polovičnú veľkosť strany, s ktorou je rovnobežná; respektíve dĺžka strany je vždy dvojnásobkom dĺžky prislúchajúcej strednej priečky.

Zkuste vysvětlit, proč střední příčky rozdělí trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky. Využijte applet č. 14.

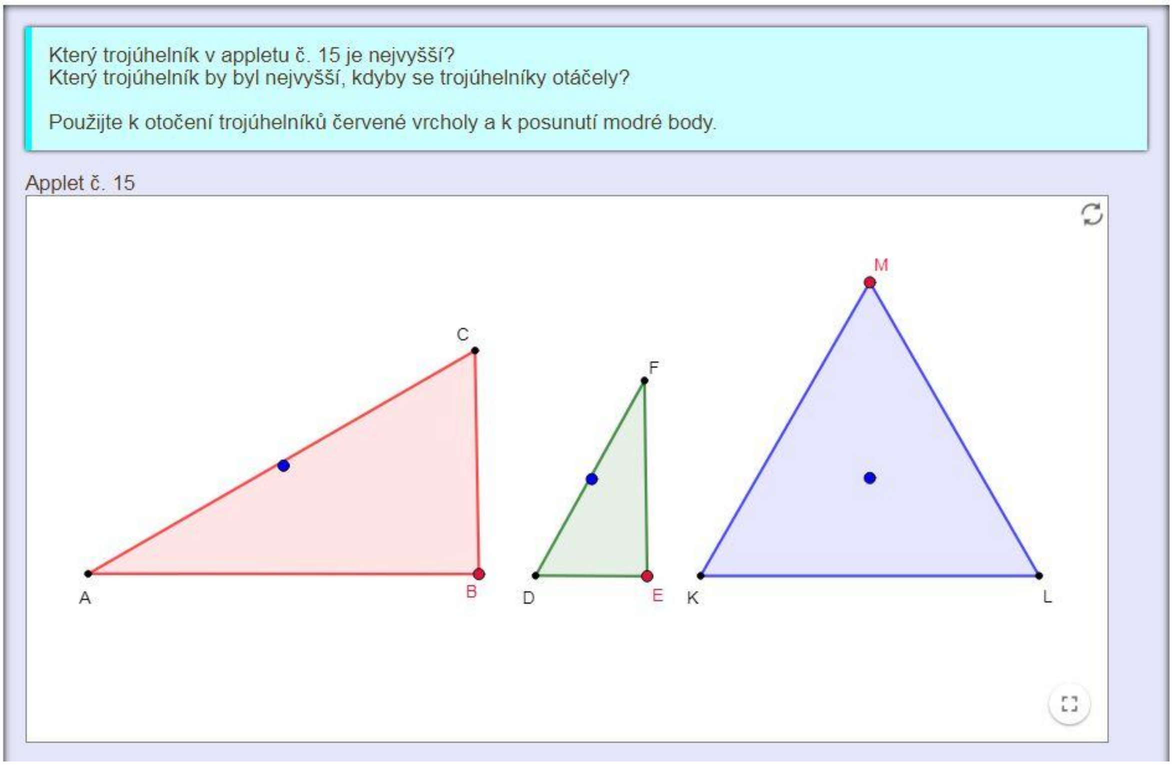
Řešení
Všechny čtyři 'malé' trojúhelníky mají odpovídající si délky stran shodné (pozri applet č. 14) a jde o přímou shodnost.

Narýsujte trojúhelník sa středními příčky a ověřte si to pomocí průsvitky.

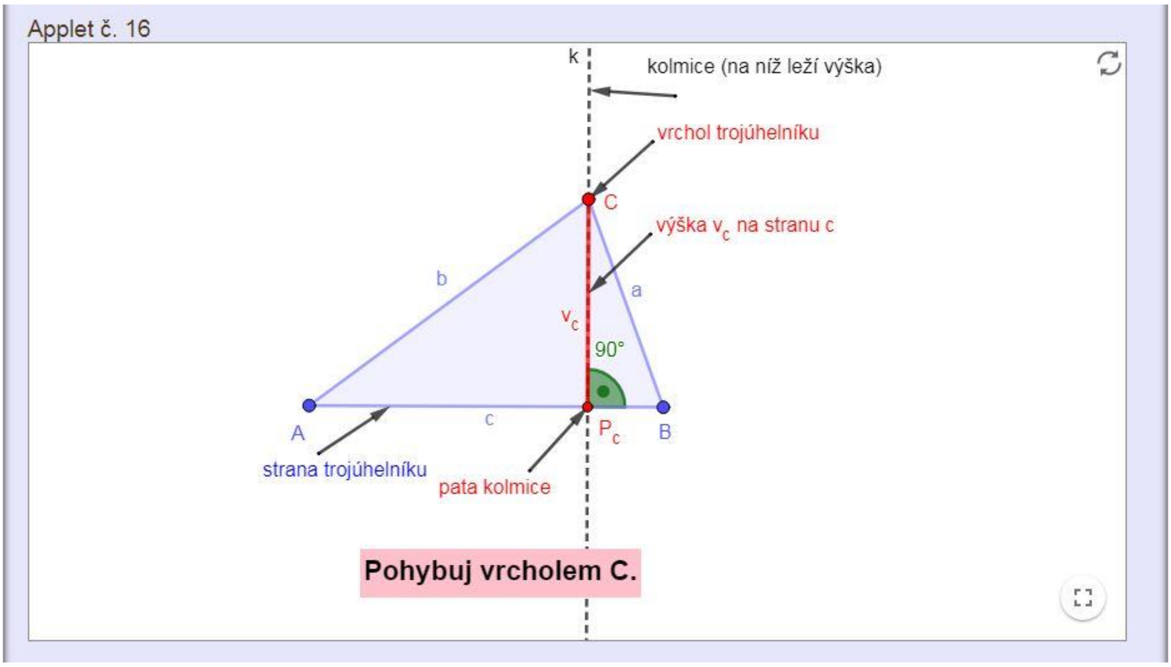
Skryj řešení

Aj keď sa zhodnosť trojuholníkov nepreberala, žiak by mohol argumentovať, že majú všetky odpovedajúce si uhly zhodné. Učiteľ by mal načrtnúť dva trojuholníky, ktoré by mali rovnaké uhly, ale jeden by bol väčší a druhý by bol menší (trojuholníky by boli podobné) a spýtať sa, čo by ešte trojuholník mal spĺňať, aby trojuholníky boli zhodné. Žiak by mal prísť na to, že aj odpovedajúce si strany musia byť rovnako dlhé. Pre odpoveď, či stredné priečky rozdelia veľký trojuholník na malé trojuholníky s rovnakými dĺžkami strán, môže žiak využiť applet č. 14, v ktorom by si mal všimnúť dĺžku strednej priečky a dĺžky prislúchajúcich úsečiek, ktoré vzniknú rozdelením strany jej stredom. Podľa toho by mal prísť na to, že stredné priečky vždy rozdelia trojuholník na štyri trojuholníky s rovnako veľkými (dlhými) odpovedajúcimi si stranami.

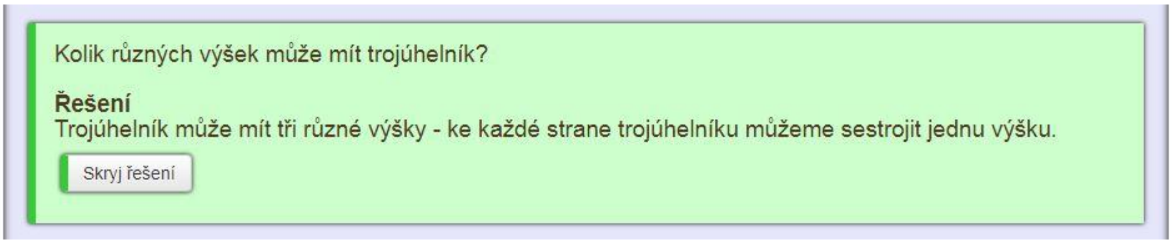
4.2.2 Výšky trojuholníka



Žiak by mohol odpovedať, že najvyšší je modrý trojuholník *KLM*. Učiteľ by sa mal opýtať, podľa čoho to zistil? Nasledovať by mohla otázka: Ako by jeho výšku meral? Potom by sa mohol opýtať: Čo by sa stalo, ak by sa červený trojuholník *ABC* „postavil“ na stranu *BC*, ktorý trojuholník by bol teraz najvyšší? Pri zisťovaní výšky by žiak mohol odpovedať, že by výšku meral od vrcholu, ktorý je hore a to smerom dole. Kam dole? Na podlahu? Žiak by mohol povedať, že od vrcholu, ktorý je hore, nadol k strane, na ktorej trojuholník stojí. Ale na tej strane je veľa bodov, ku ktorému presne by sa výška merala? Napríklad v modrom trojuholníku *KLM* od „horného vrcholu *M*“ kam? Žiak by mohol reagovať, že do stredu strany *KL*. Teraz je vhodné otočiť červený trojuholník *ABC* (zelený trojuholník *DEF*) tak, aby stál na strane *AC* a vrchol *B* bol hore. Či by tiež meral od vrcholu *B* do stredu strany *AC*. Žiak by mal prísť na to, že výška je úsečka *BX*, pričom bod *X* leží na strane *AC*, a táto úsečka je kolmá na stranu *AC*.



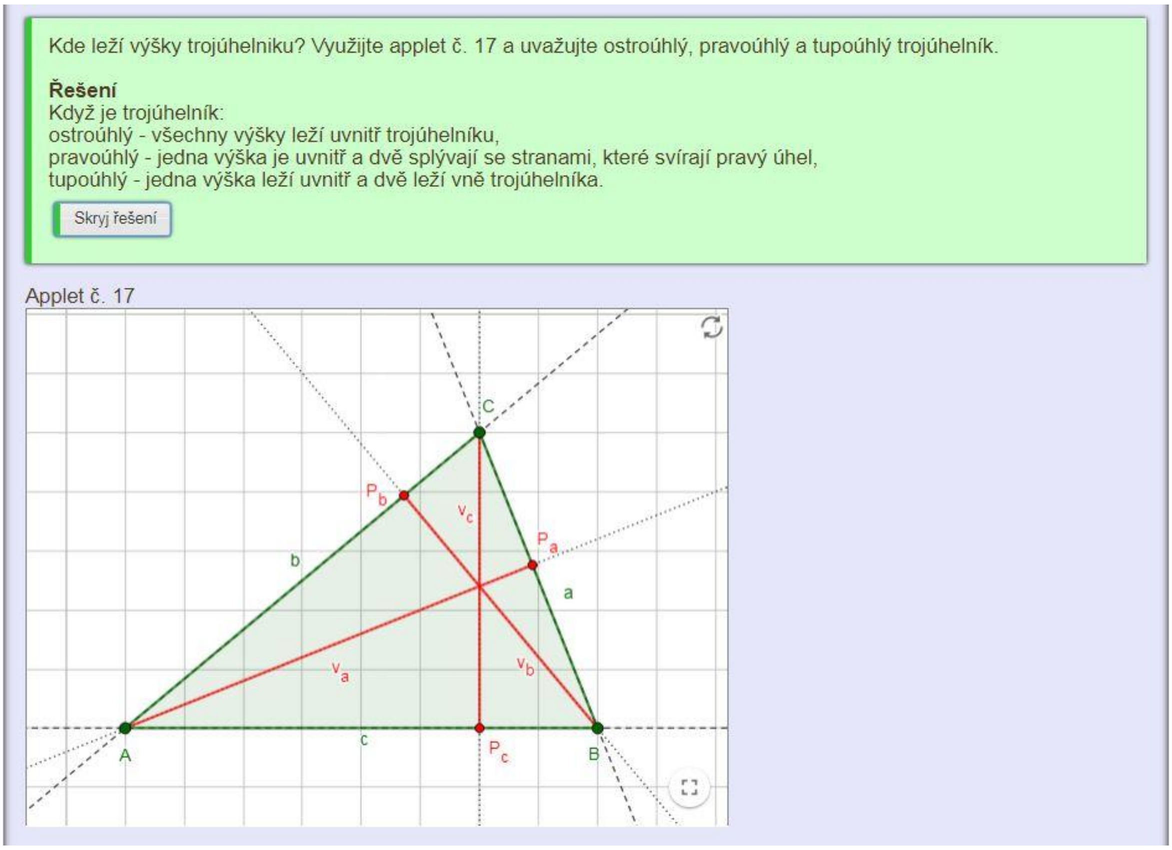
Applet ilustruje „poučku“ a sú v ňom zobrazené hlavné pojmy. Trojuholník *ABC* je ostrouhlý, ale pohybom vrcholu *C* je možné nastaviť trojuholník na pravouhlý a tupouhlý. Pri pravouhlom trojuholníku je dobré upozorniť, čo sa stalo s výškou v_c a stranou *a* (splynuli) a tiež s pätou P_c a vrcholom *B* (alebo *A*) – tiež splynuli. Pri tupouhlom trojuholníku výška v_c „vylezie“ z trojuholníka von. Už nie je kolmá na stranu *c* = *AB*, ale na priamku *AB*, na ktorej strana leží. Je vhodné vrcholom *C* pohybovať pomaly a pozorovať presun výšky z vnútra trojuholníka, cez splynutie so stranou, až po vyjdenie výšky von z trojuholníka.


Kolik různých výšek může mít trojúhelník?

Řešení
Trojúhelník může mít tři různé výšky - ke každé strane trojúhelníku můžeme sestrojit jednu výšku.

Skryj řešení

Žiak by mal prísť na to, že trojuholník má tri výšky a porovnávanie trojuholníkov sa odvíja podľa toho na ktoré strany trojuholníky „postavíme“; respektíve podľa toho, z ktorého vrcholu výšky zostrojujeme.



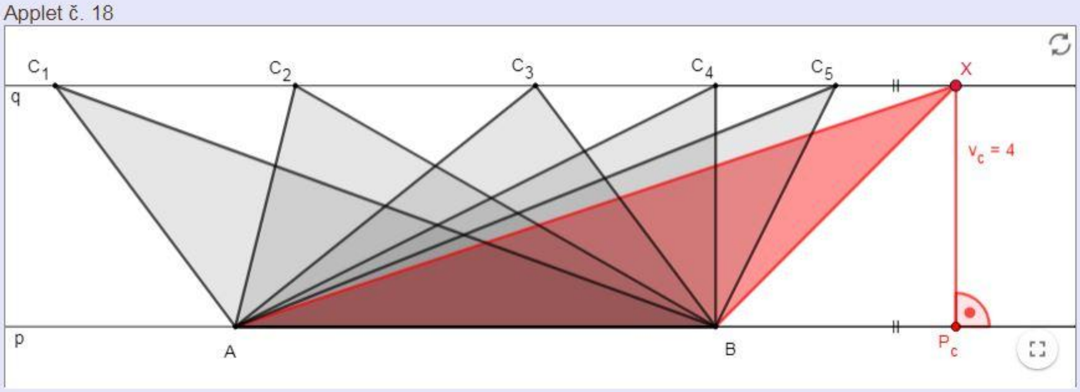
V applete sú zostrojené všetky tri výšky trojuholníka *ABC* a je zobrazená aj štvorcová sieť, pomocou ktorej sa dá nastaviť pravouhlý trojuholník. Žiak by mal pohybovať vrcholmi *A*, *B*, *C* a prísť na to, že:

- ak je trojuholník ostrouhlý, tak všetky tri výšky ležia vo vnútri trojuholníka,
- ak je pravouhlý, tak dve výšky splynú so stranami, ktoré zvierajú pravý uhol a jedna výška je vo vnútri trojuholníka,
- a ak je trojuholník tupouhlý, tak dve výšky sú mimo trojuholník a jedna výška, ktorá vychádza z vrcholu pri tupom uhle, je vo vnútri trojuholníka.

Jakou výšku mají trojúhelníky ABC_1 až ABC_5 v appletu č. 18?

Přesuňte postupně bod X do vrcholů C_1 až C_5 a pozorujte výšku v_c.

Applet č. 18



Applet zobrazuje šesť trojuholníkov, sivé trojuholníky ABC_1 až ABC_5, ktoré sú pevne dané a červený trojuholník ABX, ktorý ma pohyblivý vrchol X. Trojuholník ABX sa posúvaním vrcholu X „mení“ na trojuholníky ABC_1 až ABC_5. Vrcholy C_1 až C_5 ležia na rovnobežke q s priamkou p, na ktorej leží strana AB. Trojuholník ABX má vyznačenú výšku v_c, ktorá sa spoločne s vrcholom X presúva. Po presunutí vrcholu X, napríklad do vrcholu C_2, je trojuholník ABC_2 podfarbený červenou farbou. Žiak by si mal uvedomiť, že trojuholník môže mať rôzne tvary a pritom rovnako veľké výšky a ďalej aj to, že ak sú vrcholy trojuholníkov na rovnobežke s priamkou, na ktorej leží tretia strana, tak veľkosť výšky na túto stranu je vzdialenosť rovnobežiek.

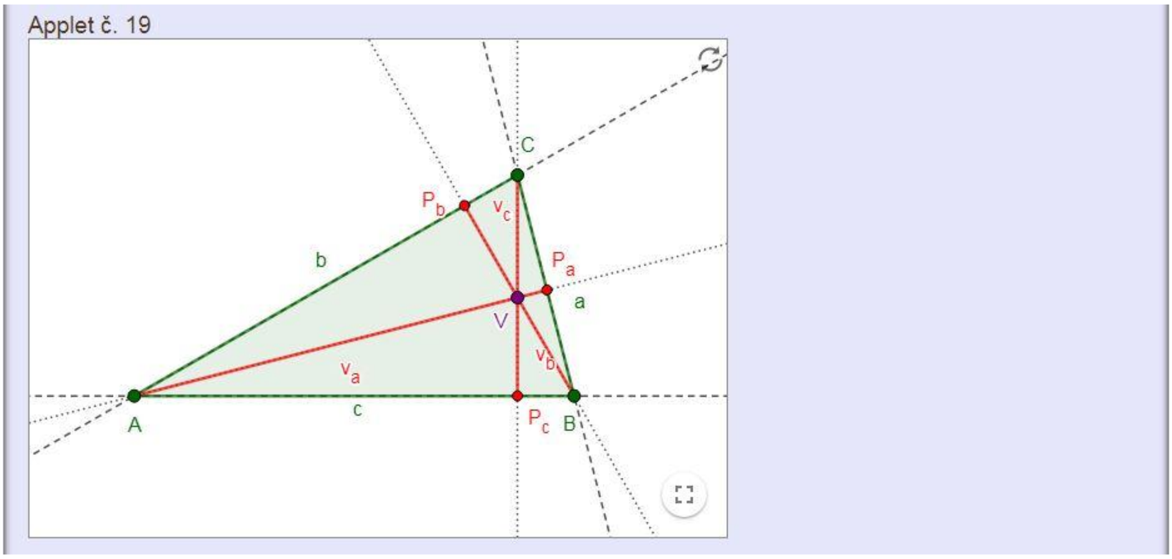
4.2.3 Priesečník výšok

Protnou se výšky trojúhelníku vždy v jednom bodě?

Pohybujte vrcholy *A*, *B*, *C* trojúhelníku, pozorujte a řekněte, co jste zjistili.

Řešení
Když je trojúhelník:
ostroúhlý - ano, průsečík leží uvnitř trojúhelníku,
pravoúhlý - ano, průsečík výšek je totožný s vrcholem trojúhelníku, pri kterém je pravý úhel,
tupoúhlý - ne, výšky nemají společný průsečík.

Skryj řešení



Žiak by mal pohybovať vrcholmi *A*, *B*, *C* a pritom pozorovať polohu priesečníku *V*. Mal by prísť na to, že:

- v ostrouhlom trojuholníku je priesečník *V* vo vnútri,
- v pravouhlom trojuholníku priesečník *V* splýva s vrcholom, pri ktorom je pravý uhol,
- v tupouhlom trojuholníku sa výšky nepretnú, ale pretnú sa priamky, na ktorých výšky ležia a priesečník *V* je mimo trojuholníka.

Někdy se zjednodušeně uvádí tvrzení "Výšky trojúhelníku se protínají v jednom bodě".

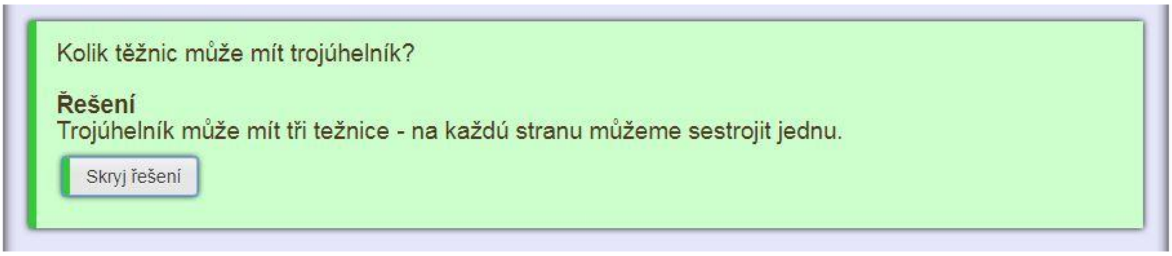
Pro jaké druhy trojúhelníků je toto tvrzení platné? Pro jaké ne?
Kde leží průsečík výšek v jednotlivých případech?

Řešení
Když je trojúhelník:
ostroúhlý - ano, průsečík leží uvnitř trojúhelníku,
pravoúhlý - ano, průsečík výšek je totožný s vrcholem trojúhelníku, při kterém je pravý úhel,
tupoúhlý - ne, výšky nemají společný průsečík.

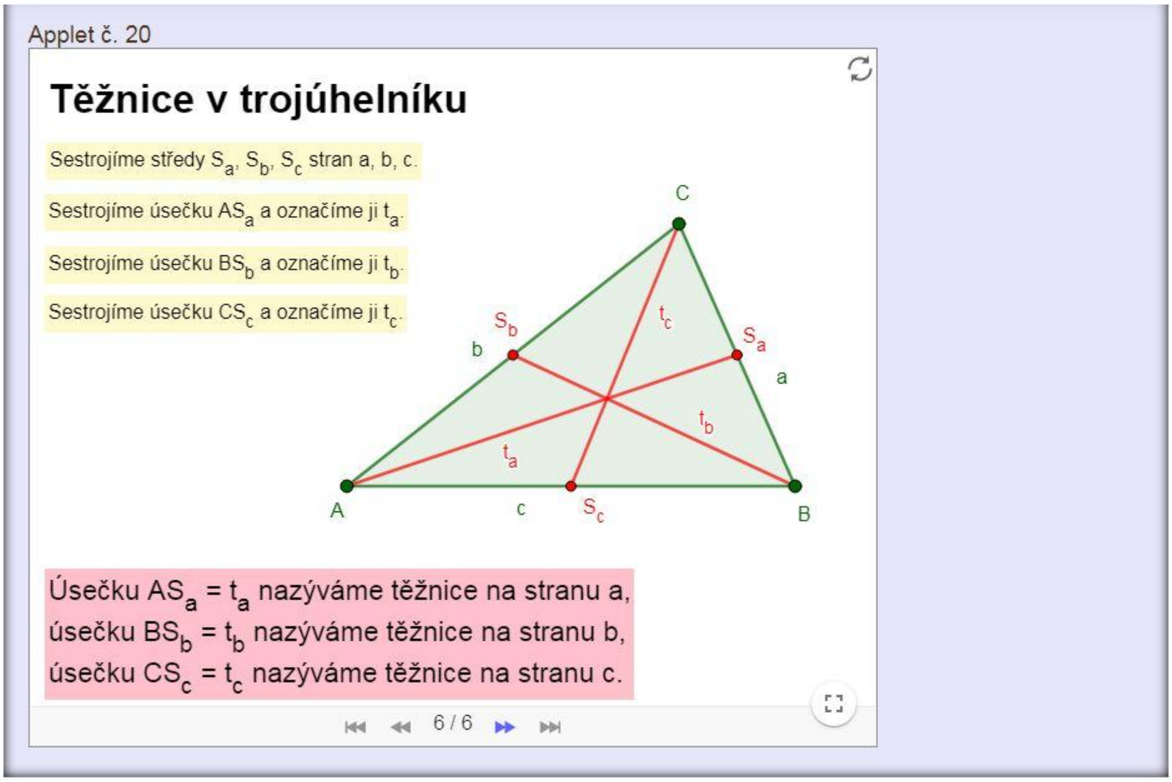
Skryj řešení

Odpoveď by mal žiak vedieť z predchádzajúcej otázky. Je vhodné upozorniť na rozdiel v terminologii medzi „výšky“ a „priamky, na ktorých ležia výšky“. Zdôrazniť, že matematika má byť presná, a že niekedy záleží aj na drobných rozdieloch vo formulácii.

4.2.4 Ťažnice trojuholníka



Žiak by na základe „poučky“ mal prísť sám na riešenie, je dobré ak si črtá do zošita.



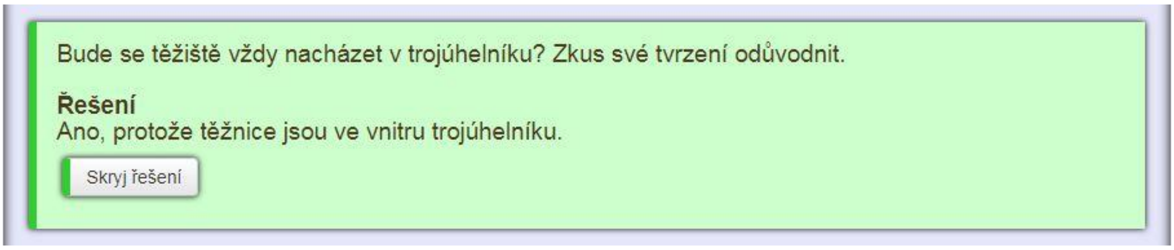
Applet ukazuje postup konštrukcie ťažníc v trojuholníku. Jednotlivé kroky v applete sú nasledovné:

1. Na začiatku je zobrazený trojuholník *ABC* s vyznačenými stranami.
2. Zobrazí sa text „Sestrojíme středy S_a, S_b, S_c stran *a*, *b*, *c*.“ a zobrazia sa červené body S_a, S_b a S_c.
3. Zobrazí sa text „Sestrojíme úsečku AS_a a označíme ji t_a.“ a zobrazí sa červená úsečka $t_a = AS_a$.

4. Zobrazí sa text „Sestrojíme úsečku BS_b a označíme ji t_b.“ a zobrazí sa červená úsečka $t_b = BS_b$.
5. Zobrazí sa text „Sestrojíme úsečku CS_c a označíme ji t_c.“ a zobrazí sa červená úsečka $t_c = CS_c$.
6. Zobrazí sa text „Úsečku $AS_a = t_a$ nazýváme těžnice na stranu a, úsečku $BS_b = t_b$ nazýváme těžnice na stranu b, úsečku $CS_c = t_c$ nazýváme těžnice na stranu c.“.

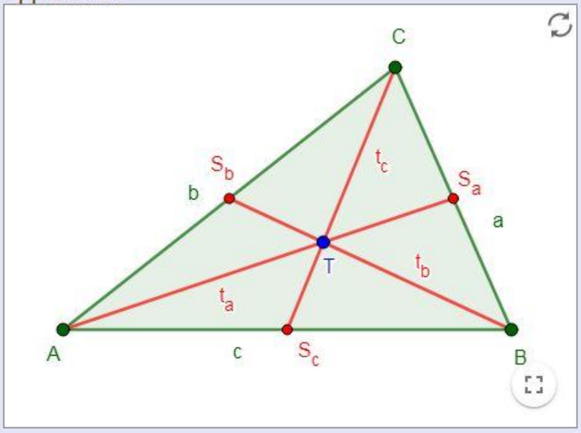
Žiak by mal pohybovať vrcholmi A, B, C a pozorovať ťažnice. Mal by si všimnúť, že ťažnice sú vždy – na rozdiel od výšok – vo vnútri trojuholníka. Mohol by povedať, že ťažnice sa pretínajú v jednom bode.

4.2.5 Priesečník ťažníc – ťažisko



Žiak by mohol uvažovať takto: Ťažisko leží na ťažnici a ťažnice je úsečka, ktorá vždy leží v trojuholníku, preto aj ťažisko vždy leží v trojuholníku.

Applet č. 21



Bod *T* rozdělí každou těžnici na dvě úsečky. Těžnice t_a byla rozdělena na úsečky *AT* a TS_a.

Vyber, co platí pro jejich velikosti: $|AT| < |TS_a|$ $|AT| = |TS_a|$ $|AT| > |TS_a|$
Bude totéž platit i pro těžnice t_b a t_c?

Řešení
Pro velikosti úceček bude platit $|AT| > |TS_a|$.
To isté bude platit i pro těžnice t_b a t_c: $|BT| > |TS_b|$ $|CT| > |TS_c|$

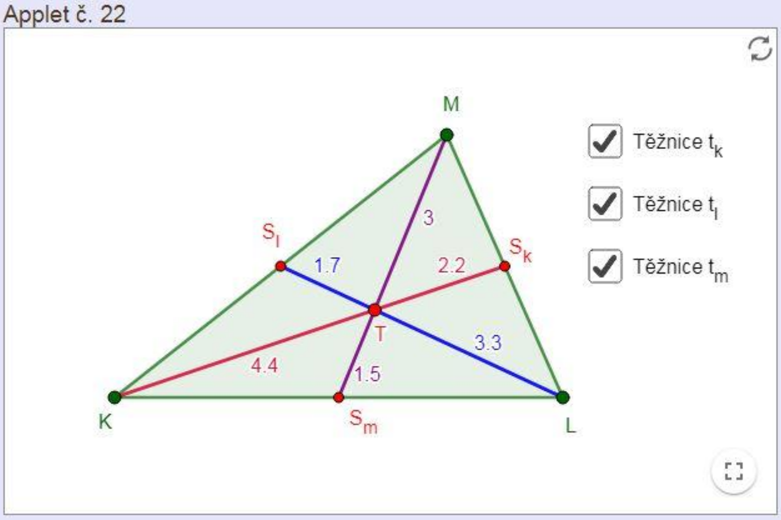
Skryj řešení

Žiak by mal v applete č. 21 pohybovať vrcholmi *A*, *B*, *C* a zamerať sa na niektorú ťažnicu, napríklad na ťažnicu t_a. Pozorovaním by mal zistiť, že úsečka *AT* je vždy dlhšia než úsečka TS_a, teda $|AT| > |TS_a|$. Ďalej by si mal všimnúť, že pre všetky ťažnice platí | *vrchol – ťažisko* | > | *ťažisko – stred protiľahlej strany* |.

V trojúhelníku *KLM* jsme sestrojili těžnice t_k, t_l a t_m.
V appletu č. 22 postupně zaškrtněte políčka pro jednotlivé těžnice t_k, t_l a t_m a pozorujte velikosti úseček, které vzniknou rozdělením každé z těžnic těžištěm *T* trojúhelníku. Zkuste vyslovit nejaké tvrzení.

(Pozor! Velikosti úseček jsou zaokrouhlovány na jedno desetinné místo.)

Applet č. 22

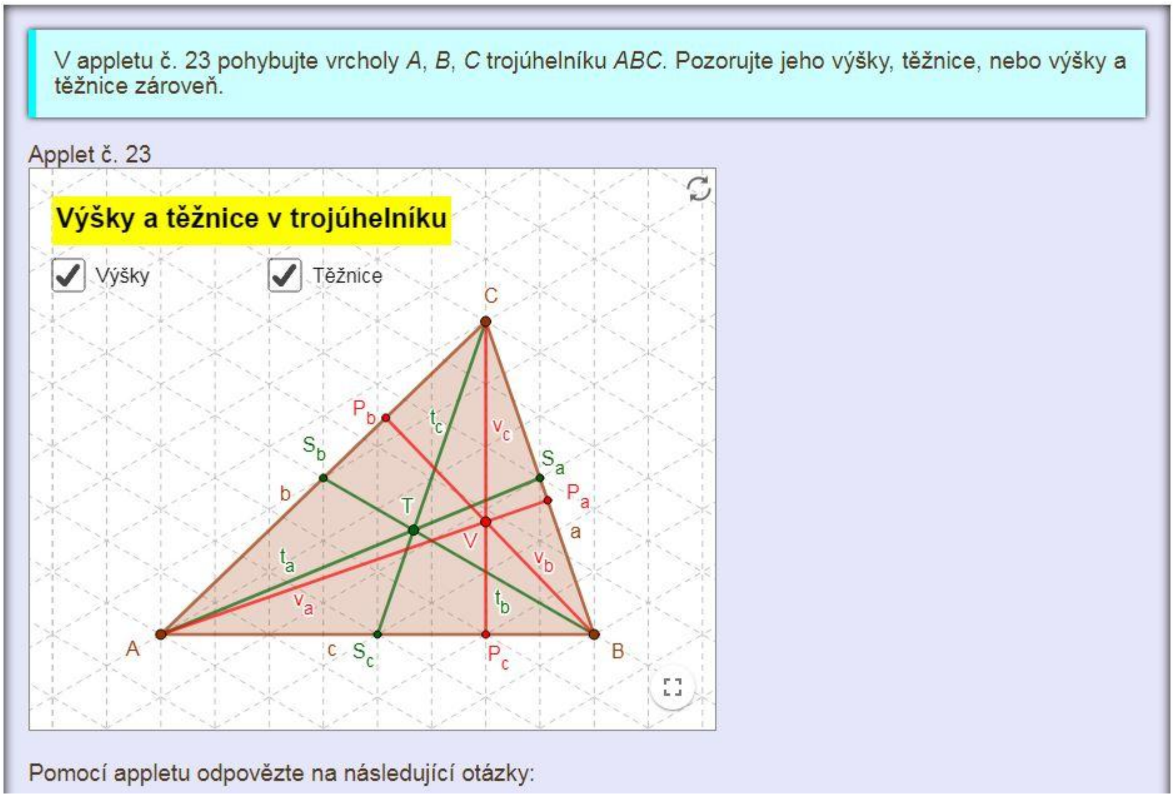


Žiak by si mal najskôr zobraziť jednu ťažnicu, pohybovať vrcholmi *K*, *L*, *M* a pozorovať dĺžky úsečiek, ktoré vzniknú rozdelením úsečky ťažiskom *T*. Mohol by vysloviť tvrdenie (napríklad pre ťažnicu t_k), že:

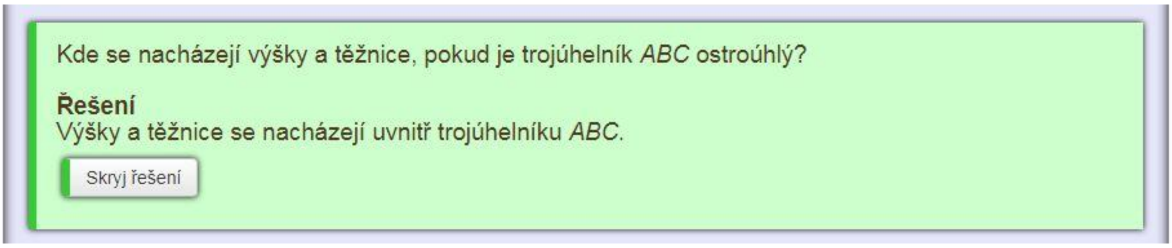
- I*KT*I je dvakrát väčšia, než ITS_kI,
- ITS_kI je polovica z I*KT*I,
- I*KT*I je ku ITS_kI v pomere 2:1,
- I*KT*I je ⅔ z dĺžky ťažnice a ITS_kI je ⅓ z dĺžky ťažnice.

Následne si žiak zobrazí inú ťažnicu, alebo zobrazí všetky tri ťažnice a svoje tvrdenie si overí. Je vhodné so žiakmi zopakovať, čo znamená, že dĺžka je zaokrúhlená na jedno desatinné miesto.

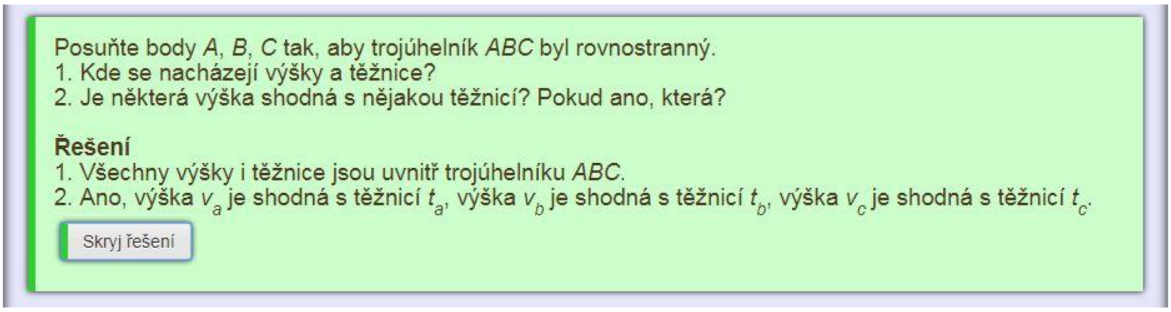
4.2.6 Výšky a ťažnice v trojuholníku



V applete č. 23 je trojuholník *ABC* s vyznačenými stranami *a*, *b*, *c* a dve zaškrtávacie políčka. V pozadí je trojuholníková sieť, ktorá umožňuje nastaviť rôzne typy trojuholníkov napríklad rovnostranný, pravouhlý, … Po zaškrtnutí políčka „Výšky“ sa zobrazia výšky zvýraznené červenou farbou; po zaškrtnutí políčka „Těžnice“ sa zobrazia ťažnice zvýraznené zelenou farbou. Výšky a ťažnice je možné zobraziť samostatne ale aj súčasne. Pomocou tohto appletu by mal žiak odpovedať na nasledujúce otázky.



Žiak by mal vedieť, že v ostrouhlom trojuholníku sú výšky aj ťažnice vo vnútri. Učiteľ sa môže spýtať, kde sa nachádzajú výšky a ťažnice v pravouhlom a tupouhlom trojuholníku. Žiak môže využiť sieť v pozadí appletu a jednotlivé typy trojuholníkov nastaviť.



Žiak nastaví trojuholník *ABC* na rovnostranný a pritom by si mal uvedomiť, že rovnostranný trojuholník je zároveň ostrouhlý. Z predchádzajúcej otázky by mal vedieť, že výšky aj ťažnice sa nachádzajú vo vnútri trojuholníka. Pri druhej otázke je vhodné zobraziť napríklad výšky a zobrazovať či skrývať ťažnice (alebo opačne), pre lepšiu viditeľnosť. Žiak by mal prísť na to, že výška na danú stranu je zhodná s ťažnicou na danú stranu, teda že $v_a = t_a$, $v_b = t_b$, $v_c = t_c$. Učiteľ sa môže spýtať, ktoré body sú zhodné. Žiak by mal prísť na to, že päta výšky je zhodná so stredom strany, $P_a = S_a$, $P_b = S_b$, $P_c = S_c$ a že priesečník výšok je zhodný s ťažiskom $V = T$.

Posuňte body *A*, *B*, *C* tak, aby trojúhelník *ABC* byl rovnoramenný a zároveň pravoúhlý.
1. Kde se nacházejí výšky a těžnice?
2. Je některá výška shodná s nějakou těžnicí? Pokud ano, která?

Řešení
1. Jedna výška je uvnitř (ta, která vychází z pravého úhlu) a zbývající dvě jsou shodné se stranami, které svírají pravý úhel. Těžnice jsou všechny uvnitř trojúhelníku.
2. Ano, výška vycházející z pravého úhlu je shodná s těžnicí, která vychází z téhož pravého úhlu. Kupř. pokud je pravý úhel při vrcholu A, tak výška v_a je shodná s těžnicí t_a.

Skryj řešení

Žiak pomocou siete nastaví trojuholník tak, aby bol rovnoramenný a zároveň pravouhlý. Pri prvej otázke by mal prísť na to, že dve výšky splývajú so stranami trojuholníka a jedna výška leží v jeho vnútri; ťažnice sú všetky vo vnútri trojuholníka. Pri druhej otázke by si mal všimnúť, že výška, ktorá je zhodná s ťažnicou (iba jeden prípad), je tá, ktorá vychádza z vrcholu, kde je pravý uhol a ďalej, že päta tejto výšky je zhodná so stredom protiľahlej strany. Učiteľ sa môže spýtať, ako sa nazývajú vrcholy a strany v rovnoramennom trojuholníku. Tiež sa môže spýtať odkiaľ kam vedie výška (aké sú jej krajné body); ak sa použije terminológia pre rovnoramenný trojuholník (len pre prípad, keď je trojuholník zároveň aj pravouhlý), tak žiak by mal odpovedať, že výška vedie z hlavného vrcholu do stredu základne.

Posuňte body *A*, *B*, *C* tak, aby trojúhelník *ABC* byl tupoúhlý.
1. Kde se nacházejí výšky a těžnice?
2. Je některá výška shodná s nějakou těžnicí?
3. Jaký musí být trojúhelník *ABC* (rovnostranný, rovnoramenný, obecný), aby byla nějaká výška shodná s těžnicí?

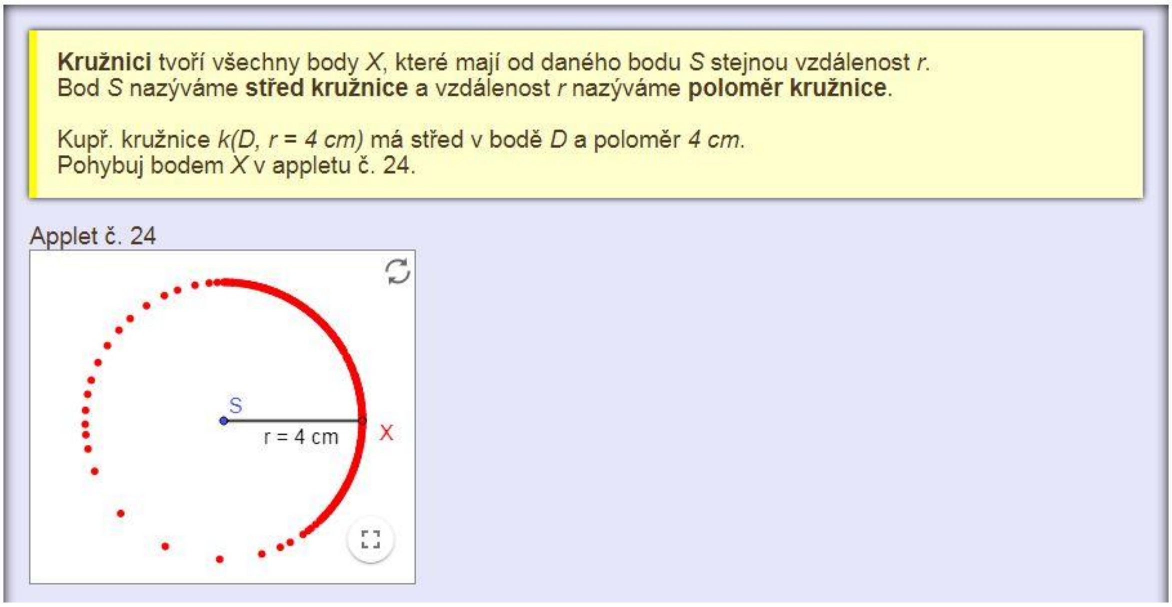
Řešení
1. Jedna výška (ta, která vychází z tupého úhlu) je uvnitř trojúhelníku a dvě jsou vně trojúhelníku. Těžnice jsou všechny uvnitř trojúhelníku.
2. Obecně ne, jen ve speciálním případě (podívejte se na následné řešení).
3. Trojúhelník musí být rovnoramenný (a zároveň tupoúhlý). Výška vycházející z hlavního vrcholu (při kterém je tupý úhel) je shodná s těžnicí vycházející z hlavního vrcholu. Kupř. pokud je hlavní vrchol *C* (tupý úhel je při vrcholu *C*), potom výška v_c a těžnice t_c jsou shodné.

Skryj řešení

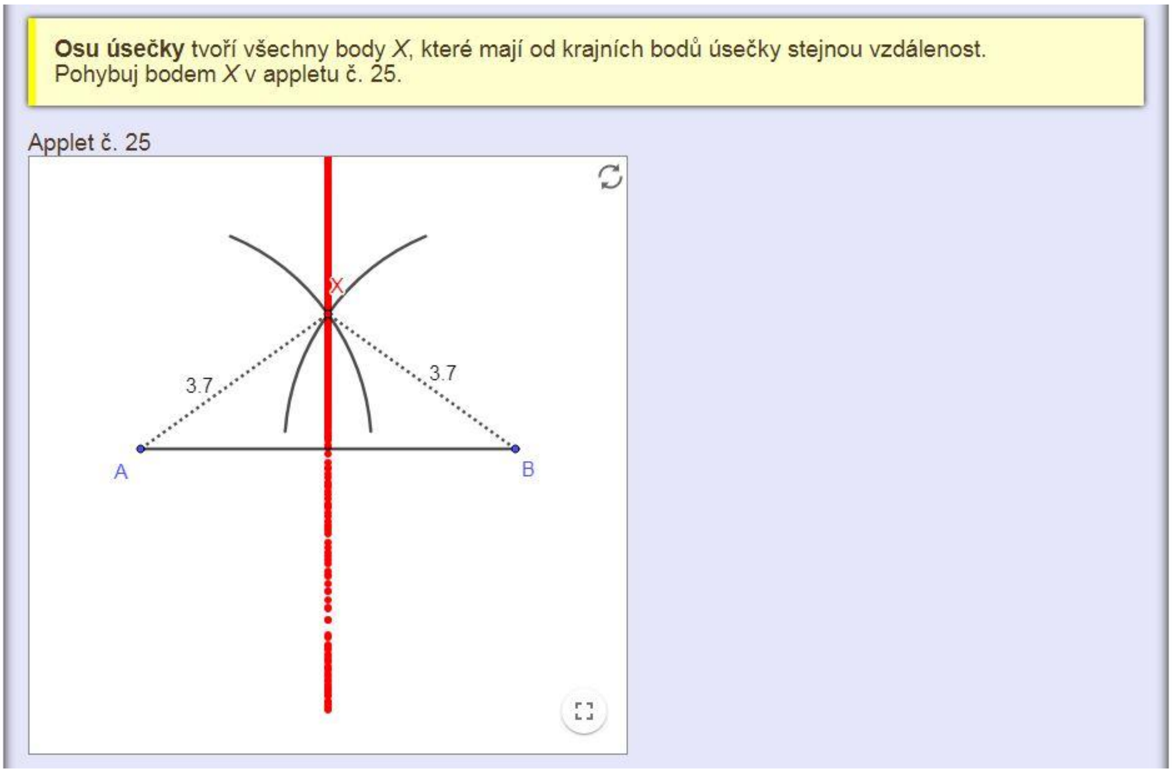
Žiak nastaví trojuholník *ABC* tak, aby bol tupouhlý. Na prvú otázku by žiak mal odpovedať, že dve výšky sú mimo trojuholník, jedna je vo vnútri trojuholníka a ťažnice sú vo vnútri trojuholníka. Na druhú otázku by mal odpovedať, že nie. Učiteľ sa môže spýtať, ktorá výška by teoreticky mohla byť zhodná s nejakou ťažnicou (je to tá výška, ktorá je v trojuholníku). Pri tretej otázke je vhodné, aby žiaci experimentovali s posúvaním vrcholov *A*, *B*, *C* trojuholníka *ABC*. Mali by prísť na to, že je to možné, ak je trojuholník tupouhlý a zároveň aj rovnostranný.

4.2.7 Opakovanie – kružnica, os úsečky, os uhla

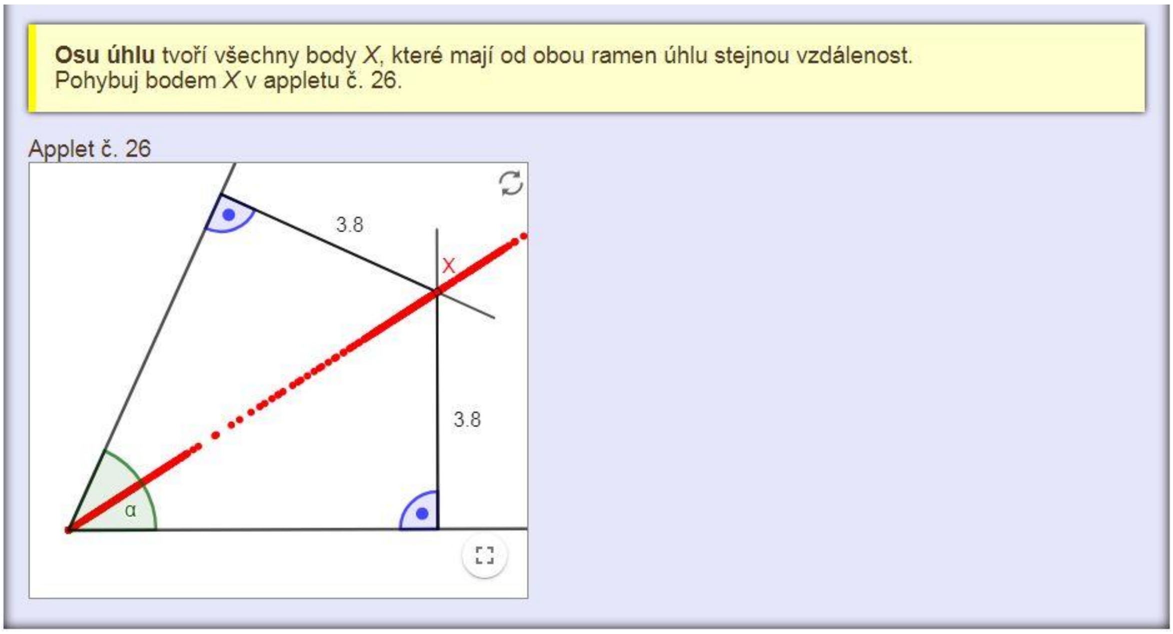
Žiak by si mal pripomenúť, čo je kružnica, os úsečky a os uhla. Applet vždy ilustruje pripomínaný pojem.



Žiak pohybuje bodom *X*, ktorý za sebou zanecháva červenú stopu. Žiak týmto spôsobom „narysuje“ kružnicu. Pritom vidí, že vzdialenosť bodu *X* od stredu *S* je stále 4 cm.

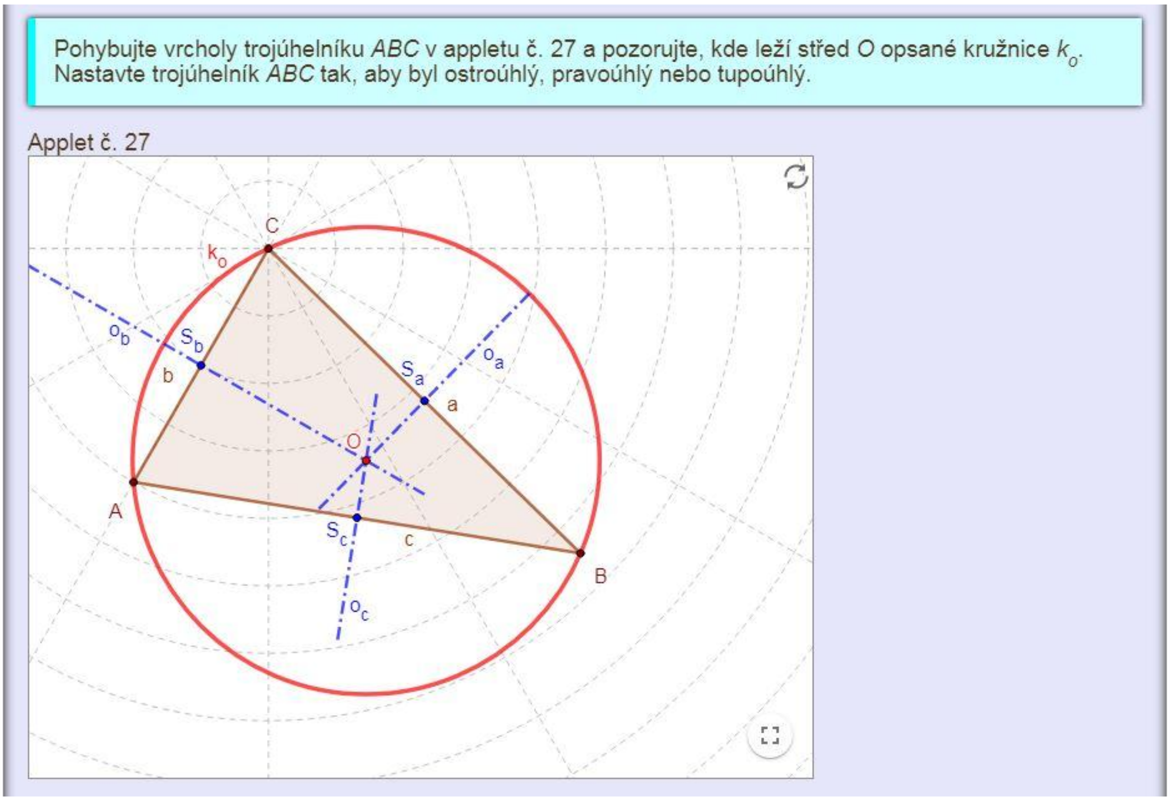


Žiak pohybuje bodom *X*, ktorý za sebou zanecháva červenú stopu. Zostrojí tak os úsečky *AB*, pretože applet je nastavený tak, že kružnice z vrcholov *A* a *B* majú rovnaký polomer. V applete je zobrazená vzdialenosť bodu *X* od bodov *A* a *B*, teda $|AX| = |BX|$. Učiteľ by sa mal spýtať na postup rysovania osi úsečky.



Žiak pohybuje bodom *X*, ktorý za sebou zanecháva červenú stopu. Zostrojí tak os uhla *α*. V applete je zobrazená vzdialenosť bodu *X* od ramien uhla *α*. Učiteľ by mal upozorniť na to, že vzdialenosť bodu od priamky (polpriamky) zisťujeme pomocou kolmice. Učiteľ by sa mal spýtať na postup rysovania osi uhla a na to, aký geometrický útvar je os uhla (polpriamka) a os úsečky (priamka).

4.2.8 Kružnica opísaná trojuholníku



V applete je zostrojený trojuholník *ABC* a kružnica k_o, ktorá je opísaná trojuholníku *ABC*. Tiež sú zostrojené osi strán trojuholníka *ABC* a ich priesečník *O*. Žiak by mal pohybovať vrcholmi *A*, *B*, *C*, pomocou kruhovej siete v pozadí (základný uhol má veľkosť 30°), postupne nastaviť trojuholník *ABC* na ostrouhlý, pravouhlý a tupouhlý (je dobré nechať vrchol *C* v strede siete) a pozorovať pohyb priesečníka *O*. Žiak by si mal všimnúť, že bod *O* sa nachádza (leží) vo vnútri trojuholníka, ak je trojuholník ostrouhlý; leží na strane, ak je trojuholník pravouhlý; a leží mimo trojuholník, ak je trojuholník tupouhlý. Učiteľ sa môže spýtať, či vieme určiť, kde presne sa bod *O* nachádza na strane trojuholníka, ak je trojuholník pravouhlý. Žiak by mohol odpovedať, že sa nachádza v strede strany, lebo leží na osi tejto strany, alebo, že leží v strede strany, lebo vzdialenosť (polomer) I*OA*I sa musí rovnať I*OB*I. Žiak by mal vyskúšať, čo sa stane, ak vrcholy *A* a *B* budú totožné (nie je trojuholník, nie je ani opísaná kružnica), alebo ak vrchol *B* bude ležať na strane AC (osi sú rovnobežné, trojuholník neexistuje, a preto neexistuje ani opísaná kružnica).

V libovolném trojúhelníku KLM načrtněte osu o_m strany m.
Zkuste vysvětlit proč bod, který na ose o_m neleží, nemůže být středem kružnice procházející body K a L.

Řešení
Zvolte bod, který na ose o_m neleží a nazvěte ho kupř. P.
Jestliže bod P má být středem kružnice procházející body K a L, musí platit, že $|PK| = |PL|$.
Ale to neplatí, neboť bod P neleží na ose o_m.
Proto bod P nemůže být středem kružnice procházející body K a L.

Skryj řešení

Žiak si do zošitu načrtne trojuholník KLM a osu o_m strany m. Zostrojí bod (napríklad P), ktorý na ose neleží. Žiak môže uvažovať ako je v riešení, alebo takto: P nepatrí o_m, preto $|PK| \neq |PL|$. Pre stred kružnice platí, že každý bod má od stredu rovnakú vzdialenosť. To bod P nespĺňa, lebo $|PK| \neq |PL|$, preto bod P nemôže byť stredom kružnice prechádzajúcej bodmi (vrcholmi) K a L.

V následujícím appletu č. 28 postupujte podle pokynů:

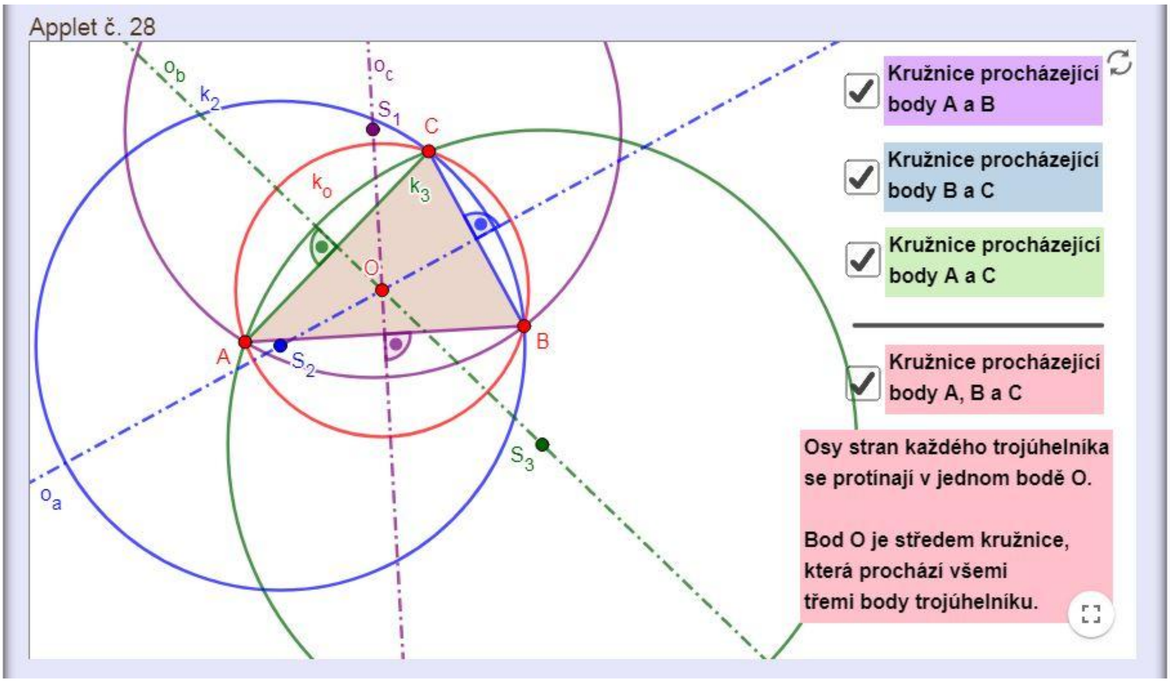
1. Zaškrtněte fialové políčko. Poté posuňte bod S_1 po ose o_c tak, aby kružnice k_1 procházela rovněž bodem C. Následně zrušte zaškrtnutí.
2. Zaškrtněte modré políčko. Poté posuňte bod S_2 po ose o_a tak, aby kružnice k_2 procházela rovněž bodem A. Následně zrušte zaškrtnutí.
3. Zaškrtněte zelené políčko. Poté posuňte bod S_3 po ose o_b tak, aby kružnice k_3 procházela rovněž bodem B. Následně zaškrtněte fialové i modré políčko.

1. Jsou kružnice k_1, k_2 a k_3 shodné?
2. Kde leží středy kružnic k_1, k_2 a k_3?

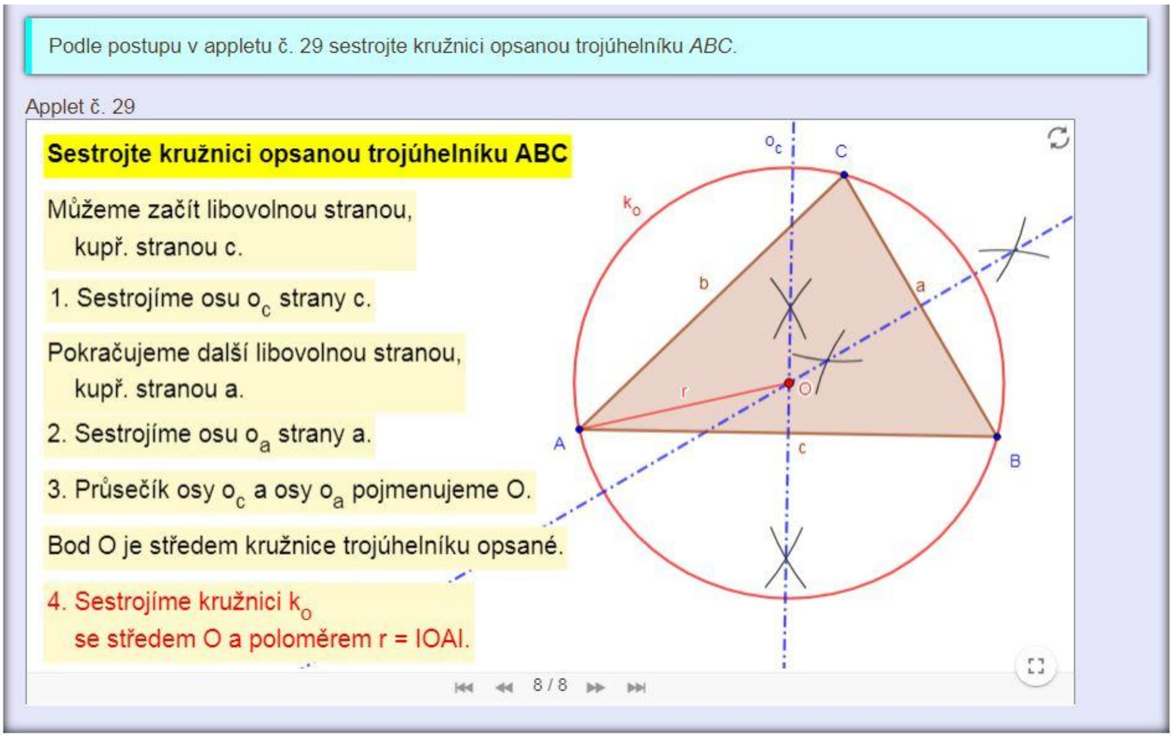
Řešení
1. Kružnice k_1, k_2 a k_3 jsou shodné, shodnost v appletu závisí na přesnosti.
2. Středy kružnic k_1, k_2 a k_3 leží v průsečíku os stran.

Skryj řešení

Zaškrtněte červené políčko.
Změňte polohu bodů A, B a C a postup zopakujte.



Žiak má postupovať podľa pokynov. V každom prípade má posúvať stred kružnice po osi strany tak, aby kružnica prechádzala aj tretím vrcholom trojuholníka. Po zobrazení všetkých troch kružníc by žiak mal zistiť, že stredy kružníc S_1, S_2, S_3 sú totožné a splynuli v jeden bod, ktorým je priesečník osí strán a tiež, že kružnice k_1, k_2, k_3 splynuli v jednu kružnicu. Potom by si mal zapnúť červené políčko, kde sa mu ukáže zhrnutie a tiež sa červenou farbou vyznačí priesečník osí O – stred opísanej kružnice a kružnica k_o – kružnica opísaná trojuholníku ABC. Je vhodné prejsť applet spoločne. Na záver po vrátení sa na začiatok si každý žiak môže zmeniť polohu vrcholov A, B, C a postup znova zopakovať.

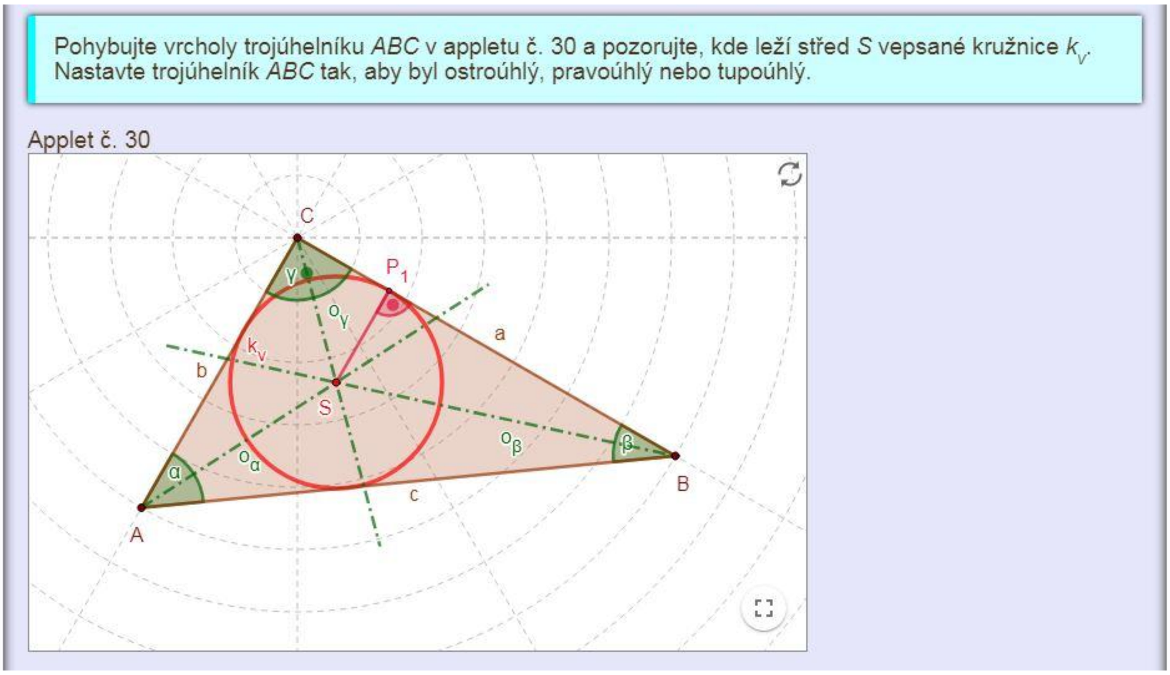


V applete je popísaný postup konštrukcie opísanej kružnice. Jednotlivé kroky sú nasledovné:

1. Na začiatku je zobrazený trojuholník *ABC* s vyznačenými stranami *a*, *b*, *c*.
2. Zobrazí sa text „Můžeme začít libovolnou stranou, kupř. stranou *c*.“.
3. Zobrazí sa text „1. Sestrojíme osu o_c strany *c*.“ a zobrazí sa os o_c strany *c* zostrojená pomocou kružnicových oblúkov.
4. Zobrazí sa text „Pokračujeme další libovolnou stranou, kupř. stranou *a*.“,
5. Zobrazí sa text „2. Sestrojíme osu o_a strany *a*.“ a zobrazí sa os o_a strany *a* zostrojená pomocou kružnicových oblúkov.
6. Zobrazí sa text „3. Průsečík osy o_c a osy o_a pojmenujeme *O*.“ a červenou farbou sa zobrazí priesečník *O* osi o_c a osi o_a.
7. Zobrazí sa text „Bod *O* je středem kružnice trojúhelníku opsané.“.
8. Zobrazí sa červený text „4. Sestrojíme kružnici k_o se středem *O* a poloměrem $r = |OA|$.“ a červenou farbou sa zobrazí kružnica k_o opísaná trojuholníku *ABC* a polomer opísanej kružnice $r = |OA|$.

Žiak môže pohybovať vrcholmi trojuholníka *ABC* (napríklad nastaviť trojuholník na tupouhlý) a postup znova zopakovať. Učiteľ sa môže spýtať, či polomer opísanej kružnice môže byť aj $r = |OB|$ alebo $r = |OC|$. Žiak by mal prísť na to, že stred opísanej kružnice je rovnako vzdialený od všetkých troch vrcholov trojuholníka, takže je jedno, aký polomer použije, pretože I*OA*I = I*OB*I = I*OC*I.

4.2.9 Kružnica vpísaná trojuholníku



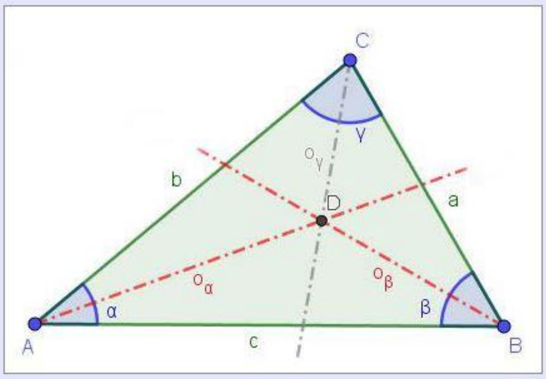
V applete je zobrazený trojuholník *ABC* s vyznačenými stranami *a*, *b*, *c*, vnútornými uhlami *α*, *β*, *γ*, osami vnútorných uhlov o_α, o_β, o_γ, červeným priesečníkom *S* týchto osí, červenou vpísanou kružnicou k_v a červenou úsečkou SP_1, kde bod P_1 je päta kolmice vedenej z bodu *S* k strane *a*. Žiak by mal pohybovať vrcholmi *A*, *B*, *C*, postupne nastaviť trojuholník tak, aby bol ostrouhlý, pravouhlý, tupouhlý a pozorovať stred *S* vpísanej kružnice (istá analógia s ťažiskom). Mal by zistiť, že stred vpísanej kružnice je vždy vo vnútri trojuholníka (ak musí byť kružnica vo vnútri trojuholníka, tak aj jej stred je vo vnútri trojuholníka).

Bod D leží v trojúhelníku na obrázku na ose o_α a zároveň na ose o_β. Bude bod D ležet rovněž na ose o_γ?
Proč?

Řešení

Když bod D leží na ose o_α, tak jeho vzdálenost od strany b (kupř. 5 cm) je stejná, jako vzdálenost od strany c (též 5 cm).
Bod D leží zároveň i na ose o_β, proto jeho vzdálenost od strany c (5 cm) je stejná, jako vzdálenost od strany a (též 5 cm).
Bod D je tedy od strany a (5 cm) stejně vzdálený, jako od strany b (5 cm), proto musí ležet na ose úhlu, který svírají strany a a b.
A to je osa o_γ úhlu γ.

Skryj řešení



Žiak podľa obrázku odpovie, že áno. Uvažovať by mohol podobne, ako je uvedené v riešení. Učiteľ sa môže spýtať, či by taká istá úvaha platila aj pre tupouhlý trojuholník.

V následujícím appletu č. 31 postupujte podle pokynů:

1. Zaškrtněte zelené políčko. Poté posuňte bod S_1 po ose o_α tak, aby se kružnice k_1 dotýkala všech tří stran trojúhelníku. Následně zrušte zaškrtnutí.
2. Zaškrtněte modré políčko. Poté posuňte bod S_2 po ose o_β tak, aby se kružnice k_2 dotýkala všech tří stran trojúhelníku. Následně zrušte zaškrtnutí.
3. Zaškrtněte fialové políčko. Poté posuňte bod S_3 po ose o_γ tak, aby se kružnice k_3 dotýkala všech tří stran trojúhelníku. Následně zaškrtněte zelené i modré políčko.

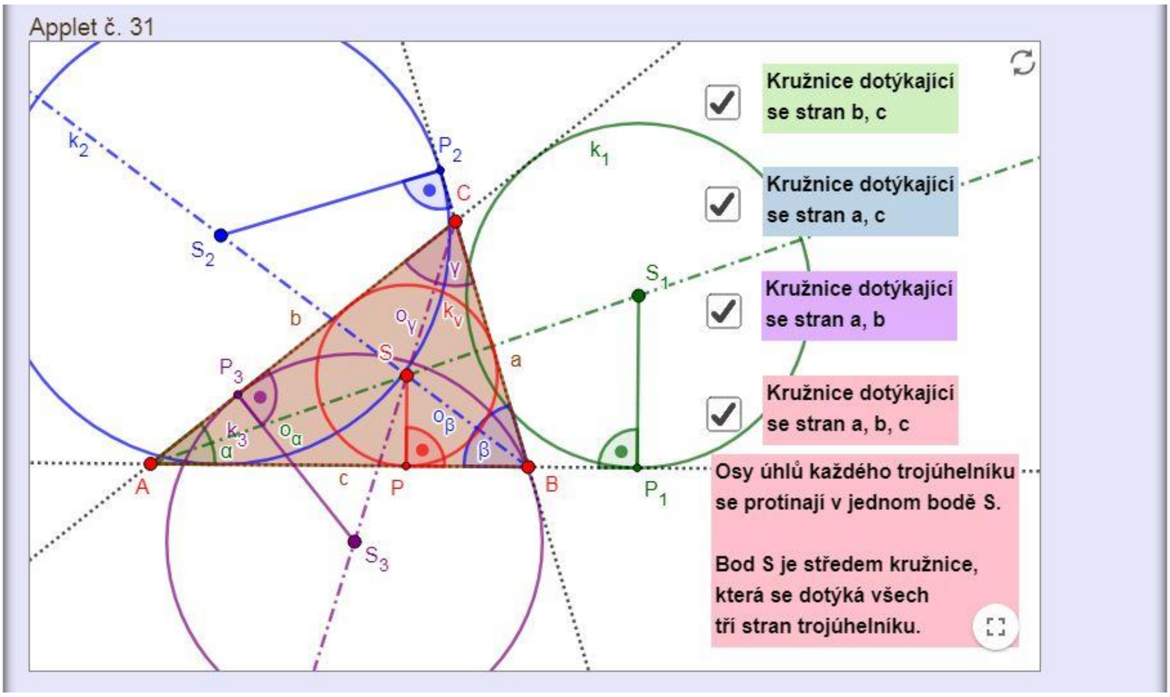
1. Jsou kružnice k_1, k_2 a k_3 shodné?
2. Kde leží středy kružnic k_1, k_2 a k_3?

Řešení

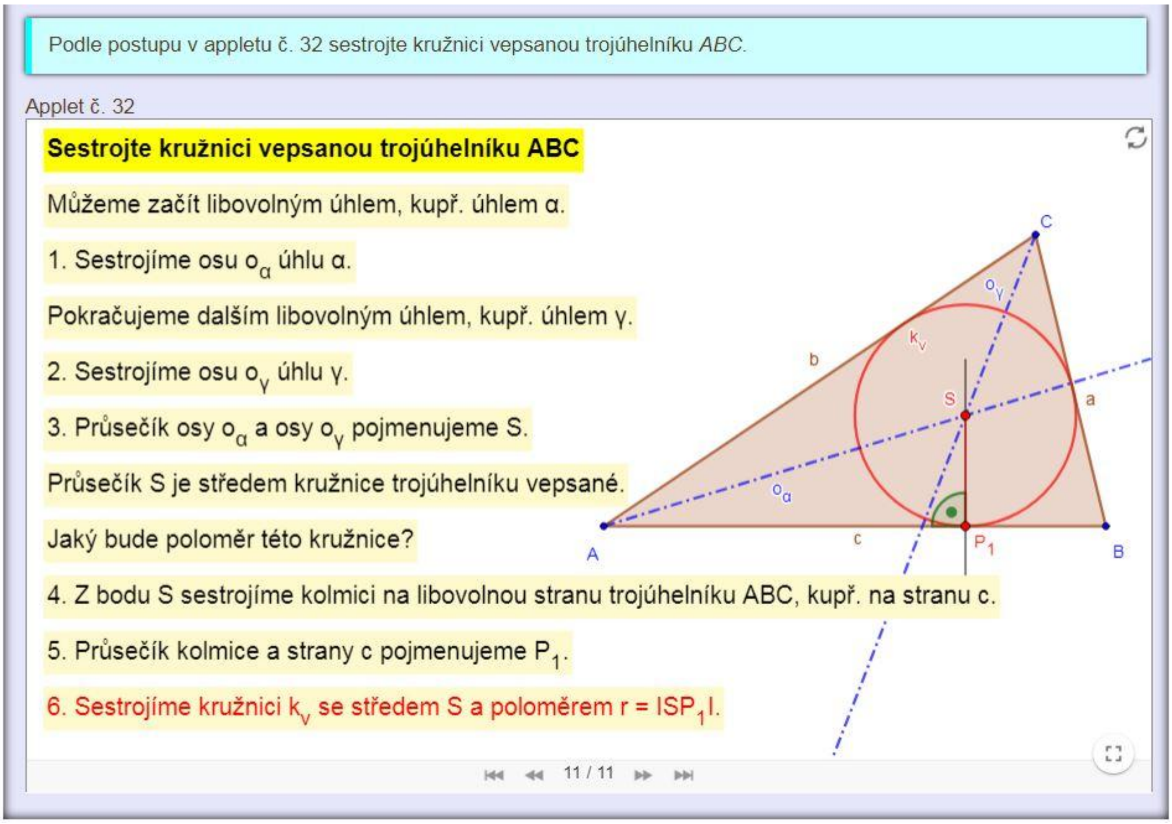
1. Kružnice k_1, k_2 a k_3 jsou shodné, shodnost v appletu závisí na přesnosti.
2. Středy kružnic k_1, k_2 a k_3 leží v průsečíku os vnitřních úhlů trojúhelníku.

Skryj řešení

Zaškrtněte červené políčko.
Změňte polohu bodů A, B a C a postup zopakujte.



Žiak má postupovať podľa pokynov. Postupne zaškrtáva políčka a posúva stredy kružníc po osiach uhlov tak, aby sa kružnice dotýkali všetkých troch strán trojuholníka *ABC*. Každá kružnica má zobrazený polomer $r = |S_1P_1|$, $r = |S_2P_2|$, $r = |S_3P_3|$. Po posunutí si žiak zobrazí všetky tri kružnice naraz. Mal by si všimnúť, že stredy kružníc splynuli do jedného bodu a tým bodom je priesečník osi uhlov a tiež, že kružnice k_1, k_2 a k_3 splynuli do jednej kružnice. Potom by mal zapnúť červené políčko, kde sa mu ukáže zhrnutie a tiež sa zobrazí červenou farbou vyznačená vpísaná kružnica k_v a priesečník osí *S* – stred vpísanej kružnice. Je vhodné prejsť applet spoločne, po vrátení sa na začiatok je možné zmeniť polohu vrcholov *A*, *B*, *C* trojuholníka *ABC* a postup opakovať.



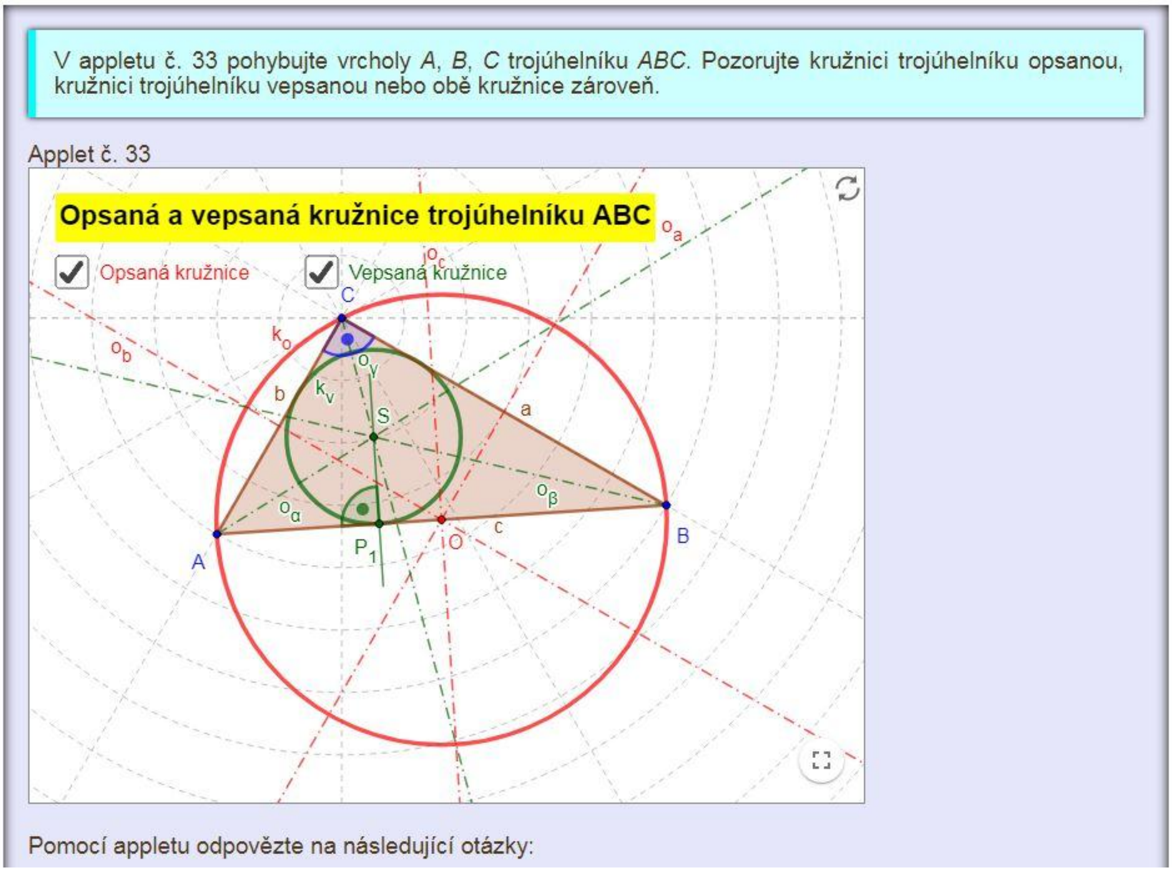
V applete je opísaný postup konštrukcie vpísanej kružnice. Jednotlivé kroky sú nasledovné:

1. Na začiatku je zobrazený trojuholník *ABC* s vyznačenými stranami *a*, *b*, *c*.
2. Zobrazí sa text „Můžeme začít libovolným úhlem, kupř. úhlem *α*.“.
3. Zobrazí sa text „1. Sestrojíme osu o_α úhlu *α*.“ a zobrazí sa osa o_α uhla *α*.
4. Zobrazí sa text „Pokračujeme dalším libovolným úhlem, kupř. úhlem *γ*.“.
5. Zobrazí sa text „2. Sestrojíme osu o_γ úhlu *γ*.“ a zobrazí sa osa o_γ uhla *γ*.
6. Zobrazí sa text „3. Průsečík osy o_α a osy o_γ pojmenujeme *S*.“ a zobrazí sa červený bod *S* – priesečník osí o_α a o_γ.
7. Zobrazí sa text „Průsečík *S* je středem kružnice trojúhelníku vepsané.“.
8. Zobrazí sa text „Jaký bude poloměr této kružnice?“.
9. Zobrazí sa text „4. Z bodu *S* sestrojíme kolmici na libovolnou stranu trojúhelníku *ABC*, kupř. na stranu *c*.“ a zostrojí sa kolmica z bodu *S* na stranu *c*.
10. Zobrazí sa text „Průsečík kolmice a strany *c* pojmenujeme P_1.“ a červenou farbou sa vyznačí priesečník kolmice a strany *c* – bod P_1.

11. Zobrazí sa červený text „6. Sestrojíme kružnici k_v se středem S a poloměrem $r = |SP_1|$.“ a zostrojí sa červená kružnica k_v a polomer vpísanej kružnice $r = |SP_1|$.

Žiak môže pohybovať vrcholmi A, B, C, alebo applet vrátiť na začiatok, zmeniť polohu vrcholov a postup konštrukcie znova opakovať. Učiteľ sa môže spýtať, aký by bol polomer kružnice, ak by sme kolmicu z bodu S zostrojili na stranu a (alebo na stranu b). Žiak by mal prísť na to, že polomer kružnice by bol vždy rovnaký, pretože bod S je od všetkých troch strán a, b, c rovnako vzdialený.

4.2.10 Kružnica opísaná a vpísaná trojuholníku



V applete č. 33 je trojuholník ABC s vyznačenými stranami a, b, c a dve zaškrtávacie políčka. V pozadí je kruhová sieť, ktorá umožňuje nastaviť rôzne typy trojuholníkov napríklad rovnostranný, pravouhlý, … Po zaškrtnutí políčka „Opsaná kružnice“ sa červenou farbou zobrazia osi strán o_a, o_b, o_c, ich priesečník O a opísaná kružnica k_o; po zaškrtnutí políčka „Vepsaná kružnice“ sa zelenou farbou zobrazia osi uhlov o_α, o_β, o_γ, ich priesečník S a vpísaná kružnica k_v.

Opísanú a vpísanú kružnicu je možné zobraziť samostatne, ale aj súčasne. Pomocou tohto appletu by mal žiak odpovedať na nasledujúce otázky.

> Kde se nachází střed *O* opsané kružnice a střed *S* vepsané kružnice, jestliže je trojúhelník ostroúhlý, pravoúhlý, nebo tupoúhlý?
>
> **Řešení**
> Když je trojúhelník ostroúhlý, tak střed *O* opsané kružnice je uvnitř.
> Když je trojúhelník pravoúhlý, tak střed *O* je uprostřed strany proti pravému úhlu.
> Když je trojúhelník tupoúhlý, tak střed *O* je vně trojúhelníku.
>
> Střed *S* vepsané kružnice je vždy uvnitř trojúhelníku.
>
> Skryj řešení

Žiak by mal v applete postupne nastaviť ostrouhlý, pravouhlý a tupouhlý trojuholník a pozorovať stred *O* opísanej kružnice a stred *S* vpísanej kružnice.

> Posuňte body *A*, *B*, *C* tak, aby střed *O* opsané kružnice a střed *S* vepsané kružnice splynuly do jednoho bodu. Jaký je trojúhelník *ABC* podle velikosti stran?
>
> **Řešení**
> Trojúhelník *ABC* je rovnostranný (a ostroúhlý). V jiném typu trojúhelníku body *O* a *S* nesplynou.
>
> Skryj řešení

Žiak postupným pohybom vrcholov A, B, C sa snaží nastaviť trojuholník ABC tak, aby stredy opísanej a vpísanej kružnice splynuli. Žiak zrejme bude skúšať rôzne možnosti, než aby nastavil trojuholník priamo na rovnostranný. Žiak by si však mal uvedomiť, že stredy opísanej a vpísanej kružnice môžu splynúť len v ostrouhlom trojuholníku.

> Je pravda, že osa úhlu protne stranu trojúhelníku vždy v jejím středu?
>
> **Řešení**
> Obecně to pravda není, ale pokud je trojúhelník:
> - rovnoramenný, tak osa úhlu při hlavním vrcholu protíná základnu v jejím středu;
> - rovnostranný, tak osa úhlu vždy protíná stranu v jejím středu.
>
> Skryj řešení

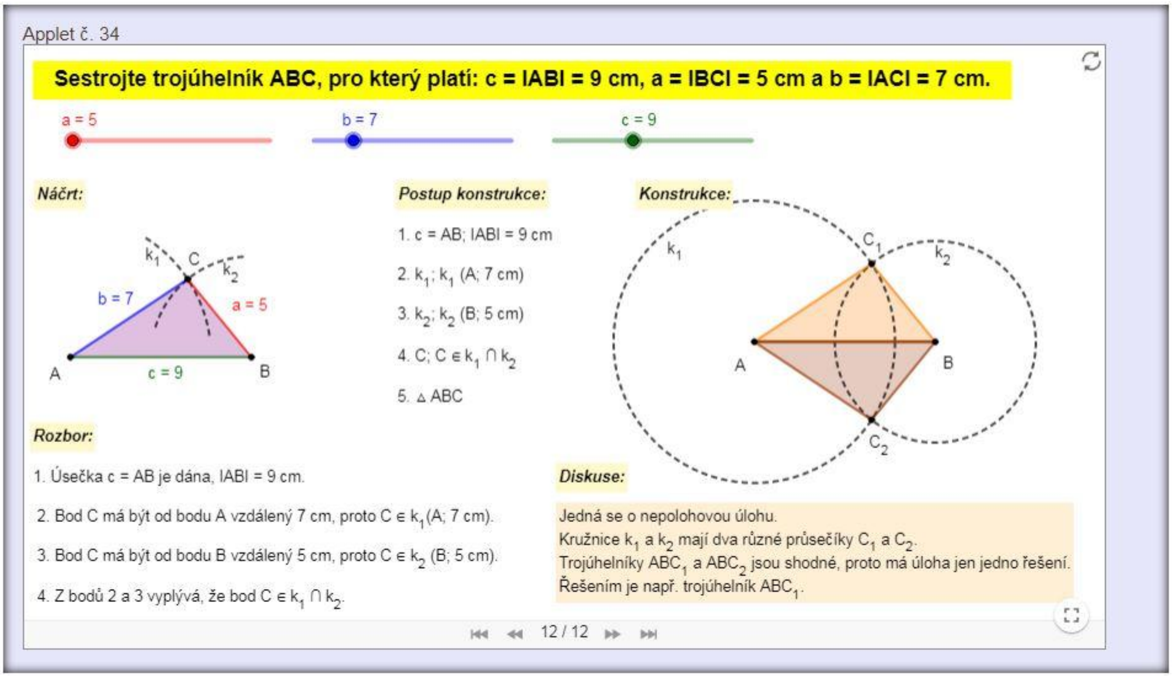
Žiak asi odpovie áno. Otázku možno formulovať aj takto: Je pravda, že osa uhla pretne os protiľahlej strany na danej strane? Alebo: Je pravda, že priesečník osi uhla a osi protiľahlej strany leží na danej strane? (Je pravda, že priesečník o_α a o_a

leží na strane *a*?) Žiak by mal pohybovať vrcholmi *A*, *B*, *C* a zistiť, že to pravda nie je. Zároveň by mal nájsť také typy trojuholníkov (rovnostranný, rovnoramenný), kedy to pravda je čiastočne alebo vždy.

4.3 Konštrukčné úlohy

V tejto časti sa venujeme základným konštrukčným úlohám – konštrukciám trojuholníkov podľa viet sss, sus a usu. Každá úloha postupne prechádza náčrtom, rozborom, postupom konštrukcie s konštrukciou a diskusiou, kde je rozobratý počet riešení. Všetky úlohy sú nepolohové.

4.3.1 Konštrukcia trojuholníka podľa vety „sss“

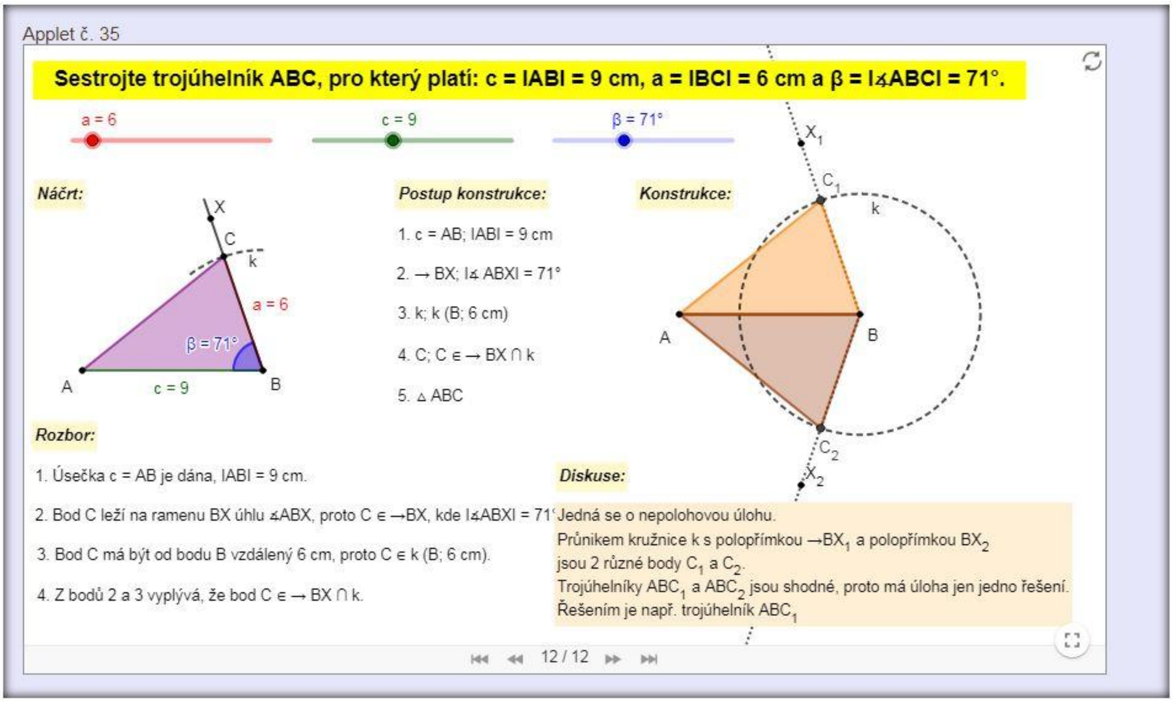


V applete je opísaný postup konštrukcie trojuholníka podľa vety „sss“. Jednotlivé kroky sú nasledovné:

1. Na začiatku sú zobrazené tri posuvníky, na ktorých je možné nastaviť dĺžky strán *a*, *b*, *c*. Je vhodné nechať ich na nastavených hodnotách, pri opätovnom prechádzaní appletu sa môžu zmeniť na začiatku, alebo aj v priebehu konštrukcie. Ďalej sú zobrazené nápisy „Náčrt“, „Rozbor“, „Postup konstrukce“, „Konstrukce“ a „Diskuse“.

2. V Náčrte sa zobrazí trojuholník *ABC* s farebne vyznačenými dĺžkami strán *a*, *b*, *c* podľa posuvníkov.
3. V Rozbore sa zobrazí text „1. Úsečka $c = AB$ je dána, $|AB| = 9$ cm.“.
4. V Rozbore sa zobrazí text „2. Bod *C* má být od bodu *A* vzdálený 7 cm, proto $C \in k_1(A; 7\text{ cm})$.“ a v Náčrte sa zobrazí časť kružnice k_1.
5. V Rozbore sa zobrazí text „3. Bod *C* má být od bodu *B* vzdálený 5 cm, proto $C \in k_2(A; 5\text{ cm})$.“ a v Náčrte sa zobrazí časť kružnice k_2.
6. V Rozbore sa zobrazí text „4. Z bodů 2 a 3 vyplývá, že bod $C \in k_1 \cap k_2$.“. Je dobré spýtať sa na podmienku – trojuholníkovú nerovnosť.
7. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „1. $c = AB$; $|AB| = 9$ cm“ a v Konštrukcii sa zobrazí úsečka *AB* s dĺžkou 9 cm.
8. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „2. k_1; k_1 (A; 7 cm)“ a v Konštrukcii sa zobrazí kružnica k_1 so stredom v bode *A* a polomerom 7 cm.
9. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „3. k_2; k_2 (B; 5 cm)“ a v Konštrukcii sa zobrazí kružnica k_2 so stredom v bode *B* a polomerom 5 cm.
10. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „4. C; $C \in k_1 \cap k_2$“ a v Konštrukcii sa vyznačia priesečníky kružníc k_1 a k_2 – body C_1 a C_2.
11. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „5. $\Delta\ ABC$“ a v Konštrukcii sa farebne vyznačia trojuholníky ABC_1 a ABC_2.
12. V Diskusii sa zobrazí text „Jedná se o nepolohovou úlohu. Kružnice k_1 a k_2 mají dva různé průsečíky C_1 a C_2. Trojúhelníky ABC_1 a ABC_2 jsou shodné, proto má úloha jen jedno řešení. Řešením je např. trojúhelník ABC_1.“.

4.3.2 Konštrukcia trojuholníka podľa vety „sus“



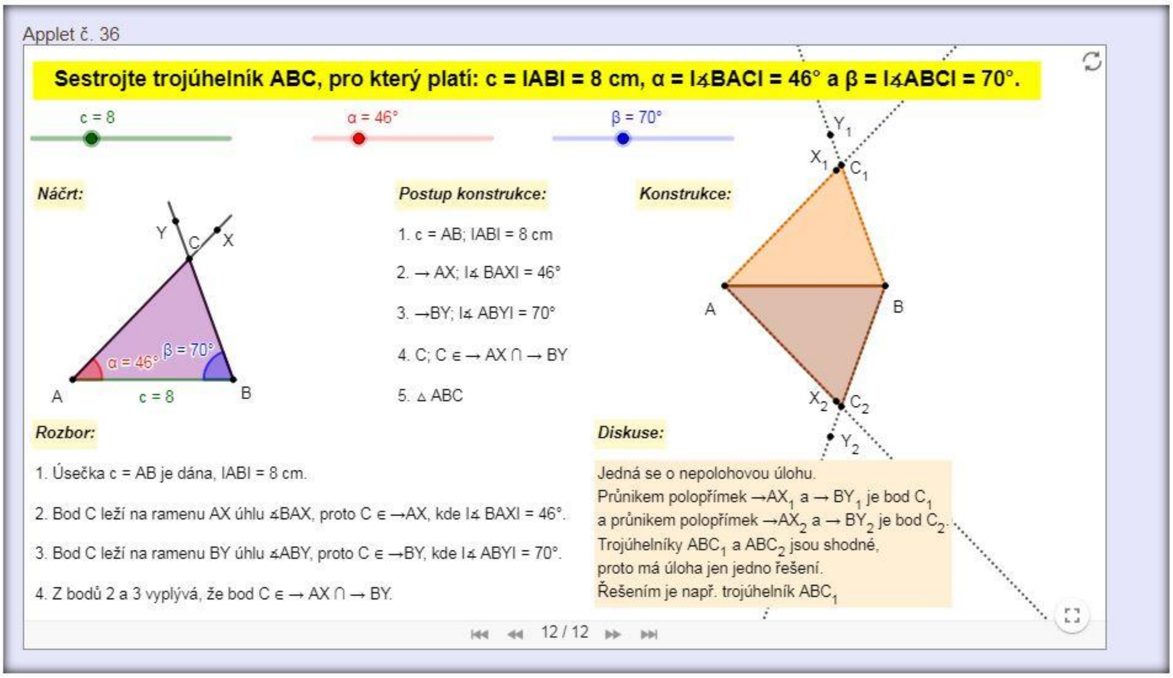
V applete je opísaný postup konštrukcie trojuholníka podľa vety „sus“. Jednotlivé kroky sú nasledovné:

1. Na začiatku sú zobrazené tri posuvníky, na ktorých je možné nastaviť dĺžky strán *a*, *c* a veľkosť uhla *β*. Je vhodné nechať posuvníky na nastavených hodnotách, pri opätovnom prechádzaní appletu sa môžu zmeniť na začiatku, alebo aj v priebehu konštrukcie. Ďalej sú zobrazené nápisy „Náčrt“, „Rozbor“, „Postup konstrukce“, „Konstrukce“ a „Diskuse“.
2. V Náčrte sa zobrazí trojuholník *ABC* s farebne vyznačenými dĺžkami strán *a*, *c* a veľkosťou uhla *β* podľa posuvníkov.
3. V Rozbore sa zobrazí text „1. Úsečka *c* = *AB* je dána, I*AB*I = 9 cm.“.
4. V Rozbore sa zobrazí text „2. Bod *C* leží na ramenu *BX* úhlu ∡ *ABX*, proto *C* ∈ →*BX*, kde I∡*ABX*I = 71°.“ a v Náčrte sa zobrazí rameno *BX* uhla ∡ *ABX*.
5. V Rozbore sa zobrazí text „3. Bod *C* má být od bodu *B* vzdálený 6 cm, proto *C* ∈ *k* (*A*; 6 cm).“ a v Náčrte sa zobrazí časť kružnice *k*.
6. V Rozbore sa zobrazí text „4. Z bodů 2 a 3 vyplývá, že bod *C* ∈ →*BX* ∩ *k*.“. Učiteľ by sa mohol spýtať na nasledujúce otázky: Existuje v tomto prípade

nejaká podmienka? Je vždy možné zostrojiť priesečník kružnice a polpriamky vychádzajúcej zo stredu danej kružnice?

7. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „1. $c = AB$; $|AB| = 9$ cm“ a v Konštrukcii sa zobrazí úsečka AB s dĺžkou 9 cm.
8. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „2. $\to BX$; $|\sphericalangle ABX| = 71°$“ a v Konštrukcii sa zobrazia polpriamky $\to BX_1$ a $\to BX_2$.
9. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „3. k; k (B; 6 cm)“ a v Konštrukcii sa zobrazí kružnica k so stredom v bode B a polomerom 6 cm.
10. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „4. C; $C \in \to BX \cap k$“ a v Konštrukcii sa vyznačia priesečníky kružnice k a polpriamok $\to BX_1$ a $\to BX_2$ – body C_1 a C_2.
11. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „5. ΔABC“ a v Konštrukcii sa farebne vyznačia trojuholníky ABC_1 a ABC_2.
12. V Diskusii sa zobrazí text „Jedná se o nepolohovou úlohu. Průnikem kružnice k s polopřímkou $\to BX_1$ a polopřímkou $\to BX_2$ jsou 2 různé body C_1 a C_2. Trojúhelníky ABC_1 a ABC_2 jsou shodné, proto má úloha jen jedno řešení. Řešením je např. trojúhelník ABC_1.“.

4.3.3 Konštrukcia trojuholníka podľa vety „usu“



V applete je opísaný postup konštrukcie trojuholníka podľa vety „usu“. Jednotlivé kroky sú nasledovné:

1. Na začiatku sú zobrazené tri posuvníky, na ktorých je možné nastaviť dĺžku strany c a veľkosti uhlov α a β. Je vhodné nechať ich na nastavených hodnotách, pri opätovnom prechádzaní appletu sa môžu zmeniť na začiatku, alebo aj v priebehu konštrukcie. Ďalej sú zobrazené nápisy „Náčrt“, „Rozbor“, „Postup konstrukce“, „Konstrukce“ a „Diskuse“.
2. V Náčrte sa zobrazí trojuholník ABC s farebne vyznačenými veľkosťami uhlov α a β a dĺžkou strany c podľa posuvníkov.
3. V Rozbore sa zobrazí text „1. Úsečka $c = AB$ je dána, $|AB| = 8$ cm.“.
4. V Rozbore sa zobrazí text „2. Bod C leží na ramenu AX úhlu $\sphericalangle BAX$, proto $C \in \rightarrow AX$, kde $|\sphericalangle BAX| = 46°$.“ a v Náčrte sa zobrazí rameno AX uhla $\sphericalangle BAX$.
5. V Rozbore sa zobrazí text „3. Bod C leží na ramenu BY úhlu $\sphericalangle ABY$, proto $C \in \rightarrow BY$, kde $|\sphericalangle ABY| = 70°$.“ a v Náčrte sa zobrazí rameno BY uhla $\sphericalangle ABY$.
6. V Rozbore sa zobrazí text „4. Z bodů 2 a 3 vyplývá, že bod $C \in \rightarrow AX \cap \rightarrow BY$.“. Je dobré sa spýtať, či musí byť splnená nejaká podmienka – súčet dvoch vnútorných uhlov v trojuholníku musí byť menší než 180° ($\alpha + \beta < 180°$).
7. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „1. $c = AB$; $|AB| = 8$ cm“ a v Konštrukcii sa zobrazí úsečka AB s dĺžkou 8 cm.
8. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „2. $\rightarrow AX$; $|\sphericalangle BAX| = 46°$“ a v Konštrukcii sa zobrazia polpriamky $\rightarrow AX_1$ a $\rightarrow AX_2$.
9. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „3. $\rightarrow BY$; $|\sphericalangle ABY| = 70°$“ a v Konštrukcii sa zobrazia polpriamky $\rightarrow BY_1$ a $\rightarrow BY_2$.
10. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „4. C; $C \in \rightarrow AX \cap \rightarrow BY$“ a v Konštrukcii sa vyznačí priesečník polpriamok $\rightarrow AX_1$ a $\rightarrow BY_1$ – bod C_1, a priesečník polpriamok $\rightarrow AX_2$ a $\rightarrow BY_2$ – bod C_2.
11. V Postupe konštrukcie sa zobrazí text „5. ΔABC“ a v Konštrukcii sa farebne vyznačia trojuholníky ABC_1 a ABC_2.
12. V Diskusii sa zobrazí text „Jedná se o nepolohovou úlohu. Průnikem polopřímek $\rightarrow AX_1$ a $\rightarrow BY_1$ je bod C_1 a průnikem polopřímek $\rightarrow AX_2$ a $\rightarrow BY_2$

je bod C_2. Trojúhelníky ABC_1 a ABC_2 jsou shodné, proto má úloha jen jedno řešení. Řešením je např. trojúhelník ABC_1.“.

5 PEDAGOGICKÝ VÝSKUM

Vzhľadom na malý počet žiakov v experimentálnej a kontrolnej skupine nemôžu byť výsledky výskumu zovšeobecniteľné na celú populáciu žiakov.

5.1 Predvýskum

Predvýskum prebiehal na prielome januára a februára 2019 na Základnej škole Lupáčova v Prahe 3 – Žižkove, na Lupáčovej ulici 1/1200 (výučbu viedla učiteľka RNDr. Iveta Plánková). Zúčastnilo sa ho 29 žiakov 7.B triedy, kde sa učivo geometrie trojuholníkov preberali ako opakovanie zo 6. ročníka. Bol uskutočnený počas štyroch hodín, dve boli v triede, za pomoci dataprojektoru, ktorý vytvorený e-kurz premietal na stenu, žiaci si chodili skúšať pohybovať vrcholmi k počítaču, tretia hodina bola v počítačovej učebni, kde boli žiaci samostatne, v dvojiciach, v trojici, štvrtá hodina bola opäť v triede, kde žiaci spracovali písomnú prácu.

<u>1. hodina</u>: žiaci označili ako trojuholník útvary 6. aj 9., potom boli navedení na rozdiel medzi kruhom a kružnicou, tak sa opravili. Žiaci rozdelili trojuholníky podľa dĺžok strán (rôznostranný trojuholník sa nazýva obecný), vedeli odôvodniť, prečo už nie je viac kategórií – buď sú tri strany rovnako dlhé a vtedy je rovnostranný; dve sú rovnako dlhé a tretia strana je iná a vtedy je rovnoramenný, alebo je každá strana iná a vtedy je obecný. Tiež rozdelili trojuholníky podľa veľkostí vnútorných uhlov a taktiež odôvodnili, že ich viac už nie je, pretože ak je jeden uhol tupý, tak zvyšné dva sú ostré a vtedy je trojuholník tupouhlý; ak je jeden uhol pravý, tak zvyšné dva sú ostré a vtedy je trojuholník pravouhlý, alebo sú všetky tri uhly ostré a vtedy je trojuholník ostrouhlý.

<u>2. hodina</u>: žiaci mali na začiatku hodiny pripomienku, že sa applety neprispôsobovali veľkosti obrazovky na mobile. Na hodine sa opakovali vety o konštrukcii trojuholníka. Pri konštrukcii trojuholníka podľa vety *sss* uviedli do rozboru aj podmienku – trojuholníkovú nerovnosť, ale v upravenej verzii – súčet dvoch kratších dĺžok strán musí byť väčší než tretia najdlhšia dĺžka strany. Žiakom aj učiteľke sa páčila dynamickosť appletu a možnosť nastaviť pomocou posuvníkov veľkosti strán trojuholníka tak, aby sa nedal zostrojiť – neplatila trojuholníková nerovnosť. Pri konštrukcii podľa vety sus žiaci uviedli do rozboru dve podmienky: veľkosť uhla, ktorý je daný musí byť menšia než 180° a daný uhol

musia zvierať dve dané strany. Pri konštrukcii podľa vety usu uviedli žiaci v rozbor opäť dve podmienky: súčet veľkostí daných uhlov musí byť menší než 180° a dané uhly musia byť priľahlé k danej strane. Jeden zo žiakov sa spýtal na postup konštrukcie, či môže začať aj danou stranou a potom zostrojovať uhly. Žiaci pri každej konštrukcii posúvali posuvníkmi a sledovali zmeny v konštrukcii. Tiež postupne nastavili dané prvky tak, aby konštrukcia trojuholníka nebola možná.

<u>3. hodina</u>: prebiehala v počítačovej učebni. Pri stredných priečkach som bola upozornená na označenie stredu strany – napr. pre stred strany *b* používajú označenie B_1 namiesto S_b. Na tejto hodine boli zopakované stredné priečky, výšky a ťažnice. Na konci hodiny bol rozdaný dotazník (príloha A).

1. <u>Som chlapec / dievča.</u>

   Na túto položku odpovedali všetci, dievčat bolo 16 (59,26 %) a chlapcov 11 (40,74 %).

2. <u>Ktorý applet sa Ti najviac páčil a prečo?</u>

   Applet č. 1 (myslená prvá časť – Základné prvky trojuholníka), pretože „přišel mi nejvíce zajímavý“, „byl poučný a dalo se pohybovat s trojúhelníkem“, „byl nejvíce zajímavý“, „všechno bylo barevně a důrazně zvýrazněné“.

   Applet č. 2 (myslená druhá časť – Významné prvky trojuholníka), pretože „byl hodně zajímavý“, „byl zajímavý“, „byl propracovaný“, „nejlépe je vidět co se stane, když změníme velikost strany“, „líbilo se mi pohybování bodem, když se měnily výšky“, „vše bylo dobře označené“, „dalo se pohybovat s body“.

   Applet č. 3 (myslená tretia časť – Konštrukčné úlohy), pretože „byla tam sranda“, „byl hodně propracovaný“, „byl hezky vypracovaný“, „víc jsme si toho připomněli“, „dalo se pohybovat s body“.

   Applet č. 2, pretože „zdál se mi nejlehčí“, applet č. 3, pretože „nejvíce jsem se zapojovala a nenudila“, applet č. 5, pretože „bylo to přehledný“, applet č.

6, pretože „je přehledný co lze a nelze sestrojit“, applet č. 13, pretože „bylo v něm mnoho informací a jak jsme pohybovali bodem C různě se ty informace měnily“ a „líbilo se mi jak můžu pohybovat body“, applet č. 14, pretože „když tam byly ty čtverečky, bylo to přehlednější", applet č. 3.1 (myslený prvý applet v tretej časti (č. 34) – Konštrukčné úlohy) dôvod nebol uvedený, jeden chlapec napísal „nevím, protože jsem chyběl“, iný napísal „líbily se mi všechny, takže to bylo všechno dobré“, jedno dievča neuviedlo odpoveď.

3. <u>Ktorý applet sa Ti najmenej páčil a prečo?</u>

   Applet č. 1 (myslená prvá časť – Základné prvky trojuholníka), pretože „nevím, prostě 2, 3 mě bavily víc“, „nebyl moc zajímavý“, „byl moc nudný“, applet č. 3 (myslená tretia časť – Konštrukčné úlohy), pretože „nebyl zajímavý“, applet č. 4, pretože „nepochopil jsem ho“, applet č. 5, pretože „nešlo v něm hýbat body“ a „moc jsem nerozuměla“, applet č. 9, pretože „je nepřehlednej“, applet č. 13, pretože „moc jsem se v tom nevyznala“, applet č. 14, pretože „trochu jsem se v tom ztrácela (jinak dobré)“, applet č. 19, pretože „spíš jde o to, že mě tahle část učiva o trojúhelnících nebaví“, applet č. 2.1 (myslený prvý applet v druhej časti) dôvod nebol uvedený. 11 žiakov neuviedlo žiadny applet a ako dôvod uviedli „všechny se mi líbily“, „všechny byly něčím hezké a zajímavé“ a „líbí se mi vše. Také je dobré, že pod konstrukcí trojúhelníků je něco napsáno.“, jeden žiak uviedol „nevím, protože jsem chyběl“, tri dievčatá neuviedli ani applet ani dôvod.

4. <u>Aká časť grafického spracovania sa Ti najviac páčila? Prečo?</u>

   Časť Základné prvky trojuholníka označilo 11 žiakov (40,74 %) – 6 chlapcov a 5 dievčat. Ako dôvody uviedli: „zopakoval jsem si trojúhelník“, „protože to šlo nejlépe pochopit a vypočítat“, „protože jsem tomu dobře rozuměl“, „přišlo mi to nejzábavnější“, „bylo to zajímavější“, „líbily se mi ty obrazce a propracování toho“, „připomněla jsem si rýsování trojúhelníků“. Časť Významné prvky trojuholníka označilo 9 žiakov (33,33 %) – 2 chlapci a 6 dievčat. Ako dôvody uviedli: „bavilo mě pozorovat jak, když pohybuji body, ostatní se taky mění“, „vzpomněla jsem si na to, i jsem se to pomocí tohoto appletu naučila“, „bylo to tam nejlépe napsané a vysvětlené“, „můžu pohybovat body, a proto si lépe dokážu představit trojúhelníky s různými velikostmi stran“, „bylo to pěkné, jak se s tím dalo hýbat“. Časť Konštrukčné úlohy označilo 6 žiakov (22,22 %) – 2 chlapci a 4 dievčatá. Ako dôvody uviedli: „posouvání vrcholů, a jak to měnilo ten trojúhelník“, „je zábava si to vyzkoušet“, „byla to zábava, si to vše vyzkoušet a zkusit“. Jeden žiak neoznačil žiadnu časť a ako dôvod uviedol „nevím, protože jsem chyběl“.

5. Pomohol Ti niektorý z appletov pri pochopení niečoho, čomu si predtým nerozumel? Ktorý? Ako?

   Na túto položku 25 žiakov (92,59 %) uviedlo, že všetkému rozumeli. Jeden chlapec uviedol, že mu pomohol applet 2 (myslená druhá časť – Významné prvky trojuholníka) a „už vím, jak se mají rýsovat výšky“. Jedno dievča uviedlo, že jej pomohol applet 19 a „připomněla jsem si postup“.

6. Dokážeš si teraz príslušné geometrické pojmy lepšie predstaviť?

   Na túto položku 23 žiakov (85,19 %) zakrúžkovalo odpoveď áno, 4 žiaci (dvaja chlapci a dve dievčatá) zakrúžkovali odpoveď nie.

7. Dokážeš s príslušnými geometrickými pojmami lepšie pracovať vo svojich predstavách?

   Pri tejto položke 20 žiakov (74,07 %) zakrúžkovalo odpoveď áno, 7 žiakov (3 chlapci a 4 dievčatá) zakrúžkovalo odpoveď nie.

8. Ktorý applet by si zmenil? Ako?

   Na túto položku 25 žiakov (92,59%) odpovedalo, že žiadny. Iba dve dievčatá uviedli, že by niektorý applet zmenili, a to applet č. 3, pretože „zajímalo by mě, jak velké jsou ty úhly“ a applet č. 1 (myslená prvá časť – Základné prvky trojuholníka), pretože „přidat k tomu něco navíc – např. zajímavosti“.

9. Ktorý applet by si doplnil? Čo mu, podľa Tvojho názoru, chýbalo?

Na túto položku 24 žiakov (88,89 %) uviedlo, že žiadny. Tri dievčatá uviedli, že by doplnili applet č. 2 „přidala bych víc úseček než jen úsečku *AY*“, applet č. 1 (myslená prvá časť – Základné prvky trojuholníka), dôvod nebol uvedený a applet č. 2, kde žiačka uviedla „pod poslední konstrukci bych něco napsala“.

10. <u>Ktorému z appletov si nerozumel?</u>

Na túto položku 24 žiakov (88,89 %) uviedlo, že všetkému som rozumel. Traja chlapci uviedli, že nerozumeli appletom č. 3, 1 (myslená tretia časť – Konštrukčné úlohy a prvá časť – Základné prvky trojuholníka), appletu č. 4 a appletu č. 3 (myslená tretia časť – Konštrukčné úlohy).

<u>4. hodina:</u> poslednú hodinu žiaci písali písomnú prácu (príloha B, C). Boli rozdelení do dvoch skupín – skupinu A tvorilo 12 žiakov a skupinu B 11 žiakov. Výsledky sú zhrnuté v tabuľkách 5.1 a 5.2 a následne je uvedený slovný opis jednotlivých úloh.

Tab. 5.1 Výsledky písomnej práce v skupine A

7.B skupina A	**Úloha** (plný počet bodov)										**spolu**	%
	1 (3)	**2** (3)	**3** (2)	**4** (2)	**5** (1)	**6** (3)	**7** (2)	**8** (2)	**9** (9)	**10** (3)	**30 b**	
žiak 1	3	0	2	2	1	3	2	2	8	1	24	80
žiak 2	3	0	2	2	1	2,5	0	1	9	3	23,5	78,33
žiak 3	3	3	2	2	1	2	0	1	8	1	23	76,67
žiak 4	3	3	2	2	1	2	0	1	8	1	23	76,67
žiak 5	3	1	2	2	1	2	2	1,5	8	0	22,5	75
žiak 6	3	0	2	2	1	1	2	1	7	3	22	73,33
žiak 7	3	0	2	2	1	3	1	0	9	0	21	70
žiak 8	3	0	2	2	1	2	0,5	0	7	3	20,5	68,33
žiak 9	3	0	2	2	1	1	2	0	7	1	19	63,33
žiak 10	3	0	1	2	1	0	0	1	7	0	15	50
žiak 11	0	0	1	0	0	2	1	1	9	1	15	50
žiak 12	0	0	1	0	0	2	0	2	9	1	15	50
priemer za úlohu	2,5	0,58	1,75	1,67	0,83	1,88	0,88	0,96	8	1,25	20,29	67,64
v bodoch, v %	83,33	19,44	87,5	83,33	83,33	62,5	43,75	47,92	88,89	41,67		

Tab. 5.2 Výsledky písomnej práce v skupine B

7.B skupina B	**Úloha** (plný počet bodov)										**spolu**	%
	1 (3)	**2** (3)	**3** (2)	**4** (2)	**5** (1)	**6** (3)	**7** (2)	**8** (2)	**9** (9)	**10** (3)	**30 b**	
žiak 1	3	3	2	1,5	1	2	1	2	9	3	27,5	91,67
žiak 2	3	3	2	1,5	1	3	1	1	9	3	27,5	91,67
žiak 3	3	3	2	2	1	2	2	1	8	3	27	90,00
žiak 4	3	3	2	2	1	3	0	0	9	3	26	86,67
žiak 5	3	3	2	1,5	1	0	1	2	9	3	25,5	85
žiak 6	3	0	2	2	1	2	2	1	9	3	25	83,33
žiak 7	3	0	2	2	1	2	0	1	9	3	23	76,67
žiak 8	3	0	2	2	0,5	2,5	2	0	7	3	22	73,33
žiak 9	3	0	2	2	1	1	1	0	9	2	21	70
žiak 10	3	0	2	2	0,5	0	1	2	7	3	20,5	68,33
žiak 11	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	6	20
priemer za úlohu	2,73	1,36	1,82	1,68	0,82	1,59	1	1	7,91	2,91	22,82	76,06
v bodoch, v %	90,91	45,45	90,91	84,09	81,82	53,03	50	50	87,88	96,97		

Úlohy:

1. **A:** Rozdeľ trojuholníky podľa veľkostí ich strán.

   Za túto úlohu mohli žiaci získať 3 body, úspešnosť úlohy bola 83,33 %. Žiaci s touto úlohou nemali problém, iba dvaja žiaci sa pomýlili a napísali rozdelenie trojuholníkov podľa veľkostí ich vnútorných uhlov.

   B: Rozdeľ trojuholníky podľa veľkostí ich uhlov.

   Za túto úlohu mohli žiaci získať 3 body, úspešnosť úlohy bola 90,91 %. Žiaci s touto úlohou nemali problém, iba jeden žiak odpoveď neuviedol.

2. **A:** Zdôvodni, prečo nie je viac kategórií trojuholníkov pri rozdelení podľa veľkostí strán.

   Za túto úlohu mohli žiaci získať 3 body, úspešnosť úlohy bola 19,44 %. Pri tejto úlohe bol problém s odôvodnením. Iba dve žiačky ju mali správne; napísali „trojúhelník má pouze 3 strany, takže jsou možné jen 3 možnosti rozdělení – každá jiná, dvě stejné jedna jiná, všechny stejné“ a „protože má trojúhelník 3 strany: 1. všechny strany stejné, 2. každá strana jiná, 3. 1 jiná 2 stejné; takže máme 3 rozdělení“.

B: Zdôvodni, prečo nie je viac kategórií trojuholníkov pri rozdelení podľa veľkostí uhlov.

Za túto úlohu mohli žiaci získať 3 body, úspešnosť úlohy bola 45,45 %. Táto úloha rozdelila žiakov na skupiny viem alebo neviem. Pôvodne som očakávala odpoveď typu: Každý trojuholník má dva ostré uhly a tretí uhol môže byť len ostrý, pravý alebo tupý. Takéto odôvodnenie ale nikto neuviedol. Žiaci uviedli „protože kdyby existovala ještě další kategorie, už by nedával součet všech vnitřních úhlů 180°“ čím vlastne tvrdia to isté.

3. **A:** Načrtni trojuholník *PQR* a označ správne jeho strany.

Za túto úlohu mohli žiaci získať 2 body, úspešnosť úlohy bola 87,5 %. Jeden žiak síce správne označil ale strany trojuholníka *STU*. Iný žiak označil stranu oproti vrcholu *P* písmenom *s* a ďalší načrtol iba trojuholník *PQR* a jeho strany neoznačil.

B: Načrtni trojuholník *STU* a označ správne jeho strany.

Za túto úlohu mohli žiaci získať 2 body, úspešnosť úlohy bola 90,91 %. Iba jeden žiak túto úlohu nevyriešil.

4. **A:** V rovnoramennom trojuholníku vyznač ramená a základňu.

Za túto úlohu mohli žiaci získať 2 body, úspešnosť úlohy bola 83,33 %. Dvaja žiaci zrejme opisovali z druhej skupiny a v pravouhlom trojuholníku vyznačili preponu a odvesny.

B: V pravouhlom trojuholníku vyznač odvesny a preponu.

Za túto úlohu mohli žiaci získať 2 body, úspešnosť úlohy bola 84,09 %. Jeden žiak túto úlohy nemal a traja žiaci označili odvesny ako priľahlú a protiľahlú odvesnu.

5. **A:** Trojuholník *DEF* s dĺžkami strán 8 cm, 7 cm a 6 cm bol rozdelený strednými priečkami na štyri trojuholníky. Aké dĺžky strán má trojuholník $D_1E_1F_1$?

Za túto úlohu mohli žiaci získať 1 bod, úspešnosť úlohy bola 83,33 %. Iba dvaja žiaci túto úlohu nemali, pretože opísali riešenie z druhej skupiny aj s označením strán *a*, *b*, *c*.

B: Trojuholník *ABC* s dĺžkami strán 4 cm, 5 cm a 6 cm bol rozdelený strednými priečkami na štyri trojuholníky. Aké dĺžky strán má trojuholník $A_1B_1C_1$?

Za túto úlohu mohli žiaci získať 1 bod, úspešnosť úlohy bola 81,82 %. Jeden žiak túto úlohu nemal, dve žiačky mali malé chyby.

6. **A, B:** Načrtni, kde ležia výšky v ostrouhlom, pravouhlom a tupouhlom trojuholníku.

Za túto úlohu mohli žiaci získať 3 body, úspešnosť úlohy bola v skupine A 62,5 %, v skupine B 53,03 %, celkovo 57,97 %. Ťažkosti robilo načrtnutie výšok v tupouhlom trojuholníku, hlavne výšok, ktoré sa nachádzajú mimo tento trojuholník a vyznačenie krajných bodov výšok – nebolo preto možné jednoznačne určiť, čo je výška. Ďalšou častou chybou bolo načrtnutie iba jednej výšky v trojuholníku. V jednom prípade žiačka načrtla namiesto výšok ťažnice.

7. **A, B:** Ako ďaleko leží ťažisko *T* od vrcholu a od stredu protiľahlej strany, ak je dĺžka ťažnice 6 cm?

Za túto úlohu mohli žiaci získať 2 body, úspešnosť úlohy bola v A skupine 43,75 %, v B skupine 50 %, celkovo 46,74 %. Táto úloha rozdelila žiakov na skupiny viem alebo neviem. Tí, ktorí mali 1 bod buď uviedli dĺžku od ťažiska k vrcholu alebo od ťažiska k stredu protiľahlej strany, prípadne uviedli dĺžky teoreticky ako ⅓ a ⅔ dĺžky ťažnice alebo cez pomer dĺžok.

8. **A, B:** Je možné vždy zostrojiť trojuholník podľa vety sus? Uveď príklad.

Za túto úlohu mohli žiaci získať 2 body, úspešnosť úlohy bola v A skupine 47,92 %, v B skupine 50 %.

9. **A, B:** Ku každej kombinácii trojuholníkov napíš, či môžu existovať. Píš A – áno, N – nie.

Rovnostranný - ostroúhlý	
Rovnostranný - pravoúhlý	
Rovnostranný - tupoúhlý	

Rovnoramenný - ostroúhlý	
Rovnoramenný - pravoúhlý	
Rovnoramenný - tupoúhlý	

Obecný - ostroúhlý	
Obecný - pravoúhlý	
Obecný - tupoúhlý	

Za túto úlohu mohli žiaci získať 9 bodov, úspešnosť úlohy bola v skupine A 88,89 %, v skupine B 87,88%, celkovo v oboch skupinách 88,41 %. Kombinácie s obecným (rôznostranným) trojuholníkom nerobili problém. Problémy sa najčastejšie vyskytli pri kombináciách rovnoramenný – pravouhlý, rovnoramenný – tupouhlý a rovnostranný – pravouhlý trojuholník, ktoré boli označené ako neexistujúce. Jeden žiak odpovede asi len tipoval.

10. **A:** Môže existovať trojuholník s takýmito veľkosťami vnútorných uhlov?

a) 27°, 33°, 120°; b) 80°, 93°, 27°; c) 13°, 36°, 61°.

Za túto úlohu mohli žiaci získať 3 body, úspešnosť úlohy bola 41,67 %. Častou chybou bola nepozornosť a označenie a) nie, b) áno. V dvoch prípadoch žiačky túto úlohu zabudli vyriešiť.

B: Môže existovať trojuholník s takýmito dĺžkami strán?

a) 2 cm, 3 cm, 5 cm; b) 4 cm, 8 cm, 10 cm; c) 7 cm, 1 cm, 5 cm.

Za túto úlohu mohli žiaci získať 3 body, úspešnosť úlohy bola 96,97 %. Jedinou chybou bolo označenie a) áno.

5.2 Úpravy hlavného výskumu na základe predvýskumu

Úpravy elektronického kurzu

V e-kurze bol doplnený úvod – vysvetlenie použitého farebného kľúča, vysvetlenie čo je applet a ovládanie appletov. Celý kurz sa graficky zjednotil podľa druhej časti kurzu, ale došlo k úprave a doplneniu farebného kľúča. V časti Základné prvky trojuholníka sa zmenilo poradie kapitol a zrušili sa podkapitoly, niektoré applety boli odstránené, iné boli novo vytvorené a pridané. V časti Významné prvky trojuholníka pribudli opísaná a vpísaná kružnica, pretože trieda, ktorá sa zúčastnila predvýskumu ich v 6. ročníku nepreberala. Taktiež pribudla kapitola Výšky a ťažnice v trojuholníku, kde sú zobrazené výšky aj ťažnice v jednom trojuholníku a kapitola Opísaná a vpísaná kružnica v trojuholníku, kde sú obe kružnice zobrazené v jednom trojuholníku. V časti Konštrukčné úlohy bolo doplnené grafické spracovanie.

<u>Úpravy dotazníka</u>

Dotazník prakticky ostal taký, aký bol, len položka č. 4 „Aká časť grafického spracovania sa Ti najviac páčila? Prečo?“ bola odstránená, položka č. 5 „Pomohol Ti niektorý z appletov pri pochopení niečoho, čomu si predtým nerozumel? Ktorý? Ako?“ bola preformulovaná na „Ktoré applety Ti najviac pomohli pri pochopení nového učiva?“ a položky boli formulované v množnom čísle „Ktoré applety ...“ namiesto jednotného čísla „Ktorý applet ...“.

<u>Úpravy písomnej práce</u>

Písomná práca bola upravená výraznejšie. Pribudla vstupná písomná práca – opakovanie z I. stupňa: čo je trojuholník, rozdelenie trojuholníkov podľa veľkosti strán a podľa veľkosti vnútorných uhlov, rysovanie priamky a polpriamky, kolmice a rovnobežky (aj daným bodom), kružnice a trojuholníka vo štvorcovej sieti. Upravená výstupná písomná práca čerpala z písomnej práce z predvýskumu. Na rozdiel od predvýskumu, kde boli skupiny A a B, vo výskume bola použitá len jedna skupina. <u>Úloha 1</u> spojila úlohy 1 z A aj B skupiny, <u>úloha 2</u> prevzala úlohu 3 z B skupiny, <u>úloha 3</u> bola prevzatá z úlohy 4 z A skupiny a upravená – žiaci mali v pripravenom rovnoramennom trojuholníku označiť hlavný vrchol H, ramená r, základňu z a uhol pri základni ε, <u>úloha 4</u> prevzala úlohu 10 c) z B skupiny a požadovala odôvodnenie, <u>úloha 5</u> prevzala úlohu 9 a bola skrátená len na tri kombinácie, <u>úloha 6</u> bola nová, <u>úloha 7</u> prevzala úlohu 10 a) z A skupiny a požadovala odôvodnenie, <u>úloha 8</u> bola nová, <u>úloha 9</u> bola nová, <u>úloha 10</u> bola nová, <u>úloha 11</u> prevzala úlohu 6 a bolo potrebné dorysovať výšky namiesto ich načrtnutia, úloha 12 prevzala úlohu 7 a zmenila sa dĺžka ťažnice, úloha 13 bola nová, úloha 14 bola nová.

5.3 Hlavný výskum

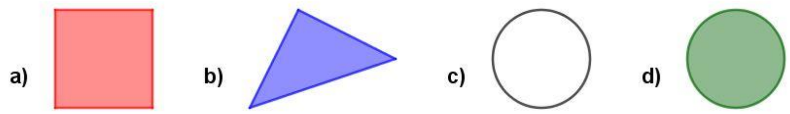
Hlavný výskum sa uskutočnil v marci až apríli 2019 na Základnej škole a materskej škole v Prahe 3, námestie Jiřího z Lobkovic 22/121 (výučbu viedla riaditeľka školy Mgr. Naděžda HREBÍKOVÁ). Výskumu sa zúčastnili dve triedy v 6. ročníku:

- trieda 6.A ako kontrolná skupina,
- trieda 6.B ako experimentálna skupina.

Obe skupiny mali na začiatku vstupnú písomnú prácu (príloha D), následne prebiehala klasická výučba v triede 6.A a experimentálna výučba v triede 6.B. Potom žiaci oboch tried písali výstupnú písomnú prácu (príloha E) a žiaci experimentálnej triedy 6.B vyplnili aj dotazník (príloha F).

5.3.1 Vstupná písomná práca

1. Urči, ktorý zo zobrazených obrazcov je trojuholník. (1 bod)



6.A: Úspešnosť úlohy bola 100 %.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 100 %.

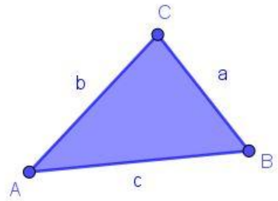
2. Vymenuj druhy trojuholníkov podľa dĺžok ich strán. (3 body)

6.A: Úspešnosť úlohy bola 65,15 %. Každý žiak uviedol rovnoramenný a až na jedného aj rovnostranný trojuholník, obecný (rôznostranný) trojuholník neuviedol nikto. Namiesto toho bol písaný pravouhlý trojuholník.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 48,33 %. Rovnostranný trojuholník uviedlo 60 % žiakov, rovnoramenný trojuholník 85 % žiakov a obecný (rôznostranný) trojuholník neuviedol nikto.

Pomenovanie „obecný trojúhelník“ ešte nebolo zavedené.

3. Napíš, ako sú v trojuholníku *ABC* na obrázku označené: (2 body)
   a. jeho vrcholy,
   b. jeho strany.



6.A: Úspešnosť úlohy bola 54,55 %. Pri tejto úlohe bolo zaujímavé pochopenie zadania. Tí, ktorí si ho prečítali, mali úlohu správne a tí, ktorí zadanie len preleteli zakrúžkovali ako odpoveď a), pretože v zadaní videli veľké písmena. Alebo sa vyskytli odpovede, že vrcholy sú označené veľkými písmenami a strany malými písmenami.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 50 %. Tu bola situácia rovnaká ako v 6.A.

4. Narysuj priamku ↔*AB* a polpriamku →*CD*. (2 body)

6.A: Úspešnosť úlohy bola 40,91 %. Priamku zvládlo 36,36 % žiakov, polpriamku 45,45 %. Iba 6 žiakov (27,27 %) malo správne narysovanú priamku aj polpriamku. Najväčší problém robilo správne vyznačenie bodov.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 35 %. Priamku zvládlo 40 % žiakov, polpriamku 30 %. Iba 4 žiaci (20 %) mali správne narysovanú priamku aj polpriamku, ale až 10 žiakov (50 %) nemalo správne narysované ani jedno. Najväčší problém robilo správne vyznačenie bodov.

5. Narysuj rovnobežky *p* a *q*. (1 bod)

6.A: Úspešnosť úlohy bola 100 %.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 90 %. Jeden žiak vôbec úlohu neriešil, jeden rysoval nepresne.

6. Narysuj kružnicu so stredom *S* a polomerom 2 cm. (1 bod)

   6.A: Úspešnosť úlohy bola 59,09 %. Problém bol s presným určením stredu S, bola iba dierka od kružidla, občas sa vyskytla nepresnosť v rysovaní – väčší polomer, alebo viacero čiar.

   6.B: Úspešnosť úlohy bola 80 %. Problém bol v presnom rysovaní a presnom určení stredu S.

7. Vo štvorcovej sieti narysuj trojuholník, ktorého jedna strana má dĺžku tri dieliky a druhá strana štyri dieliky. (1 bod)

   6.A: Úspešnosť úlohy bola 54,55 %. Časť žiakov síce narysovala trojuholník s dĺžkami strán 3 a 4 dieliky, ale tie boli rôzne veľké.

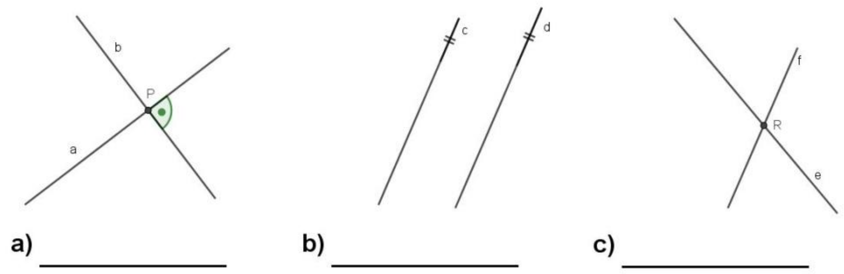
   6.B: Úspešnosť úlohy bola 55 %. Situácia bola rovnaká ako v 6.A.

8. Narysuj kolmice *k* a *l* a pomenuj ich priesečník. (2 body)

   6.A: Úspešnosť úlohy bola 81,82 %. Kolmice narysovalo 86,36 % žiakov, priesečník správne pomenovalo 77,27 %. Chybou bolo nepomenovanie priesečníka, alebo jeho označenie malým písmenom, nebol narysovaný pravý uhol, prípadne jeden žiak namiesto kolmíc narysoval kružnice.

   6.B: Úspešnosť úlohy bola 80 %. Kolmice narysovalo 85 % žiakov, priesečník pomenovalo 75 %. Až 15 žiakov (75 %) malo celú úlohu správne, dvaja žiaci pomenovali stred malým písmenom, dvaja žiaci nenarysovali kolmice vôbec a jeden žiak narysoval rovnobežky *k* a *l* preťaté kolmou priamkou.

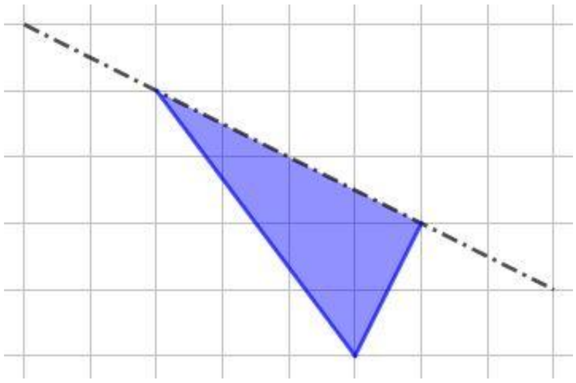
9. Pomenuj priamky na obrázkoch. (3 body)



6.A: Úspešnosť úlohy bola 60,61 %. Kolmice správne pomenovalo 68,18 % žiakov, rovnobežky 90,91 % a rôznobežky 22,73 %. Častou chybou pri kolmiciach bolo pomenovanie, že priamky sú pravouhlé, pri rovnobežkách problém nebol, iba dvaja žiaci ich nepomenovali. Rôznobežky 10 žiakov nepomenovalo, 5 žiakov uviedlo pomenovanie priesečník, jeden kolmice a jeden krivobežky.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 71,67 %. Kolmice správne pomenovalo 80 % žiakov, rovnobežky 90 % a rôznobežky 45 %. Jeden žiak pri pomenovaní kolmíc napísal matematické označenie $a \perp b$, ďalší napísali pravý uhol, alebo priesečník. Pri rovnobežkách jeden žiak napísal $c \parallel d$ a jeden nenapísal nič. Rôznobežky žiadne riešenie neuviedlo 5 žiakov, dvaja ich pomenovali ako kolmice, jeden ich označil symbolom $\nparallel$, a jeden symbolom $\nmid$ (čo je symbol pre číslo „nedelí“), dvaja žiaci vymysleli nové pomenovanie a to šikmobežky a priamky „sestykající“.

10. Vo štvorcovej sieti dokresli podľa osi súmernosti chýbajúcu časť trojuholníka. (1 bod)



6.A: Úspešnosť úlohy bola 95,45 %. Aj keď šlo o dokreslenie, jeden žiak mal riešenie veľmi nepresné. Iba 5 žiaci vyznačili aj vnútro trojuholníka.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 95 %. Jeden žiak neuviedol žiadne riešenie.

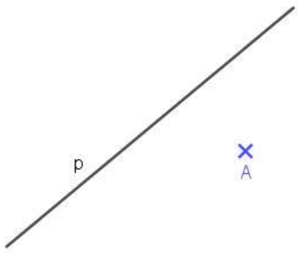
11. Načrtni trojuholník, ktorý je : (3 body)

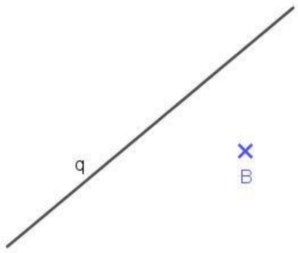
a) pravouhlý, b) rovnostranný, c) rovnoramenný.

6.A: Úspešnosť úlohy bola 63,64 %. Pravouhlý trojuholník správne načrtlo 77,27 % žiakov, rovnostranný 72,73 % a rovnoramenný 40,91 %. Pravouhlý trojuholníka sa 4 žiaci ani nepokúsili načrtnúť, jeden žiak tam mal viditeľne tupý uhol. Pri rovnoramennom trojuholníku sa trojuholník 5 žiakov podobal viac na rovnoramenný (ani v rámci tolerancie načrtnutia nemohol byť uznaný), jeden žiak trojuholník vôbec nenačrtol. Rovnoramenný trojuholník nenačrtlo 8 žiakov, 5 žiakov malo náčrty veľmi nepresné.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 58,33 %. Pravouhlý trojuholník správne načrtlo 75 % žiakov, rovnostranný 45 % a rovnoramenný 55 %. Pravouhlý trojuholník sa 5 žiakov ani nepokúsilo načrtnúť. Pri rovnostrannom trojuholníku traja žiaci načrtli rôznostranný (obecný) trojuholník, traja žiaci zamenili rovnostranný a rovnoramenný trojuholník, ale iba jeden označil šípkami, že majú byť opačne a šesť žiakov nenačrtlo žiadne riešenie. Pri rovnoramennom trojuholníku jeden žiak načrtol rôznostranný (obecný), jeden pravouhlý, traja žiaci zamenili rovnostranný a rovnoramenný trojuholník, ale iba jeden označil šípkami, že majú byť opačne a 5 žiakov nenačrtlo žiadne riešenie.

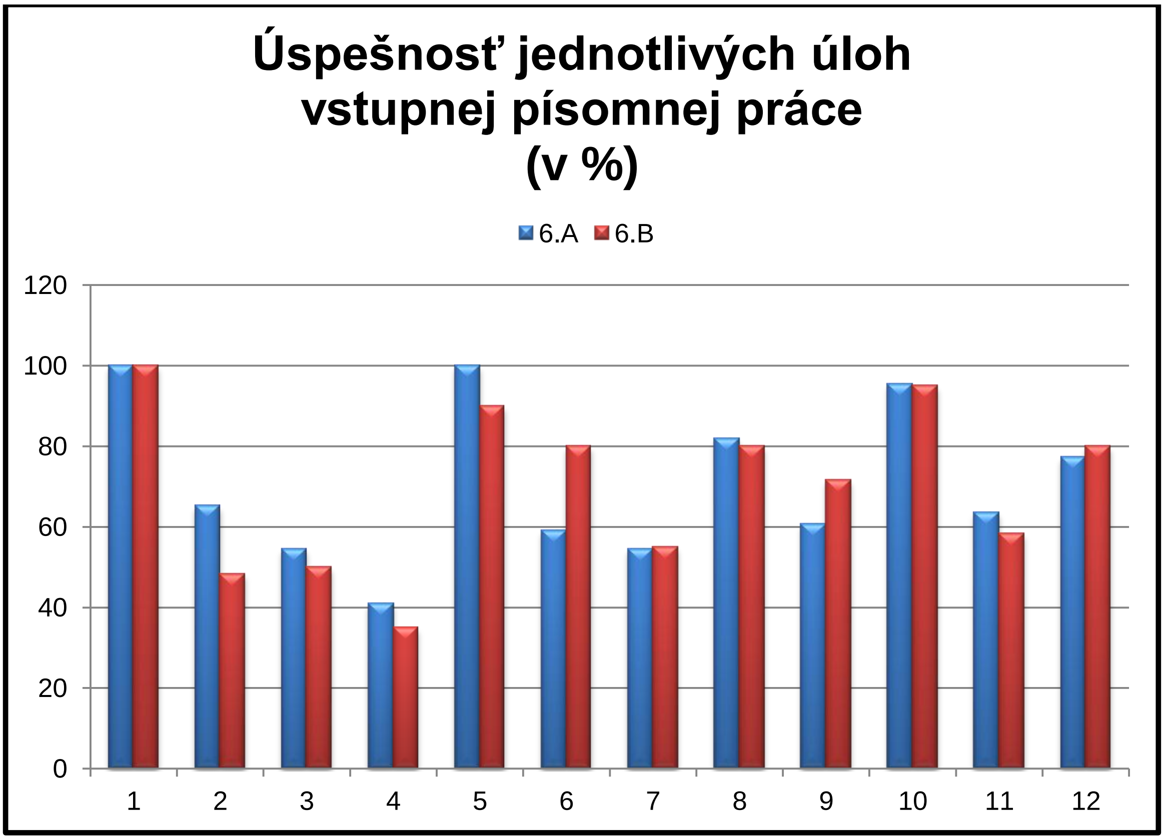
12. Narysuj do prvého obrázka kolmicu k priamke *p* prechádzajúcu bodom *A*, do druhého obrázka narysuj rovnobežku s priamkou *q* prechádzajúcu bodom *B*. (2 body)

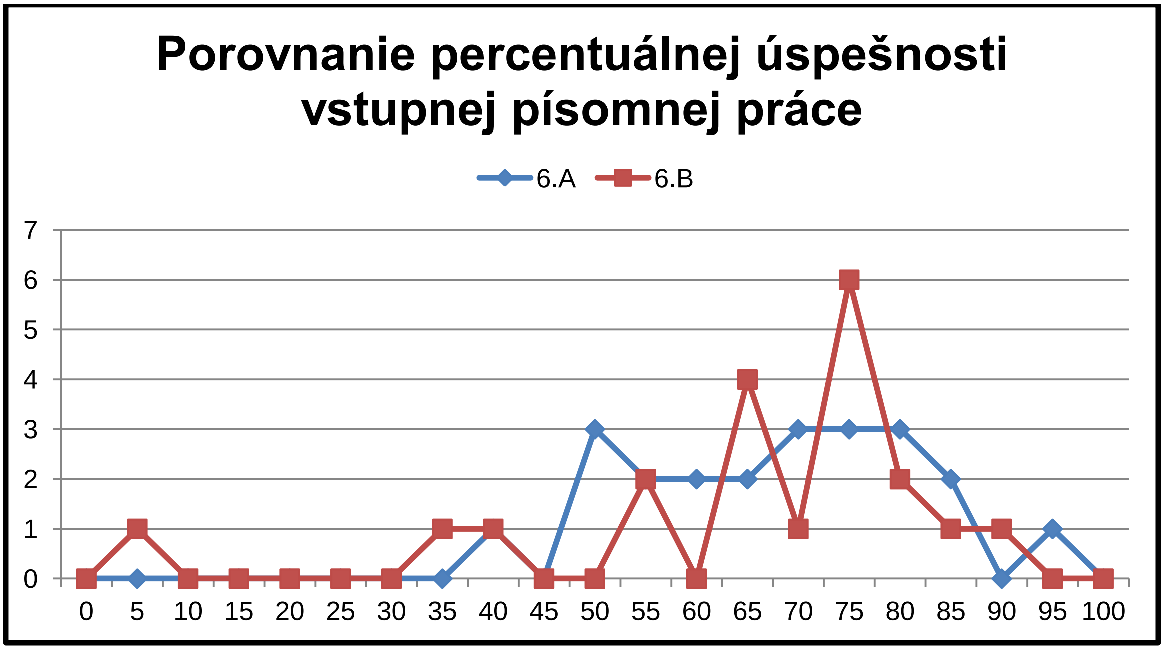




6.A: Úspešnosť úlohy bola 77,27 %. Kolmicu správne narysovalo 77,27 % žiakov, rovnobežku 77,27 % žiakov. Dvaja žiaci narysovali kolmicu mierne nepresne (91°, 92°), jeden výrazne nepresne (138°), jeden žiak úlohu nevyriešil a jeden žiak namiesto kolmice narysoval kružnicu so stredom v bode A. Rovnobežku jeden žiak nenarysoval vôbec, jeden veľmi nepresne a traja mierne nepresne.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 80 %. Kolmicu správne narysovalo 75 % žiakov, rovnobežku 85 % žiakov. 14 žiakov (70 %) malo správne narysované kolmicu aj rovnobežku. Dvaja žiaci kolmicu vôbec nenarysovali a traja žiaci narysovali „kolmú“ priamku veľmi nepresne. Rovnobežku nenarysoval jeden žiak, jeden ju narysoval mierne nepresne a jeden veľmi nepresne.


Úspešnosť jednotlivých úloh vstupnej písomnej práce (v %)
6.A
6.B
120
100
80
60
40
20
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12


Porovnanie percentuálnej úspešnosti vstupnej písomnej práce
6.A
6.B
7
6
5
4
3
2
1
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
95
100

6.A		6.B	
body (22)	**percentá**	**body (22)**	**percentá**
21	95,4545	20	90,9091
19	86,3636	19	86,3636
19	86,3636	18	81,8182
18	81,8182	18	81,8182
18	81,8182	17	77,2727
18	81,8182	17	77,2727
17	77,2727	17	77,2727
16	72,7273	17	77,2727
16	72,7273	17	77,2727
15	68,1818	16	72,7273
15	68,1818	15	68,1818
15	68,1818	14	63,6364
14	63,6364	14	63,6364
14	63,6364	14	63,6364
13	59,0909	14	63,6364
13	59,0909	12	54,5455
12	54,5455	12	54,5455
12	54,5455	9	40,9091
11	50	8	36,3636
11	50	1	4,5455
11	50		
9	40,9091		

	6.A	6.B
výberový aritmetický priemer	67,562	65,6818
výberový rozptyl	209,1607	409,9065
rozsah súborov	22	20
redukovaný počet stupňov voľnosti	39,0303	

Predpokladám, že kontrolná a experimentálna skupina sú nezávislé náhodné výbery z dvoch základných súborov s normálnym rozdelením $N(\mu_1, {\sigma_1}^2)$ a $N(\mu_2, {\sigma_2}^2)$. Pre porovnanie parametrov μ_1 a μ_2 použijem test zhody stredných hodnôt[19], pričom nepoznám rozptyly ${\sigma_1}^2$ a ${\sigma_2}^2$, ale predpokladám, že ${\sigma_1}^2 \neq {\sigma_2}^2$ na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$. Testovacia charakteristika má tvar

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}}}$$

kde: $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ sú výberové aritmetické priemery,

${s_1}^2$, ${s_2}^2$ sú výberové rozptyly,

n_1, n_2 sú rozsahy výberov.

[19] Komenda S., Klementa J.: *Analýza náhodného v pedagogickém experimentu a praxi*. Praha: SPN, 1981.

Testujem hypotézu H_0: $\mu_1 = \mu_2$ proti alternatívne hypotéze H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$. Po dosadení dostávame

$$t = \frac{67{,}5620 - 65{,}6818}{\sqrt{\frac{209{,}1607}{22} + \frac{409{,}9065}{20}}} \doteq 0{,}4738$$

Hypotézu H_0 zamietam, ak testovacia charakteristika je väčšia, než príslušný kvantil Studentovho t-rozdelenia s redukovaným počtom stupňov voľnosti n_0, ktorý sa nájde v tabuľkách

$$|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_0)$$

pričom

$$n_0 = \frac{\left(\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{{s_1}^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{{s_2}^2}{n_2}\right)^2}$$

$$n_0 = \frac{\left(\frac{209{,}1607}{22} + \frac{409{,}9065}{20}\right)^2}{\frac{1}{22 - 1}\left(\frac{209{,}1607}{22}\right)^2 + \frac{1}{20 - 1}\left(\frac{409{,}9065}{20}\right)^2} \doteq 39$$

Kvantil nadobúda hodnotu $t_{0{,}975}(39) = 2{,}023$. Testovacia charakteristika nie je väčšia, než príslušný kvantil, preto hypotézu H_0 nezamietam a prijímam, že $\mu_1 = \mu_2$, čo znamená, že stredné hodnoty oboch výberov sú na danej hladine významnosti rovnaké a teda aj úroveň tried je rovnaká.

5.3.2 Výstupná písomná práca

1. Vymenuj typy trojuholníkov: (2 body)
    a. podľa veľkosti jeho uhlov,
    b. podľa veľkosti jeho strán.

    6.A: Úspešnosť úlohy bola 86,96 %. 16 žiakov (69,57 %) malo trojuholníky správne rozdelené podľa veľkosti strán aj podľa veľkosti uhlov. Žiaci väčšinou uviedli len dva z troch typov trojuholníkov.

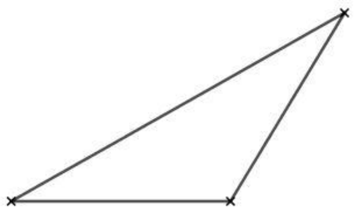
6.B: Úspešnosť úlohy bola 86,25 %. Aj v tejto skupine uviedlo správne obe rozdelenia 16 žiakov (80 %).

2. Načrtni trojuholník *STU* a správne označ jeho strany. (2 body)

6.A: Úspešnosť úlohy bola 84,78 %. Traja žiaci trojuholník vôbec nenačrtli, jeden žiak načrtol trojuholník *SVT*, ale strany správne označil, preto mal 1 bod.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 91,25 %. Trojuholník *STU* načrtli všetci, ale dvaja žiaci neuviedli označenie strán, jeden označil strany veľkými písmenami a jedna žiačka označila strany nesprávne.

3. V rovnoramennom trojuholníku pomenuj: (4 body)
    a. hlavný vrchol – *H*
    b. ramená – *r*
    c. základňu – *z*
    d. uhol pri základni – *ε*



6.A: Úspešnosť úlohy bola 43,48 %. Hlavný vrchol správne pomenovalo 39,13 % žiakov, ramená 52,17 % žiakov, základňu 34,78 % žiakov a uhol pri základni 47,83 % žiakov. Častou chybou bolo vyznačenie hlavného vrcholu trojuholníka hore a na to nadväzujúce ďalšie označenie.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 63,125 %. Hlavný vrchol správne pomenovalo 67,5 % žiakov, ramená 67,5 % žiakov, základňu 65 % žiakov a uhol pri základni 52,5 % žiakov. 6 žiakov malo celú úlohu vyriešenú správne.

4. Môže existovať trojuholník s dĺžkami strán 7 cm, 1 cm a 5 cm? Prečo? (2 body)

6.A: Úspešnosť úlohy bola 91,30 %. Existenciu trojuholníka určili všetci správne, ale odôvodnenie napísalo iba 16 žiakov a 6 žiakov čiastočne.

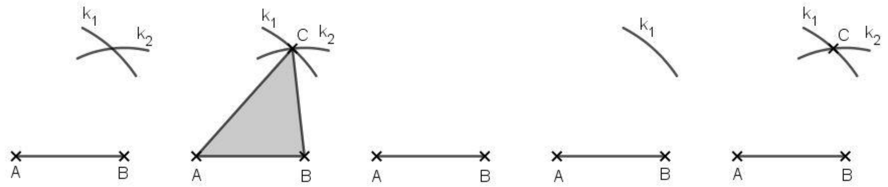
6.B: Úspešnosť úlohy bola 62,5 %. 8 žiakov uviedlo správnu odpoveď aj odôvodnenie, 5 žiakov uviedlo nesprávnu alebo chybnú odpoveď a odôvodnenie, ostatní odpovedali správne, ale uviedli chybné odôvodnenie.

5. Ku každej kombinácii trojuholníkov napíš, či môže existovať. Píš A – áno, N – nie. (3 body)
    a. rovnostranný – pravouhlý,
    b. rovnoramenný – tupouhlý,
    c. obecný – ostrouhlý.

6.A: Úspešnosť úlohy bola 72,46 %. Pri rovnostrannom pravouhlom trojuholníku správne označilo, že neexistuje 18 žiakov (78,26 %), rovnoramenný tupouhlý existuje správne napísalo 13 žiakov (56,52 %) a obecný ostrouhlý existuje správne napísalo 19 žiakov (82,61 %).

6.B: Úspešnosť úlohy bola 80 %. Pri rovnostrannom pravouhlom trojuholníku správne označilo, že neexistuje 17 žiakov (85 %), rovnoramenný tupouhlý existuje správne napísalo 13 žiakov (65 %) a obecný ostrouhlý existuje správne napísalo 18 žiakov (90 %).

6. Pod obrázky dopíš poradie jednotlivých krokov pri konštrukcii trojuholníka. (2 body)



6.A: Úspešnosť úlohy bola 95,65 %. Jedna žiačka pri tejto úlohe neuviedla žiadne riešenie.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 95 %. Iba jedna žiačka namiesto poradia popísala jednotlivé kroky konštrukcie.

7. Môže existovať trojuholník s veľkosťami vnútorných uhlov 27°, 33° a 120°? Prečo? (2 body)

6.A: Úspešnosť úlohy bola 83,70 %. Dvaja žiaci neuviedli žiadne riešenie, ostatní správne uviedli, že trojuholník existuje, ale iba 76,09 % žiakov správne odôvodnilo prečo.

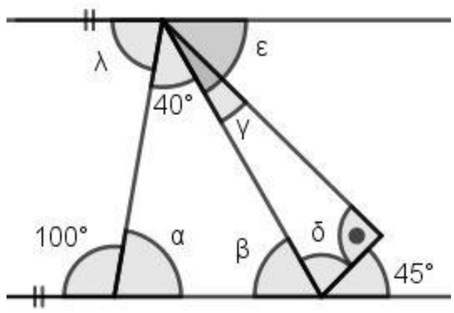
6.B: Úspešnosť úlohy bola 70 %. 11 žiakov uviedlo správne riešenie aj odôvodnenie, traja žiaci neuviedli odpoveď ani odôvodnenie, dvaja žiaci mali chybnú odpoveď a štyria žiaci mali správnu odpoveď, ale nepresné odôvodnenie.

8. Ako sa zmení veľkosť príslušného vonkajšieho uhla trojuholníka, ak sa vnútorný uhol zmenší? (1 bod)

6.A: Úspešnosť úlohy bola 21,74 %. Štyria žiaci odpovedali, že sa veľkosť príslušného vonkajšieho uhla musí zväčšiť, dvaja žiaci napísali, že sa veľkosť iného uhla zväčší.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 50 %. 9 žiakov neuviedlo žiadnu odpoveď, jedna žiačka napísala „Vnější úhel se taky zmenší, protože je stejně veliký jako vnitřní úhel.“, asi si vnútorný a vonkajší uhol zamenila s uhlami vrcholovými.

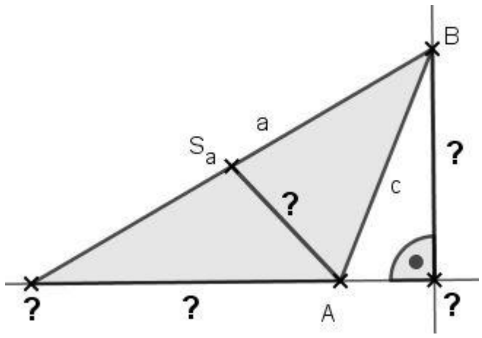
9. Vypočítaj veľkosti uhlov na obrázku. (6 bodov)



6.A: Úspešnosť úlohy bola 32,97 %. Uhol *α* vypočítalo 12 žiakov a jedna žiačka sa pri výpočte trochu pomýlila, úspešnosť bola 54,35 %, uhol *β* správne vypočítalo 11 žiakov (47,83 %), uhol *γ* vypočítali 4 žiaci (17,39 %), uhol *δ* vypočítalo 7 žiakov (30,43 %), uhol *ε* vypočítali 2 žiaci (8,70 %) a uhol *λ* vypočítalo 9 žiakov (39,13 %).

6.B: Úspešnosť úlohy bola 37,5 %. Uhol α vypočítalo 16 žiakov, úspešnosť bola 80 %, uhol β správne vypočítalo 9 žiakov (45 %), uhol γ vypočítali 6 žiaci (30 %), uhol δ vypočítalo 7 žiakov (35 %), uhol ε vypočítali 2 žiaci (10 %) a uhol λ vypočítalo 5 žiakov (25 %).

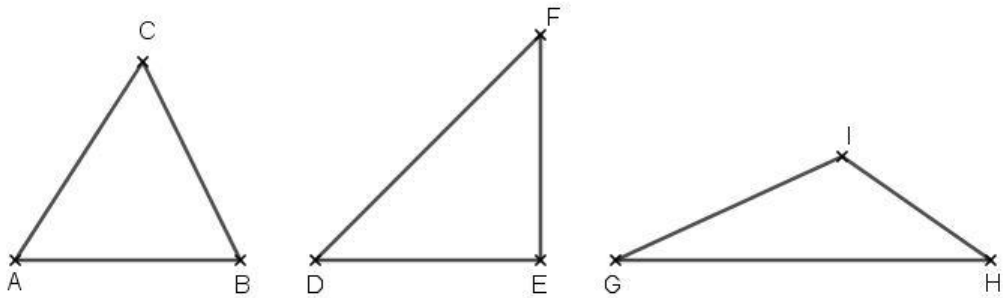
10. Správne označ prvky trojuholníka na obrázku označené „**?**“. (5 bodov)



6.A: Úspešnosť úlohy bola 53,48 %. Vrchol C správne označilo 21 žiakov (91,30 %), pätu P_b označili 3 žiaci (13,04 %), stranu b označilo 16,5 žiakov (71,74 %) z toho dvaja žiaci napísali, že to je „strana“ a jeden žiak ju označil „B“, ťažnicu t_a označilo 7 žiakov (30,43 %) a výšku v_b označilo 14 žiakov (60,87 %).

6.B: Úspešnosť úlohy bola 59 %. Vrchol C správne označilo 19 žiakov (95 %) a jeden žiak ho označil ako „vrchol“, pätu P_b označilo 27,5 % žiakov, stranu b označilo 14 žiakov (70 %), ťažnicu t_a označilo 37,5 % žiakov a výšku v_b označilo 62,5 % žiakov.

11. Dorysuj do trojuholníkov všetky výšky, pomenuj ich a pomenuj aj päty výšok (9 bodov)



6.A: Úspešnosť úlohy bola 44,44 %. Narysovať výšky v ostrouhlom trojuholníku zvládlo 47,10 % žiakov, v pravouhlom trojuholníku 36,23 % žiakov a v tupouhlom trojuholníku 48,31 % žiakov. Problém robilo označenie piat výšok.

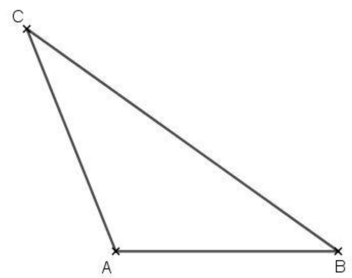
6.B: Úspešnosť úlohy bola 55,28 %. Narysovať výšky v ostrouhlom trojuholníku zvládlo 63,89 % žiakov, v pravouhlom trojuholníku 52,78 % žiakov a v tupouhlom trojuholníku 49,17% žiakov. Problém robilo takisto označenie piat výšok.

12. Ako ďaleko leží ťažisko *T* od vrcholu a od stredu protiľahlej strany, ak dĺžka ťažnice je 9 cm? (2 body)

6.A: Úspešnosť úlohy bola 2,27 %. Vzdialenosť ťažiska *T* od vrcholu neurčil nikto ale dvaja žiaci správne určili vzdialenosť ťažiska *T* od stredu protiľahlej strany. Problém bol, že napísali odpoveď „3 cm" ale nenapísali, že je to vzdialenosť od protiľahlej strany, preto mali za úlohu 0,5 bodu. Ostatní žiaci nenapísali žiadnu odpoveď, alebo napísali 4,5 cm.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 17,5 %. Osem žiakov neuviedlo žiadnu odpoveď, 7 žiakov uviedlo chybné riešenie, 3 žiaci uviedli neúplné riešenie a dve žiačky mali celú úlohu správne.

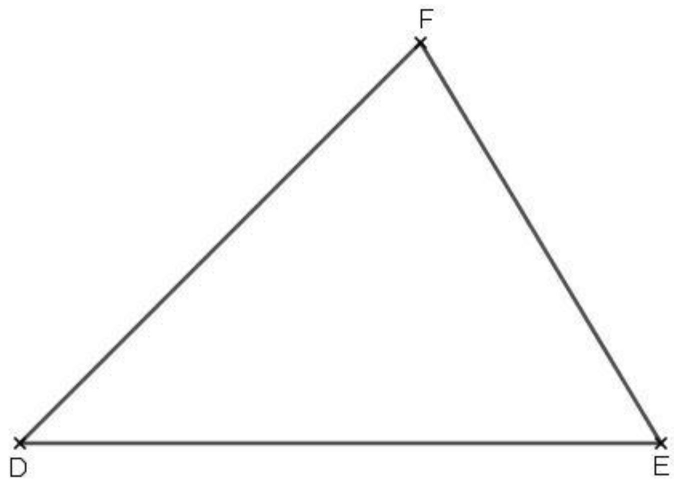
13. Narysuj opísanú kružnicu trojuholníku ABC. (3 body)



6.A: Úspešnosť úlohy bola 36,23 %. Iba 10 žiakov (43,48 %) vedelo, že je potrebné narysovať osi strán, často žiaci zabúdali označiť priesečník osí strán.

6.B: Úspešnosť úlohy bola 35 %. 8 žiakov (40 %) vedelo, že je potrebné narysovať osi strán. 4 žiaci mali celú úlohu vyriešenú správne, trom žiakom chýbalo len označenie priesečníka a/alebo opísanej kružnice.

14. Narysuj vpísanú kružnicu trojuholníku DEF a pomenuj body dotyku. (5 bodov)



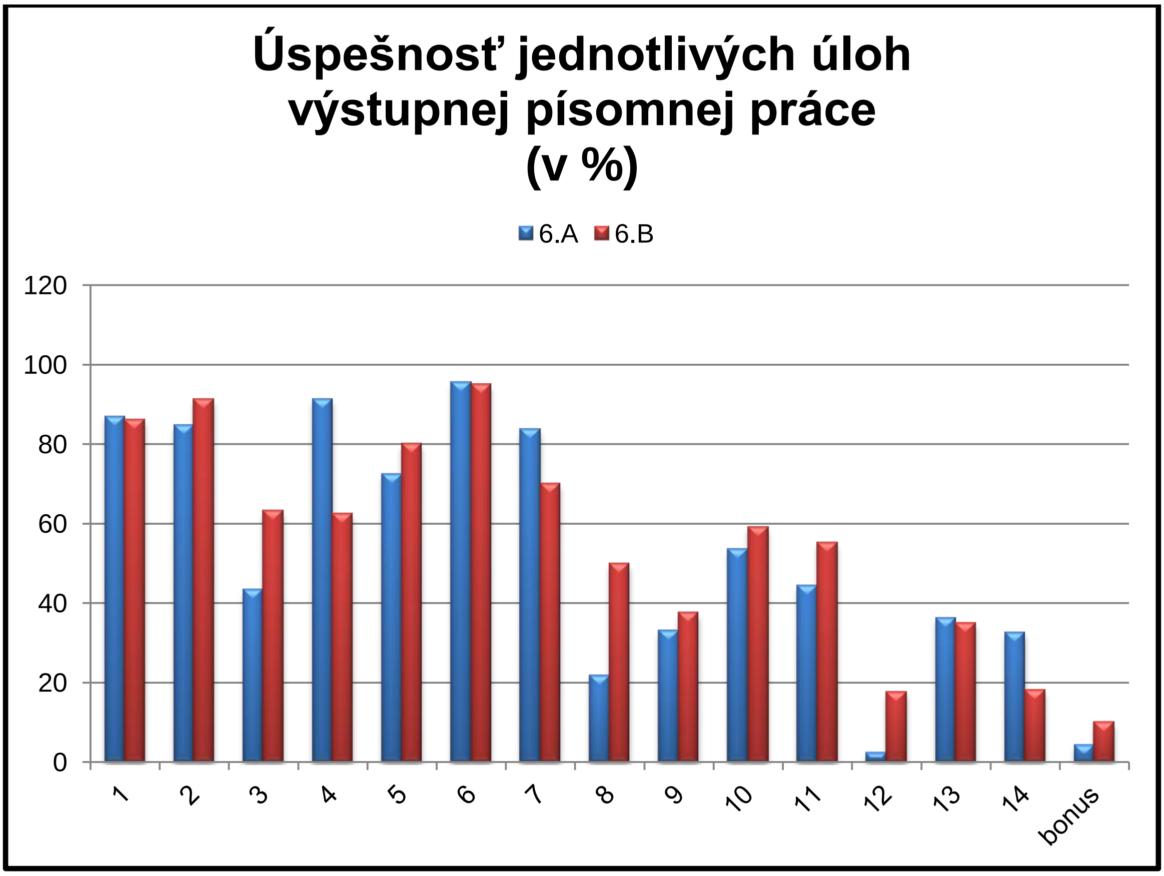
6.A: Úspešnosť úlohy bola 32,46 %. Iba 12 žiakov (52,17 %) vedelo, že je potrebné narysovať osi uhlov, žiaci zabúdali označiť priesečník osí uhlov. Len 32,61 % žiakov pri určovaní polomeru vpísanej kružnice zostrojilo kolmicu z priesečníka osí na stranu trojuholníka a 4,35 % žiakov správne označilo body dotyku kružnice a trojuholníka.

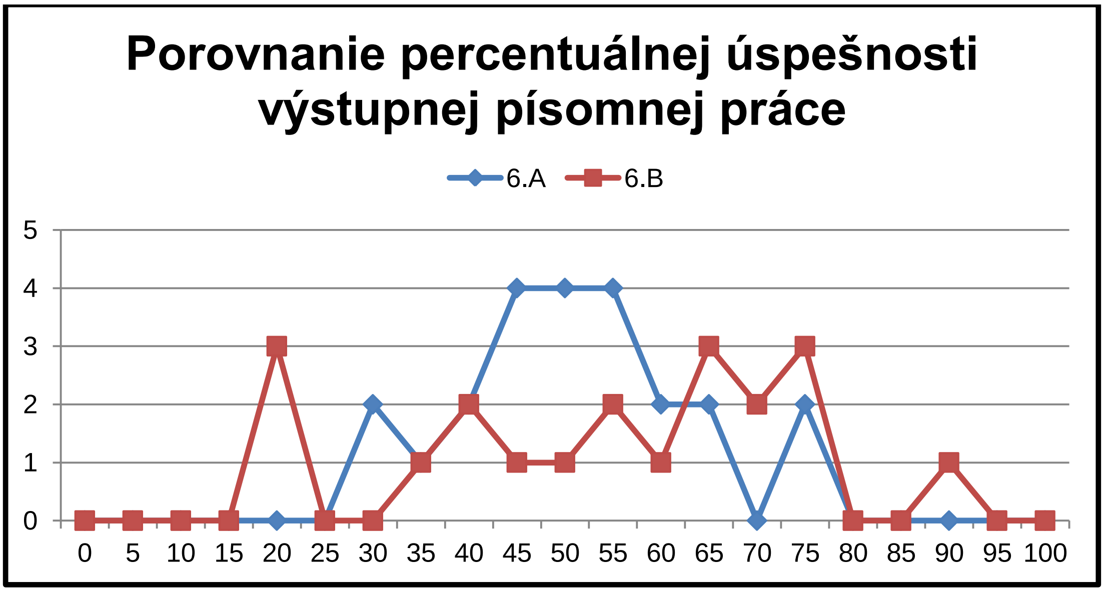
6.B: Úspešnosť úlohy bola 18 %. 10 žiakov (50 %) vedelo, že je potrebné narysovať osi uhlov, žiaci zabúdali označiť priesečník osí uhlov. Len 10 % žiakov pri určovaní polomeru vpísanej kružnice zostrojilo kolmicu z priesečníka osí na stranu trojuholníka a len 7,5 % žiakov správne označilo body dotyku kružnice a trojuholníka.

BONUS: Zdôvodni, prečo nie je viac typov trojuholníkov pri ich rozdelení podľa veľkostí strán. (3 body)

<u>6.A:</u> Úspešnosť úlohy bola 4,35 %. Niektorí žiaci neodpovedali vôbec, niektorí napríklad uviedli, že „protože jiné druhy patří do obecných trojúhelníků“, „protože existuje obecný“ a „protože by nesplňovaly trojúhelnikovou nerovnost“.

<u>6.B:</u> Úspešnosť úlohy bola 10 %. Niektorí žiaci neodpovedali vôbec, niektorí napríklad uviedli, že „protože vždy musí být dva ostré úhly“, „neexistují další, protože není více úhlů“ alebo „protože už by jich bylo hodně a pletly by se“.





6.A		6.B				
body (48)	percentá	body (48)	percentá			
35,17	73,2708	44	91,6667			
34,83	72,5625	36,83	76,7292			
32	66,6667	35,5	73,9583		6.A	6.B
31,5	65,6250	35	72,9167	výberový aritmetický priemer	51,0408	54,1667
29	60,4167	34	70,8333	výberový rozptyl	145,0295	408,7453
28	58,3333	32	66,6667	rozsah súborov	23	20
27,5	57,2917	31,67	65,9792			
27,33	56,9375	31	64,5833			
26,83	55,8958	29	60,4167			
25,5	53,1250	27,67	57,6458	redukovaný počet stupňov voľnosti		39,9368
25	52,0833	26,33	54,8542			
24,17	50,3542	26	54,1667			
23,83	49,6458	24,5	51,0417			
23,17	48,2708	22,67	47,2292			
21,67	45,1458	20,33	42,3542			
21,33	44,4375	18	37,5000			
21	43,7500	17	35,4167			
20,83	43,3958	10	20,8333			
19,83	41,3125	9,5	19,7917			
18,5	38,5417	9	18,7500			
17,5	36,4583					
14,83	30,8958					
14,17	29,5208					

Znova predpokladám, že kontrolná a experimentálna skupina sú nezávislé náhodné výbery z dvoch základných súborov s normálnym rozdelením $N(\mu_1, \sigma_1^2)$

a $N(\mu_2, {\sigma_2}^2)$. Pre porovnanie parametrov μ_1 a μ_2 použijem opäť test zhody stredných hodnôt na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$. Testujem hypotézu H0: $\mu_1 = \mu_2$ proti alternatívnej hypotéze H1: $\mu_1 \neq \mu_2$. Po dosadení nových dát z tabuľky *** dostávam $t = -0{,}8399$, $n_0 \doteq 40$ a $t_{0{,}975}(40) = 2{,}021$. Keďže nerovnosť $|-0{,}8399| > 2{,}021$ nie je platná, tak hypotézu H0 nezamietam a prijímam, že $\mu_1 = \mu_2$ teda, že stredné hodnoty oboch výberov sú na danej hladine významnosti rovnaké a aj úroveň tried je rovnaká.

Aj keď sa štatisticky rozdiel medzi experimentálnou a kontrolnou skupinou nepreukázal, predsa sa experimentálna skupina voči kontrolnej skupine zlepšila približne o 5 percentuálnych bodov.

5.3.3 Dotazník

Bolo rozdaných 19 dotazníkov (príloha F), ktoré žiaci vypĺňali v počítačovej učebni, ale vrátených bolo len 15. Zoznam appletov je uvedený v prílohe G.

1. <u>Som chlapec / dievča.</u>

   Na túto položku odpovedali všetci, dievčat bolo 8 (53,33 %) a chlapcov 7 (46,67 %).

2. <u>Ktoré applety sa Ti najviac páčili a prečo?</u>

   Jedna žiačka uviedla applety č. 1 a 2, ale dôvod neuviedla, ďalší žiak uviedol „všechny se mi líbily“. Applety č. 34, 35 a 36 neboli uvedené, applety č. 5, 8, 9, 10, 13, 14, 21, 25, 26, 28, 29, 30 a 32 boli uvedené jedenkrát, applety č. 7, 11, 12, 15, 17, 24, 27, 31 a 33 boli uvedené dvakrát, applety č. 1, 2, 3, 4, 16, 18, 19, 20 a 23 boli uvedené trikrát a applety č. 6 a 22 boli uvedené štyrikrát. Ako dôvody žiaci uviedli napríklad „jsou zajímavé“, „že si tu kružnici musíš nakreslit“, „byly jednoduché a snadno porozumitelné“, „protože jsem si tam vyzkoušela různé věci“, „byly přehledné a učivo v nich bylo dobře vysvětleno“, „protože si s nimi můžete hýbat jak potřebujete, a tím to lépe pochopíte“ a podobne.

3. <u>Ktoré applety sa Ti najmenej páčili a prečo?</u>

5 žiakov (33,33 %) uviedlo, že sa im všetky applety páčili, jedna žiačka napísala „nevím“, dvaja žiaci napísali applety č. 5 a 1, 8, 10, 14, ale dôvod neuviedli. Ďalší žiaci napísali: „3 – bylo to takové nezajímavé“, „1 – bylo to moc lehké“, „24, 25, 26 – musel jsem rýsovat“, „8 – protože by tam mohly ukázat, že když nejde sestrojit, tak že se strany nedotknou“, „8 – některé věci jsou tam nesrozumitelné“, „3, 4 – v některých chybí řešení“ a „18 – je obtížná“.

4. <u>Ktoré applety by si zmenil(a)? Ako?</u>

   14 žiakov (93,33 %) uviedlo, že žiadny, jedna žiačka uviedla applet č. 8 s tým, že „pokud trojúhelník nejde sestrojit, je tam špatně zobrazena nerovnost“.

5. <u>Ktoré applety by si doplnil(a)? Čo im, podľa Tvojho názoru, chýbalo?</u>

   Pri tejto položke 12 žiakov (80 %) uviedlo možnosť žiadny. Inak v appletoch chýbalo: „21 – pohybování těžištěm by měnilo trojúhelník“, „11 – ukazuje se mi tam, že trojúhelník je obecný ale on byl rovnoramenný“ a „3, 4 – řešení“.

6. <u>Ktorým appletom si nerozumel(a)?</u>

   Na túto položku 10 žiakov (66,67 %) odpovedalo, že všetkému rozumeli. Ostatní žiaci napísali, že nerozumeli appletom č. 4; 18, 19, 21, 23; 18; 10, 14, 21; a jeden žiak uviedol applety č. 1 až 30.

7. <u>Ktoré applety Ti najviac pomohli pri pochopení nového učiva? Napíš ako.</u>

   Dvaja žiaci na túto položku neuviedli odpoveď, jedna žiačka uviedla 125 (nie je možné rozlíšiť, či ide o applety č. 1, 2 a 5, alebo 1 a 25 alebo 12 a 5), ako dôvod uviedla „lépe jsem porozuměla učivu“. Dvaja žiaci uviedli len čísla appletov 17, 22 a 14, 5, 7, 18, ale dôvod neuviedli. Ďalšie odpovede boli: „13 – naučila jsem se lépe řeckou abecedu“, „všechny – pomoci nich jsem to pochopil“, „19, 20 – dříve jsem moc nechápala rozdíl, ale když jsem si vše pečlivě přečetla, tak jsem to pochopila, protože je to podle mě dobře vysvětlené“, „7 – velice dobře znázorněný postup“, „6 –

nezapamatovala jsem si úhly a teď si je pamatuju, 19 – je to rada, jak udělat výšky, 20 – je to rada, jak udělat těžnice“, „12, 13, 14, 15 – pomohly mi tak, že jsem se vše naučil a uměl jsem vše na test“, „20, 23, 33, 6 – mohla jsem si vyzkoušet různé možnosti (pohybovat vrcholy, měnit velikosti, ...)“, „2, 6 – pochopila jsem vnitřní a vnější úhly, velikosti úhlů)“, „29, 32 – zjistila jsem, jak se to rýsuje“ a „7 – jak sestrojit trojúhelník“.

8. Dokážeš si teraz príslušné geometrické pojmy lepšie predstaviť?

   Na túto položku 12 žiakov (80 %) zakrúžkovalo odpoveď áno, 3 žiaci zakrúžkovali odpoveď nie.

9. Dokážeš teraz s príslušnými geometrickými pojmami lepšie pracovať vo svojich predstavách?

   Pri tejto položke 12 žiakov (80 %) zakrúžkovalo odpoveď áno, 3 žiaci zakrúžkovali odpoveď nie.

ZÁVERY

Masívny nástup technických inovácií, nové technologické trendy a vývoj v oblasti prírodných vied nie sú mysliteľné bez odpovedajúcej podpory rôznymi oblasťami matematiky. Úspešný a konkurencieschopný rozvoj spoločnosti je preto spojený s uskutočneným potrebných zmien v oblasti matematického vzdelávania. Rada vlády Slovenskej republiky pre vedu, techniku a inovácie vo svojom uznesení z marca tohto roku odporučila Ministerstvu školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky zapracovať do Štátneho vzdelávacieho programu povinnú maturitu z matematiky s cieľom zvýšenia kvality prípravy mladej generácie. K navrhnutej koncepcii ukončenia štúdia matematiky vedie dlhá a náročná cesta niekoľkými školskými stupňami.

Cieľom predloženej dizertačnej práce, zameranej na výučbu učiva geometrie trojuholníkov na slovenských a českých základných školách, bola analýza a komparácia rozsahu a obsahu tohto učiva v oboch štátoch, vytvorenie príslušného výučbového programu – elektronického kurzu v prostredí Moodle – a jeho overenie metódami pedagogického výskumu.

Pri porovnávaní obsahu vyučovania bolo zistené, že zatiaľ čo na Slovensku je učivo geometrie rozložené v relatívne uzavretých tematických celkoch, v Českej republike sa vracia k učivu predošlých tematických celkov. Okrem toho boli zistené aj niektoré terminologické odlišnosti (napr. pre rôznostranný trojuholník sa v českej terminológii používa pojem obecný trojuholník). Na konci deviatych ročníkov sú obsahové a výkonové štandardy v oboch štátoch približne rovnaké, malé rozdiely je možné nájsť v rozsahu učiva.

Vytvorený elektronický kurz s appletmi v prostredí Moodle zahŕňa učivo geometrie trojuholníkov – základné prvky, stredné priečky, výšky, ťažnice, opísanú a vpísanú kružnicu. Pri realizácii pedagogického výskumu ho využívali žiaci experimentálnej skupiny, zatiaľ čo v kontrolnej skupine prebiehalo vyučovanie klasickým spôsobom. Výsledky výskumu, štatisticky vyhodnotené testom zhody stredných hodnôt dvoch nezávislých výberov a porovnaním relatívnych početností, boli využité k overeniu platnosti hypotéz.

Hypotéza H_1, podľa ktorej aspoň tri štvrtiny žiakov vnímajú vyučovanie geometrie trojuholníka pomocou vytvoreného elektronického kurzu s appletmi priaznivo, bola potvrdená.

Hypotéza H_2, podľa ktorej žiaci vyučovaní pomocou vytvoreného elektronického kurzu zameraného na geometriu trojuholníka dosahujú lepšie výsledky v teste vedomostí a zručností, ako žiaci vyučovaní klasicky, nebola na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ prijatá, aj keď sa priemer experimentálnej skupiny voči skupine kontrolnej zlepšil.

Ako vyplynulo z pedagogického pozorovania, pedagogického experimentu, vyhodnotenia dotazníkov a rozhovorov s pedagógmi zúčastnenými na výučbe, nie všetkým žiakom táto forma vyučovania vyhovovala. Podľa všetkého by túto formu viac ocenili starší žiaci, napríklad v ôsmom alebo v deviatom ročníku, prípadne študenti na stredných školách. Za zaujímavé je možné považovať, že žiaci sa zaujímali o možnosť práce s kurzom cez tablety, ale hlavne cez mobilné telefóny.

Je potrebné si uvedomiť, že rovnako ako matematika, tak aj jej didaktika sa neustále vyvíjajú a s tým by mal v budúcnosti korešpondovať taktiež aj prístup k problematike učiva geometrie trojuholníkov. V tejto súvislosti je vhodné spomenúť aj rýchly vývoj informačných a komunikačných technológií, ktorý v ďalších rokoch umožní vytvorenie výrazne rozsiahlejších výučbových programov, zrejme v úzkej spolupráci s matematikmi, didaktikmi a IT inžiniermi. To už ale nie je námet na jednotlivú dizertačnú prácu, ale skôr téma vedecko-výskumného projektu pre väčší riešiteľský kolektív.

Zoznam použitých prameňov

1. A10...
2. A10...
3. POLÁK, J.: *Didaktika matematiky. Obecná didaktika matematiky.* Fraus ***
4. NOVÁK, D.: Digitální rozhlas a digitální televize prizmatem vzdělávací funkce školy. *Technológia vzdelávania (příloha Slovenský učiteľ)*, roč. XIV, 2006, č. 5, s. 5-7.
5. A13...
6. PRENSKY, M.: Digital natives, digital immigrants. *On the Horizon*, roč. 2001, č. 9, s. 1-6.
7. SPITZER, M.: *Digitální demence.* Brno: Host, 2014, s. 279.
8. A15...
9. A15...
10. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání 2017
11. A15...
12. Čo je e-learning. Dostupné na internete: <http://www.elearning.sk/co-je-elearning.html> [cit. 2017-09-19].
13. Smernica č. 3/2016 o využívaní e-learningu na Univerzite Mateja Bela v Banskej Bystrici. Dostupné na internete: <https://lms.umb.sk> [cit. 2019-08-19]
14. Moodle. Dostupné na internete: <https://en.wikipedia.org/wiki/Moodle> [cit. 2017-10-07].
15. Moodle. Dostupné na internete: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Moodle> [cit. 2017-10-07].
16. Molnár P.: Prečo učitelia (ne)využívajú dynamické geometrické systémy vo vyučovaní matematiky. In: *Jarná škola doktorandov UPJŠ.* 2015.
17. ZOUNEK, J. a kol.: *E-learning : Učení (se) s digitálními technogiemi.* Praha: Wolters Kluwer ČR, a. s., 2016, s. 230-247.
18. ŽILKOVÁ, K.: Dynamické geometrické systémy (DGS) – softvérová podpora vzdelávania. In: *Journal of Technology and Information Education*. 2011.
19. Ocenenia softvéru GeoGebra. Dostupné na internete: <https://www.geogebra.org/about> [cit. 2019/08/16].

20. Komenda S., Klementa J.: *Analýza náhodného v pedagogickém experimentu a praxi*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze, 1981.

Zoznam príloh

A. Dotazník použitý v predvýskume
B. Písomná práca skupiny A v predvýskume
C. Písomná práca skupiny B v predvýskume
D. Vstupná písomná práca v hlavnom výskume
E. Výstupná písomná práca v hlavnom výskume
F. Dotazník použitý v hlavnom výskume
G. Zoznam appletov v e-kurze