**Teória množín**

Už sme si predstavili jeden číselný obor – a to prirodzené čísla. Ostatné číselné obory si predstavíme zakrátko, no teraz sa zastavíme a bližšie pozrieme na koncepty a označenia v teórii množín, keďže sa v nasledujúcich kapitolách budú vyskytovať čoraz častejšie.

Hoci hlavným predmetom tohto textu nie je teória množín, takmer každý ďalší obor matematiky na teórii množín závisí časťou svojich základov, preto je dôležité mať aspoň základné poznatky teórie množín pred štúdiom pokročilých častí matematiky. V tejto kapitole ukážeme elementárne aspekty axiomatickej teórie množín.

3.1. Základy

V tejto časti definujeme niektoré axiómy pre množiny. Z pedagogických dôvodov použijeme viac než úplnú sadu axióm pre teóriu množín, v takom zmysle, že niektoré axiómy môžu byť použité na odvodenie ďalších, čo však nespôsobí v ďalších úvahách nijaké problémy. Začneme s neformálnym opisom, čo sú to množiny.

**Definícia 3.1.1.** (Neformálna) Akúkoľvek neusporiadanú skupinu objektov nazveme ***množinou.*** Množiny budeme najčastejšie označovať veľkými písmenami:.

* Napríklad je množina. Ak *x* je nejaký prvok, objekt, hovoríme, že  *je prvkom A* alebo  práve vtedy, ak x patrí do danej skupiny *A*. Inak hovoríme, že .
* Napríklad , ale .

Táto definícia je dosť intuitívna, ale neodpovedá na mnoho otázok, napríklad, ktoré skupiny objektov považujeme za množiny, ktoré množiny sa rovnajú iným množinám a ako definujeme operácie na množinách (t. j. zjednotenia, prieniky, atď.). Taktiež zatiaľ nemáme axiómy, čo platí pre množiny, prípadne čo platí pre ich prvky. Odvodenie týchto axióm a definovanie operácií na množinách bude predmetom zvyšku tejto časti.

Najprv vyjasníme jednu vec: množinu samotnú pokladáme za typ objektu.

**Axióma 3.1** (***Množiny sú objekty***). *Ak  je množina, potom  je taktiež objektom. Obzvlášť platí, že ak sú dané dve množiny  a , má zmysel pýtať sa, či je množina prvkom množiny .*

**Príklad 3.1.2** (Neformálny) Množina je množinou pozostávajúcou z troch rôznych prvkov, pričom jeden z nich je sám o sebe množinou dvoch prvkov. Pozrite sa na Príklad 3.1.10 pre formálnejšiu verziu tohto príkladu. Avšak nie všetky objekty sú množiny; napríklad prirodzené číslo obvykle nepokladáme za množinu. (Presnejším tvrdením je, že prirodzené čísla sú *kardinalitami* množín, skôr než množinami. Pozrite sa na časť 3.6.)

**Poznámka 3.1.3** Existuje špeciálna časť teórie množín nazývajúce sa „čistá teória množín“, v ktorej *všetky* objekty sú množinami; napríklad číslo 0 sa spája s prázdnou množinou , číslo 1 sa spája s , číslo 2 sa spája s , a tak ďalej. Z logického hľadiska je čistá teória množín jednoduchšia, keďže sa zaoberá len s množinami a nie s objektami; avšak z hľadiska konceptu je často jednoduchšie zaoberať sa „nečistou“ teóriou množín, v ktorej nie sú niektoré objekty pokladané za množiny. Tieto dva typy teórií sú viac – menej ekvivalentné, takže môžeme zastávať názor, že nie je možné objektívne zistiť, či všetky objekty sú množinami alebo nie.

Aby sme to zhrnuli: spomedzi všetkých objektov, ktoré študuje matematika, niektoré objekty sú množinami; a ak je objektom a  je množinou, potom platí práve jedno z tvrdení alebo. (Ak *A* nie je množina, potom tvrdenie nie je definované; príkladom môže byť tvrdenie  , ktoré nepokladáme za správne ani nesprávne, ale jednoducho nezmyselné – keďže 4 nie je množina).

V ďalšom zadefinujeme pojem rovnosti: kedy sa dve množiny rovnajú? Poradie prvkov vo vnútri množiny nepovažujeme za dôležité, preto množiny a pokladáme za rovnajúce sa. Na druhej strane, množiny a sa nerovnajú, keďže druhá množina obsahuje prvok, ktorý prvej množine nepatrí, a to konkrétne prvok 1. Množiny a sa nerovnajú z podobných príčin. Tento poznatok formalizujeme ako definíciu:

**Definícia 3.1.4** (***Rovnosť množín***). Dve množiny  a  sa rovnajú, , vtedy a len vtedy, keď každý prvok množiny  je prvkom množiny a opačne. Inými slovami, vtedy a len vtedy, keď každý prvok *x* množiny  patrí taktiež množine a každá prvok *y* množiny patrí taktiež množine .

**Príklad 3.1.5** Z predošlého vyplýva, že napríklad množiny and sa rovnajú, keďže obsahujú presne tie isté prvky. (Množina je taktiež rovná množine ; opakovanie prvkov 2 a 3 nie je podstatné a nemení nič na tom, že prvky a  sú prvkami daných množín.)

Je možné ľahko overiť, že rovnosť množín je reflexívna, symetrická a tranzitívna (Cvičenie 3.1.1). Všimnime si, že ak a , potom *x* *B*  vďaka definícii 3.1.4. Teda relácia „patriť množine“spĺňa axiómu substitúcie (pozri časť A.7). Vďaka tomuto platí, že akákoľvek nová operácia, ktorú definujeme na množinách, bude taktiež vyhovovať axióme substitúcie, ak bude definovaná výlučne pomocou relácie *.* Toto je aj prípad ostatných definícií v tejto časti. (Na druhej strane, nemôžeme používať pojem „prvého“ alebo „posledného“ prvku v množine korektne definovaným spôsobom, pretože by to nespĺňalo axiómu substitúcie; napríklad množina a sa rovnajú, ale majú odlišný prvý prvok.

Teraz sa budeme venovať otázke, ktoré objekty sú množiny a ktoré nie. Situácia je analogická tomu, ako sme definovali prirodzené čísla. Začali sme s jediným prirodzeným číslom . Ďalšie čísla sme vytvorili z  použitím operácie *následník* (zväčšenie o 1). Aj v tomto prípade vyskúšame niečo podobné, začneme jedinou množinou – prázdnou množinou a pomocou rozličných operácií vytvoríme ďalšie množiny. Začneme postulovaním existencie prázdnej množiny.

**Axióma 3.2 (*Prázdna množina*).** *Existuje množina , nazývaná prázdna množina, ktorá neobsahuje žiadne prvky, teda pre každý prvok x platí*

Prázdnu množinu označujeme aj . Uvedomte si, že existuje len jedna prázdna množina. Keby existovali dve množiny a , ktoré sú obidve prázdne, tak podľa Definície 3.1.4 by boli navzájom rovnaké (prečo?).

Keď množina nie je rovná prázdnej množine, tak ju nazývame *neprázdna množina*. Nasledujúca veta je veľmi jednoduchá:

**Lema 3.1.6** (jednoduchý výber)

*Nech  je neprázdna množina. Potom existuje prvok taký, že .*

*Dôkaz.* Dokážeme sporom. Predpokladajme, že neexistuje žiaden prvok taký, že . Potom pre všetky prvky platí . Taktiež podľa Axiómy 3.2 platí . Preto (obe tvrdenia sú nepravdivé), a preto podľa definície 3.1.4 , čo je spor.

**Poznámka 3.1.7.** Predchádzajúca Lema tvrdí, že pre každú neprázdnu množinu , môžeme „vybrať“ prvok z tejto množiny , ktorý predstavuje túto „neprázdnosť“. Neskôr (Lema 3.5.12) ukážeme, že pre akýkoľvek konečný počet neprázdnych množín *,* je možné vybrať jeden prvok z každej tejto množiny ; hovoríme tomu „konečný výber“. Avšak, ak vyberáme prvky z nekonečného počtu množín, potrebujeme doplňujúcu axiómu, *axiómu výberu*, ktorú budeme rozoberať v Sekcii 8.4.

**Poznámka 3.1.8.** Uvedomte si, že prázdna množina *nie je* to isté ako prirodzené číslo . Jedno je množina, druhé je číslo. Avšak, je pravda, že *kardinalita* prázdnej množiny je .

Keby Axióma 3.2 bola jediná axióma, ktorú pozná teória množín, tak by teória množín bola trochu nudná, keďže by existovala len jedna množina a to prázdna množina. Teraz si ukážeme ďalšie axiómy, aby sme obohatili triedu dostupných množín.

**Axióma 3.3** (***Jednoprvková a dvojprvková množina***)

* *Ak  je prvok, tak existuje množina , ktorá obsahuje* ***jediný*** *prvok. Teda pre ľubovoľný prvok platí:* ***, vtedy a len vtedy, keď*** *. Množinu nazývame* jednoprvková množina*, ktorú tvorí prvok .*
* *Ďalej, ak*a*sú prvky, tak existuje množina , ktorej jediné prvky sú prvky* a*. Teda pre ľubovoľný prvok platí:* ***, vtedy a len vtedy, keď  alebo .*** *Množinu nazývame* dvojprvková množina*, ktorú tvoria prvky*a*.*

**Poznámka 3.1.9.**

* *Tak ako existuje len jedna prázdna množina, takisto, vďaka Definícií 3.1.4, pre každý prvok a existuje len jedna jednoprvková množina (prečo?).*
* *Podobne, pre každé dva prvky a  existuje len jedna dvojprvková množina obsahujúca prvky a .*
* *Z Definície 3.1*.4 vyplýva, že (prečo?)a(prečo?).

Axióma o jednoprvkových množinách nie je teda nevyhnutná, keďže je dôsledkom axiómy o dvojprvkových množinách. Naopak, axióma o dvojprvkových množinách vyplýva, z axiómy o jednoprvkových množinách a z axiómy o zjednotení dvojprvkových množín uvedenej nižšie (viď Lema 3.1.13). Niekto by sa mohol čudovať, prečo ďalej nevytvoríme axiómy o trojprvkových množinách, štvorprvkových množinách, atď.; Nie je to však potrebné, ak sformulujeme nižšie uvedenú axiómu o zjednotení dvojprvkových množín.

**Príklad 3.1.10.**

* *Keďže je množina (zároveň ju môžeme považovať za prvok), tak existuje jednoprvková množina .*
* *Teda množina obsahuje jediný prvok . Je to množina, ktorá nie je prázdna. Platí (prečo?).*
* *Podobne, jednoprvková množina a dvojprvková množina sú takisto množiny. Tieto tri množiny nie sú rovnaké (Príklad 3.1.2).*

Podľa predchádzajúceho príkladu vieme vytvoriť celý rad množín; avšak množiny, ktoré vytvárame sú stále celkom malé (každá množina, ktorú môžeme vytvoriť obsahuje nie viac ako 2 prvky). Nasledujúca axióma nám umožňuje vyrobiť trochu väčšie množiny ako doteraz.

**Axióma 3.4***(****Zjednotenie dvojprvkových množín****).*

*Nech sú množiny, exituje množina , nazývaná* zjednotenie *množín  a . Prvky tejto množiny patria do množiny  alebo alebo do oboch. Inými slovami, pre každý prvok platí:* .

Pripomeňme si, že ak netvrdíme inak „alebo“ vo výroku: „ alebo je pravdivé“ znamená, že „buď je pravdivé alebo je pravdivé, alebo obidve sú pravdivé“. Viď Sekciu A.1.

**Príklad 3.1.11.** Množina pozostáva z tých prvkov, ktoré sa nachádzajú v jednej aj v druhej z množín , , aj v oboch týchto množinách, alebo inak povedané prvky tejto množiny sú a . Preto, označujeme túto množinu ako .

**Poznámka 3.1.12.** Ak sú množiny a  je rovná , tak je rovné (prečo? Potrebujeme použiť Axiómu 3.4 a Definíciu 3.1.4). Podobne ak je množina, ktorá je rovná množine , tak je rovné . Operácia zjednotenia vyhovuje axióme substitúcie a tak je korektne definovaná.

**Lema 3.1.13**  Ak  a  sú prvky, potom . Ak sú množiny, potomoperácia zjednotenia je

* *komutatívna a*
* *asociatívna*
* *platí .*

*Dôkaz:* Ukážeme len asociatívnosť, a zvyšné ponecháme na cvičenie 3.1.3 Podľa definície 3.1.4, potrebujeme ukázať, že každý prvok z je prvok z a naopak. Predpokladáme 1. že je prvok z . Podľa Axiómy 3.4, to znamená, že patrí alebo patrí . Rozdelíme to do dvoch prípadov.

1. *Ak , potom podľa Axiómy 3.4 opäť a tak podľa Axiómy 3.4. opäť .*
2. *Teraz predpokladajme, že , potom podľa Axiómy 3.4 opäť alebo . Ak  potom podľa Axiómy 3.4, zatiaľ čo potom podľa nasledujúcich aplikácií Axiómy 3.4. máme a preto .*
3. *Teda vo všetkých prípadoch vidíme, že každý prvok z leží v a tiež ako sme chceli.*

V dôsledku lemy nepotrebujeme používať okrúhle zátvorky pri zjednotení,teda pre môžeme písať namiesto alebo . Rovnako pre zjednotenie 4 množín , atď.

**Poznámka 3.1.14**. Kým operácia zjednotenia má nejaké podobnosti so sčítaním, tieto dve operácie nie sú identické. Napríklad, a , zatiaľ čo je nezmysel (sčítanie sa vzťahuje na čísla, nie množiny) a je tiež nezmysel (zjednotenie sa vzťahuje na množiny, nie na čísla).

Axióma o zjednotení nám umožňuje definovať trojicu množín, štvoricu množín a tak ďalej:ak sú tri prvky, definujeme ; ak sú štyri prvky, potom definujeme , a tak ďalej. Na druhej strane, ešte nie sme v pozícii, aby sme definovali množinu obsahujúcu  prvkov pre nejaké dané prirodzené číslo , toto by malo vyžadovalo opakovanie krát, ale koncept - násobného opakovania nebol ešte dôsledne definovaný. Pre podobné dôvody nemôžme ešte definovať množiny pozostávajúce z nekonečne veľa prvkov, pretože by si to vyžadovalo opakovanie axiómy párového zjednotenia nekonečne veľa krát*.* Nakoniec budeme zavádzať axiómy z teórie množín, ktoré umožňujú svojvoľne konštruovať väčšie a dokonca nekonečné množiny.

Niektoré množiny sa zdajú byť väčšie ako iné. Jeden spôsob ako štylizovať tieto koncepcie je cez predstavu podmnožín.

**Definícia 3.1.15** *(****Podmnožiny****)* Nech sú množiny.

* *Hovoríme, že  je podmnožina množiny , označenie , vtedy a len vtedy ak každý prvok z množiny  je tiež prvok množiny : .*
* *Hovoríme, že množina  je vlastná podmnožina množiny a zároveň platí . Budeme to* označovať .

**Poznámka 3.1.16.** Pretože tieto definície zahŕňajú iba označenia rovnosti a relácia „*byť prvkom*“, ktorá sa tiež pridŕža axiómy o substitúcií, označenie podmnožiny sa tiež automaticky pridŕža axiómy o substitúcií. Teda napríklad ak , potom .

**Príklad 3.1.17.**  Zrejme platí , pretože každý prvok z je tiež prvok z a zároveň . Preto ide o vlastnú podmnožinu. Pre akúkoľvek množinu , vždy platí a (prečo?).

Pojem podmnožina v teórií množín je podobný ako menej alebo rovné pre čísla, ako ukazuje nasledujúce tvrdenie (pre presnejšie vyjadrenie pozri definíciu 8.5.1).

**Tvrdenie 3.1.8** ( množiny sú čiastočne usporiadané podľa zahrnutia súboru). Nech sú množiny. Ak a  potom . Ak a , potom . Nakoniec ak a  potom .

*Dôkaz:*  Musíme ukázať prvú požiadavku.

Predpokladajme, že a . Dokážme, že , teda máme dokázať, že každý prvok z  je prvkom z . Tak, vyberieme ľubovoľný prvok z . Potom ak , musí byť z . Ale ak , je prvok z . Teda každý prvok z  je naozaj prvok z .

**Poznámka 3.1.19**  Vzťah medzi podmnožinou a zjednotením: vidíme napríklad Cvičenie 3.1.7

**Poznámka 3.1.20**. Existuje dôležitý rozdiel medzi podmnožinovou reláciou a niečím menším ako je relácia <. Dané sú dve rôzne prirodzené čísla *n, m*, a vieme, že jedno je väčšie ako druhé (Tvrdenie 2.2.13); avšak sú dané dve rôzne množiny, nie je všeobecne pravda že jedna z nich je podmnožina druhej.

Napríklad, nech je množina párnych prirodzených čísel, nech je množina nepárnych prirodzených čísel. Potom ani jedna množina nie je podmnožinou druhej. To je to čomu my hovoríme, že množiny sú len čiastočne usporiadané, zatiaľ čo prirodzené čísla sú úplne usporiadané (pozri definíciu 8.5.1, 8.5.3)

**Poznámka 3.1.21**. Mali by sme tiež upozorniť na to, že podmnožinová relácia nie je to isté ako relácia prvku . Číslo 2 je prvok množiny ale nie je podmnožina; teda , ale . Naozaj, nie je ani množina. Naopak, zatiaľ čo je podmnožina množiny , nie je to prvok; takže , ale . Zmysel je že číslo a množina sú rôzne objekty.

Je dôležité rozoznávať množiny od ich prvkov, lebo oni môžu mať rôzne vlastnosti. Napríklad, je možné mať nekonečnú množinu pozostávajúcu z konečných čísel (množina prirodzených čísel je jedna z nich), a je tiež možné mať konečnú množinu pozostávajúcu z nekonečných objektov (uvažujme ako príklad konečnú množinu ktorá má štyri prvky, všetky sú nekonečné).

Teraz si zavedieme axiómu, ktorá nám jednoducho dovoľuje vytvárať podmnožiny z väčších množín.

**Axióma 3.5** (Axióma o špecifikácii)

Nech pre každé je vlastnosť týkajúca sa (napríklad: je pravdivé tvrdenie alebo nepravdivé). Potom existuje množina .

Táto množina obsahuje všetky prvky , pre ktoré vlastnosť je pravdivá. Inými slovami, platí

.

**Príklad 3.1.22.** Nech . Potom množina je množina týchto prvkov v S, pre ktoré je pravdivé, ako napríklad . Podobne, množina je rovná množine , zatiaľ čo je prázdna množina.

Niekedy píšeme namiesto . To je vhodné keď používame dvojbodku “:” na označenie funkcie .

Axiómu o špecifikácii môžeme využívať na definovanie niektorej z ďalších operácii na množine - prienik a rozdiel množín.

**Definícia 3.1.23** (***prienik***) Prienik dvoch množín je definovaný ako množina

Inými slovami, obsahuje všetky prvky ktoré patria do oboch množín aj . Takže, pre všetky objekty ,

**Poznámka 3.1.24.** Všimnime si, že definícia je dobre definovaná (napríklad, spĺňa axiómu o substitúcii, pozri Sekciu A.7) pretože je definovaná v terminológii primitívnejších operácii, o ktorých vieme že spĺňajú axiómu o substitúcii.

Podobné poznámky aplikujeme v budúcich definíciách v kapitole a nebudú zvyčajne výslovne spomenuté znovu.

**Príklad 3.1.25.** Ukážte, že platí

* *.*

**Poznámka 3.1.26**. Mimochodom mali by sme byť opatrný s anglickým slovom „and“ , to môže znamenať zjednotenie alebo prienik, podľa kontextu. Napríklad, ak niekto hovorí o množine „dievčat a chlapcov“, myslí tým zjednotenie množiny chlapcov s množinou dievčat, ale ak niekto iný hovorí o množine ľudí, ktorí sú nezadaní a muži, potom myslí prienik množiny nezadaných ľudí s množinou ľudí, ktorí sú mužmi. (Môžete vypracovať pravidlo gramatiky, ktoré rozdelí kedy „and“ znamená zjednotenie a kedy „and“ znamená prienik?) Ďalší problém je, že „and“ je v angličtine používané na zaznačenie pridávania, ako napríklad jeden môže povedať „2 and 3 je 5“, zatiaľ čo hovorí, že „prvok {2} a prvok {3} vytvárajú množinu {2, 3}” a “prvky {2} a {3} vytvárajú množinu “. To môže zvyčajne vyznieť mätúco! Dôvod prečo my použijeme matematické symboly namiesto anglických slov ako „and“ je ten, že matematické symboly majú vždy presný a jednoznačný zmysel, zatiaľ čo pri anglických slovách sa musíme starostlivo pozerať na kontext aby sme vedeli čo to slovo znamená.

Hovoríme, že dve množiny A, B sú disjunktné ak . Všimnime si, že to nie je rovnaký pojem ako byť rôzny, Napríklad, množiny a  sú rôzne (existuje prvok v prvej množine, ktorý nie je v druhej množine) ale nie sú disjunktné (pretože ich prienik nie je prázdny). Zatiaľ čo množiny a sú disjunktné ale nie sú rôzne (prečo?).

**Definícia 3.1.27** (***Rozdiel množín***)

Dané sú dve množiny  a  Definujeme množinu alebo ako podmnožinu množiny , ktorá neobsahuje žiadne prvky množiny . Symbolicky

Napríklad, V mnohých prípadoch je podmnožinou , ale nie nevyhnutne.

Teraz navrhneme niekoľko základných vlastností zjednotenia, prieniku a rozdielu množín.

**Tvrdenie 3.1.28** (Množiny tvoriace booleovskú algebru). Nech sú množiny a nech je množina obsahujúca ako podmnožiny.

1. (najmenší prvok) a
2. (najväčší prvok) a .
3. (identita) a .
4. (komutatívnosť) a
5. (asociatívnosť) a
6. (distributívnosť)
7. (rozdelenie) a
8. (de Morganove pravidlá)

**Poznámka 3.1.29.**

* De Morganove pravidlá sú pomenované po britskom matematikovi a logikovi menom Augustus De Morgan (1806-1871), ktorý ich označil ako jedny zo základných pravidiel teórie množín.
* Podľa De Morganových pravidiel táto relácia prevádza zjednotenia na prieniky a naopak (rovnako zamieňa celú množinu a ).
* Vyššie uvedené vlastnosti sú súhrne označované ako vlastnosti Booleovskej algebry, po matematikovi menom George Boole (1815-1864). Tieto vlastnosti zohrávajú dôležitú úlohu ako pri množinovej algebre, tak aj výrokovej logike.
* Doposiaľ sme uviedli niekoľko tvrdení a vlastností o množinách, no stále existujú operácie, ktoré nedokážeme s množinami urobiť. Jedna zo základných operácií, ktoré by sme s množinou chceli spraviť je, zobrať každý prvok z danej množiny a istým spôsobom ho pretransformovať na nový, odlišný prvok. Napríklad, ak máme množinu a ku každému prvku pripočítame 1 dostaneme novú množinu . Takúto jednoduchú operáciu s doposiaľ uvedenými tvrdeniami spraviť nevieme, preto si zavedieme nové tvrdenie.

**Axióma 3.6. (**Veta o nahradení **– *Axióma nahradenia*)**

Nech  je množina. Predpokladajme, že pre každý prvok  a  existuje výrok taký, že pre každé  existuje nanajvýš jedno také, že je pravdivý výrok. Potom existuje taká množina – pravdivý pre nejaké , že pre každé  platí

– pravdivý pre nejaké

je pravdivý výrok pre nejaké .

**Príklad 3.1.31.**

Nech a  je výroková forma : „ je nasledovníkom “. Všimnite si, že pre každé  existuje práve jedno také, že je pravdivý výrok (nástupca ). Axióma 3.6. tvrdí, že množina : pre nejaké existuje. V tomto prípade je to celkom zjavne množina . (Prečo?)

**Príklad 3.1.32.**

Nech a  je výroková forma. Potom opäť pre  existuje práve jedno pre ktoré je výrok pravdivý – číslo1. V tomto prípade je množina pre nejaké jednoprvková množina . Každý prvok z množiny sme nahradili rovnakým prvokom a to 1. Týmto triviálnym príkladom sme ukázali, že množina získaná pomocou vyššie uvedenej vety môže byť často „menšia“ ako pôvodná množina.

V mnohých prípadoch môžeme zápis množiny

pre nejaké

skrátiť ako alebo.

Tak napríklad, ak potom je množina . Samozrejme, že môžeme axiómu nahradenia kombinovať s axiómou o špecifikácii. Takto by sme vytvorili množinu ako je pravdivé tvrdenie. Začneme množinou , s použitím axiómy o špecifikácii vytvoríme množinu je pravdivé tvrdenie a použijeme axiómu nahradenia, čím vytvoríme je pravdivé tvrdenie.

Napríklad .

V mnohých našich príkladoch sme implicitne predpokladali, že prirodzené čísla sú v skutočnosti objekty. Poďme to formalizovať.

**Axióma 3.7 (*Nekonečno*)**

Existuje množina označená ako , ktorej prvky nazývame prirodzené čísla. Množina obsahuje a takisto prvok ku každému , pre ktorú platia Peanove axiómy.

Z axiómy nekonečna vidíme, že čísla 3,5,7, atď., sú skutočne objekty v teórii množín a tak môžeme legitímne konštruovať množiny ako napr. , ako sme to robili v predchádzajúcich príkladoch.

Musíme však odlišovať medzi predpisom množiny a predpisom prvkov. Tak napríklad množina nie je to isté ako výraz, alebo funkcia . Túto skutočnosť zdôrazníme v nasledujúcom príklade.

**Príklad 3.1.33.** (neformálne)Nasledujúce dve množiny sa rovnajú

(3.1)

aj keď výrazy a  sa nikdy nerovnajú pre ľubovoľné prirodzené čísla . Tak je dobrý nápad ak nezabudneme použiť tieto zátvorky , keď hovoríme o množinách, inak sa omylom zmenia množiny a ich prvky. Jeden z dôvodov prečo je táto situácia prekvapujúca je, že písmeno sa používa v dvoch rôznych spôsoboch na dvoch stranách (3.1). Na objasnenie situácie, poďme prepísať množinu nahradíme písmeno písmenom , tak dostaneme . To je presne to isté ako predtým (Prečo ?) , tak my môžeme prepísať (3.1), ako

Teraz je to ľahko vidieť, (pomocou (3.1.4)) prečo táto identita je pravda: každé číslo z výrazu , kde je prirodzené číslo medzi a , je tiež výraz, kde (všimnite si, že je prirodzené číslo medzi a ), naopak každé číslo z výrazu , kde je prirodzené číslo medzi a , je tiež výraz , kde (všimnite si, že je teda prirodzené číslo medzi a ). Všimnite si vyššie uvedené vysvetlenie (3.1) bolo by viac mätúce keby sa zmenilo za .

***— Cvičenia —***

*Cvičenie 3.1.1.*Dokážte, že definícia 3.1.4 rovnosti je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

*Cvičenie 3.1.2.* Použite iba definíciu 3.1.4 , veta 3.1, veta 3.2 a veta 3.3 dokážte, že množiny , , , a sú odlišné (t.j. žiadne dve z nich si nie sú rovné).

*Cvičenie 3.1.3.* Dokážte zvyšné pohľadávky v leme 3.1.13.

*Cvičenie 3.1.4.* Dokážte zvyšné pohľadávky v probléme 3.1.18.

*Cvičenie 3.1.5.* Nech  a  sú množiny. Dokážte, že tvrdenie , , sú logicky ekvivalentné (jedna z nich implikuje ďalšie dve).

*Cvičenie 3.1.6.* Dokážte problém 3.1.28. (Tip: možno použiť jeden z výrokov, ktoré sme dokázali predtým lema 3.1.13.)

*Cvičenie 3.1.7.* Nech sú množiny. Dokážte, že  a . Okrem toho, dokážte, že ak a potom . Podobne ukážte, že a a okrem toho ak a tak potom .

*Cvičenie 3.1.8.* Nech sú množiny. Dokážte absorpčné pravidlo  a .

*Cvičenie 3.1.9.* Nech sú množiny také, že a . Ukážte, že a

*Cvičenie 3.1.10.* Nech  a  sú množiny. Ukážte, že tri množiny , , a sú disjunktné a ich zjednotenie je .

*Cvičenie 3.1.11.* Ukážte, že veta výmeny v sebe zahŕňa vetu špecifikácie.

**3.2. Russellov paradox**

Veľa z viet predstavených v predchádzajúcej časti majú jednoduchú príchuť: obe nám umožnia vytvoriť množinu, ktorá sa skladá zo všetkých prvkov, ktoré majú určitú vlastnosť. Obe sú vierohodné ale dalo by sa myslieť si , žeby sa mohli zjednotiť, napríklad navedením nasledujúcej vety:

**Axióma 3.8 (*univerzálna špecifikácia*) *(****Nebezpečná****!)*** *Predpokladajme, že pre každý objekt máme vlastnosť , ktoré sa týkajú (tak, že pre každé , je* ***buď pravdivé alebo nepravdivé*** *tvrdenie). Potom existuje množina také, že pre každé*

*.*

Táto veta je tiež známa ako veta chápania. Tvrdí, že každá vlastnosť zodpovedá množine, ak predpokladáme, že vo vete by sme mohli hovoriť o množinách všetkých modrých objektov na množine všetkých prirodzených číslach, množina všetkých množín a tak ďalej. Táto veta sa tiež využije v nasledujúcej časti (Cvičenie 3.2.1.).

Bohužiaľ táto veta nemôže byť zavedená do teórie množín , pretože vytvára logický rozpor známy ako

***Russellov paradox***, ktorý bol objavený filozofom a logikom Bertrandom Russollom (1872 - 1970) v roku 1901. Paradox hovorí nasledujúce. Nech je tvrdenie

je pravdivé len keď je množina, ktorá neobsahuje samu seba. Napríklad je pravda, pretože množina nie je ani jedna z troch elementov z . Na druhej strane, ak dovolíme aby  bola množinou všetkých množín (pokiaľ vieme, že existujú z axiómy univerzálnej špecifikácie), potom  je vlastná množina, to je element (prvok) z , a tak je nepravda. Teraz použi axiómu univerzálnej špecifikácie aby si vytvoril množinu

,

napríklad, množina všetkých množín, ktoré ich neobsahuje. Teraz sa opýtame otázku: Obsahuje seba samu, napríklad platí ? Ak obsahuje seba, potom to podľa definície znamená, že je pravda, napríklad je množina a. Na druhej strane, ak seba neobsahuje, potom by bola pravda a preto . V každom ďalšom prípade budeme mať oba a , čo je absurdné.

Problém s uvedenou axiómou je, že vytvára príliš vzdialené množiny “veľké“ – ako príklad, môžeme použiť axiómu aby sme hovorili o množine všetkých objektov (takzvaná “Univerzálna množina“). Vzhľadom k tomu, že množiny sú samé o sebe objektmi (Axiómu 3.1.), môžu obsahovať samé seba, čo je trochu hlúpa situácia. Jeden spôsob ako neformálne môžeme vyriešiť tento problém je, aby sme mysleli na objekty ako sú usporiadané v hierarchii. V spodnej časti hierarchie sú primitívne objekty – objekty, ktoré nie sú množiny[[1]](#footnote-1), ako je prirodzené číslo . Potom na ďalšej priečke hierarchie sú množiny, ktorých prvky obsahujú lem primitívne objekty, ako sú alebo prázdna množina , nazývajme to zatiaľ “Primitívne množiny“. Potom sú tam množiny, ktoré sa skladajú len z primitívnych objektov a primitívnych množín, ako sú . Potom môžeme vytvárať množiny z týchto objektov a tak ďalej. Pointa je v tom, že v každej fáze hierarchie môžeme vidieť len tie elementy, ktoré sa skladajú z objektov na nižšej úrovni hierarchie a tak nikdy nekonštruujeme množiny, ktoré obsahujú seba.

Za účelom skutočnej formalizácie a intuície hierarchie objektov je v skutočnosti pomerne komplikované, a tak to nebudeme robiť. Namiesto toho, by sme mali jednoducho predpokladať axiómu, ktorá zabezpečuje absurdity ako je Russellov paradox, kde sa nevyskytujú.

**Axióma 3.9 *(Pravidelnosť)***Ak je  neprázdna množina, potom tam je najmenej jeden prvok z , ktorý nie je množinou, alebo je oddelený od .

Zmyslom tejto axiómy (ktorá je tiež známa ako axióma nadácie = opodstatnenia) tvrdí, že aspoň jeden z prvkov z  je nízko v hierarchii objektov, že neobsahuje žiaden z ďalších prvkov z . Napríklad ak , potom prvok  neobsahuje žiadny z prvkov z  (ani ani nepatria do ). Hoci prvok , je niekde vyššie v hierarchii, obsahuje element z , menovite . Jedným konkrétnym dôsledkom tejto axiómy sú množiny ale nie sú povolené, aby obsahovali samu seba (Cvičenie 3.2.2).

Môžeme sa oprávnené pýtať, či skutočne potrebujeme jedenú z týchto axióm v našej teórií množín, pretože je to určite menej intuitívne ako naše ostatné axiómy. Za účelom vytvárania analýz, sa nám ukazuje fakt, že túto axiómu sme nikdy nepotrebovali, všetky množiny o ktorých sme uvažovali v analýzach sú zvyčajne veľmi nízko v hierarchií objektov, ako príklad množiny primitívnych objektov, alebo množiny z množín primitívnych objektov, alebo v najhoršom prípade množiny z množín a z množín primitívnych objektov. Avšak je to nutnosť zahrnúť túto axiómu s cieľom vykonávať pokročilejšie teórie množín, a tak sme zahrnuli túto axiómu do textu (ale v doplnkovom oddiele) aby to bolo úplne.

**— Cvičenia —**

*Cvičenie 3.2.1.* Ukáž univerzálnu špecifikáciu axiómy, Axióma 3.8, ak by sme predpokladali, že je to pravda, znamenalo by to, že Axiómy 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, a 3.6. (Ak predpokladáme, že všetky objekty sú prirodzené čísla, môžeme získať Axiómu 3.7). Preto tieto axiómy, ak je to povolené, tak by to zjednodušilo základy teórie množín (a môžeme to považovať za základ intuitívneho modelu teórie množín známej ako “Naivné teórie množín“). Bohužiaľ, ako sme videli Axiómu 3.8 je “príliš dobrá aby to bola pravda“!

*Cvičenie 3.2.2.* Použi axiómu pravidelnosti ( a ojedinelú množinu alebo nastavenie axiómy) a ukáž, že ak  je množina, potom . Okrem toho, ukáž, že ak  a  sú dve množiny, potom buď , alebo (alebo oboje).

*Cvičenie 3.2.3.* Ukáž (za predpokladu, že ostatné axiómy sú z teórie množín), univerzálnu špecifikáciu Axiómy. Axióma 3.8, je ekvivalentná k axiómou predpokladajúcou existenciu “Univerzálnych množín“ obsahujúc všetky objekty (napríklad pre všetky objekty , máme ). Inými slovami, ak Axióma 3.8 je pravda, potom univerzálna množina existuje, a naopak ak univerzálna množina existuje, potom Axióma 3.8 je pravda. (Toto môže vysvetľovať, prečo Axióma 3.8 sa nazýva axióma univerzálnej špecifikácie). Poznámka, že ak univerzálna množina existovala, potom by sme mali prostredníctvom Axiómy 3.1, odporujúc cvičeniu 3.2.2. Tieto axiómy tvoria základy špecifických pravidiel z axiómy univerzálnej špecifikácie.

1. V pravej množinovej teórií, nebudú existovať žiadne primitívne objekty, ale bude tam jedna primitívna množina na ďalšej priečke hierarchie. [↑](#footnote-ref-1)