Odvodenie Rutherfordovej formuly

Boris Tomášik

30. septembra 2009

Problém, ktorým sa zaoberáme je nasledovný: častica α s danou energiou dopadá na terčík pozostávajúci z ťažkých atómov. Mieri blízko niektorého z jadier. (V pôvodnom pokuse išlo a fóliu zo zlata.) Vplyvom Coulumbovského odpudzovania sa častica α vychýli zo svojho pôvodného smeru. Tu chceme vlastne spočítať pravdepodobnosti, alebo účinné prierezy pre rozptyl do daného uhla.

Situácia je znázornená na obrázku 1. Na začiatku sa α častica pohybuje tak, že ak by sa pohybovala stále po priamke, preletela by vo vzdialenosti p od jadra. Jadro môžeme v tomto prípade považovať za bodové. Vzdialenosť p nazývame zámerným parametrom. Napred odvodíme vzťah medzi zámerným parametrom a uhlom, do akého bude α častica vychýlená.

Podľa Coulombovho zákona na časticu pôsobí elektrostatická sila

$$\vec{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}\,, \tag{1}$$

kde Z je atómové číslo jadra, na ktorom sa častica rozptyľuje a e elementárny náboj, takže Ze je náboj jadra; ε_0 je permitivita vákua. Polohový vektor od častice smerom k jadru je $\vec{r}$. Silu, pôsobiacu na časticu rozložíme na zložku pozdĺžnu, teda v smere pôvodného pohybu častice

$$F_{\parallel} = F\cos\varphi \tag{2}$$

a zložku priečnu, ktorá je na ňu kolmá

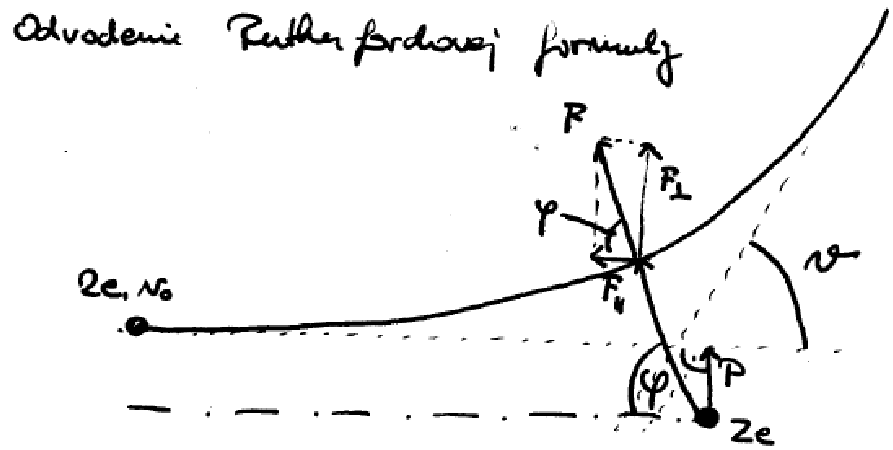
$$F_{\perp} = F\sin\varphi\,. \tag{3}$$

Teraz urobíme jeden umelý krok, ktorý sa ale neskôr zíde. Uvažujeme vzťažnú sústavu s počiatkom v jadre a vyjadríme moment hybnosti ako $L = mv_0p$, kde m je hmotnosť α častice a v_0 jej pôvodná rýchlosť. Moment hybnosti sa dá však vyjadriť aj v polárnych súradniciach ako $L = mr^2\dot{\varphi}$. Takže musí platiť

$$mv_0p = mr^2\dot{\varphi} \tag{4}$$

z čoho získavame

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\dot{\varphi}}{v_0p}\,. \tag{5}$$



Obrázok 1: Rozptyl α častice na jadre.

Teraz vyjdeme z pohybovej rovnice pre pohyb v smere kolmo na os zrážky

$$m\frac{dv_\perp}{dt} = F_\perp = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\sin\varphi\,, \tag{6}$$

sem dosadíme za $1/r^2$ z rovnice (5) a označíme

$$k = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\,. \tag{7}$$

Takto dostávame

$$m\frac{dv_\perp}{dt} = \frac{k}{v_0 p}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\,. \tag{8}$$

Túto rovnicu teraz integrujeme podľa času

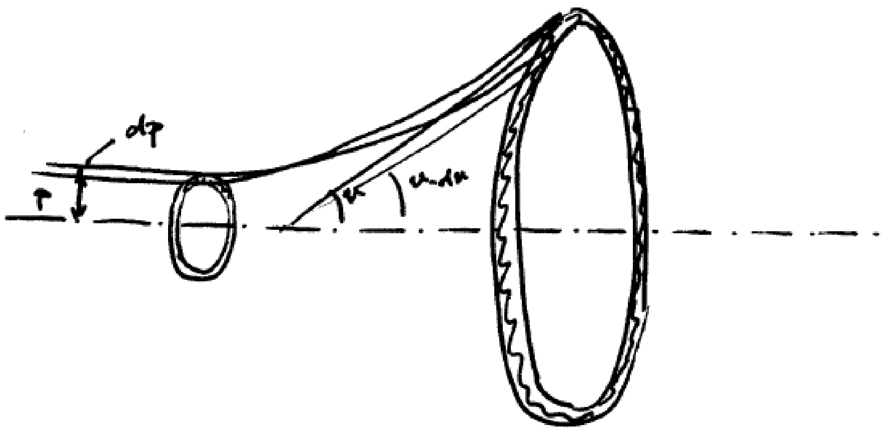
$$\int_{t_i}^{t_f} m\frac{dv_\perp}{dt}dt = \int_{t_i}^{t_f}\frac{k}{v_0 p}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}dt \tag{9}$$

Na ľavej strane môžeme urobiť substitúciu a prejsť k integrovaniu cez rýchlosť $v_\perp$. Počiatočná rýchlosť v priečnom smere je 0 a konečná musí byť kvôli zákonu zachovania energie $v_0\sin\vartheta$, pročom ϑ je uhol, o ktorý sa α častica rozptýli. Na pravej strane môžeme prejsť k integrovaniu cez φ s počiatočnou hodnotou 0 a konečnou $\pi - \vartheta$. Takže dostávame

$$\int_0^{v_0\sin\vartheta} dv_\perp = \frac{k}{mv_0 p}\int_0^{\pi-\vartheta}\sin\varphi\,d\varphi\,. \tag{10}$$

Tieto integrály dávajú

$$v_0\sin\vartheta = \frac{k}{mv_0 p}\left(1+\cos\vartheta\right)\,, \tag{11}$$



Obrázok 2: Rozptyl α častice do intervalu uhlov $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$.

teda po úprave

$$p = \frac{k}{mv_0^2} \frac{1 + \cos\vartheta}{\sin\vartheta} \,. \tag{12}$$

Tento vzťah upravíme sériou krokov:

$$\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{1+\cos^2\frac{\vartheta}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} = \cot\frac{\vartheta}{2} \tag{13}$$

takže nakoniec dostávame

$$p = \frac{k}{mv_0^2} \cot\frac{\vartheta}{2} \,. \tag{14}$$

Toto je vzťah, ktorý hovorí o tom, ako súvisí uhol rozptylu so zámerným parametrom. Pre malé p dostávame rozptyl na veľké uhly a naopak.

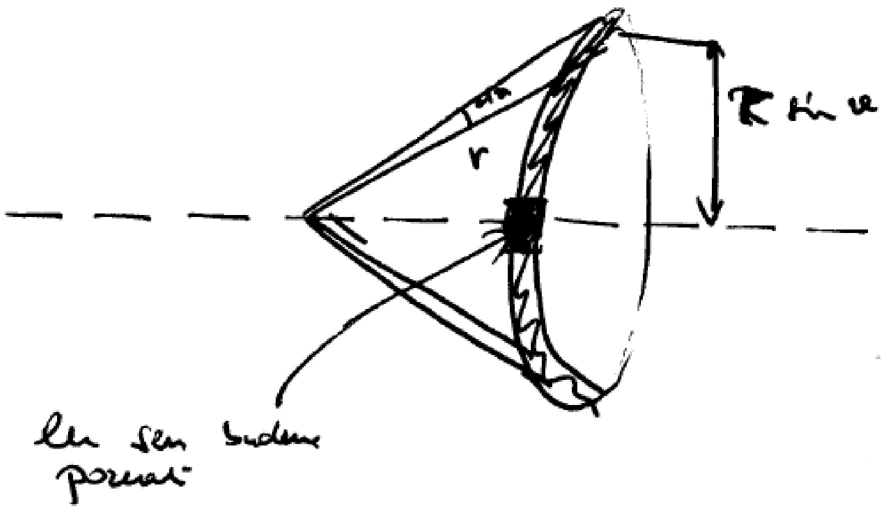
Experimentálne relevantná otázka je však, koľko častíc sa vychyľuje do *intervalu* uhlov $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$ (Obrázok 2)? Tieto častice musia nalietať so zámernými parametrami z intervalu $(p+dp, p)$, pričom p je zámerný parameter zodpovedajúci uhlu ϑ a diferenciály dostaneme derivovaním

$$dp = -\frac{k}{2m\,v_0^2} \frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} d\vartheta \,. \tag{15}$$

Častice, ktoré sa majú rozptýliť do daného intervalu uhlov musia nalietať v rámci prstenca okolo osi zrážky s polomerom p a šírkou dp. Jeho celková plocha je

$$da = 2\pi\, p\, |dp| \,. \tag{16}$$

Ak α časticami ostreľujeme tenkú fóliu s koncentráciou atómov N, plochou A a hrúbkou h, potom pravdepodobnosť rozptylu do daného intervalu uhlov je daná



Obrázok 3: Rozptyl α častice do maého priestorového uhla.

pravdepodobnosťou trafiť sa do niektorého z prstencov okolo atómov vo fólii. Tá je daná celkovou plochou prstencov delenou celou plochou A

$$W = \frac{2\pi\, p\, |dp|\, N\, h\, A}{A} = 2\pi\, p\, N\, h\, |dp|\,. \tag{17}$$

Pri n dopadajúcich atómov bude počet rozptýlených do daného intervalu uhlov

$$dn = n\, 2\pi\, p\, N\, h\, |dp|\,. \tag{18}$$

Sem dosadíme za p zo vzťahu (14) a za dp zo vzťahu (15)

$$dn = \pi\, n\, N\, h \left(\frac{k}{m v_0}\right)^2 \cot\frac{\vartheta}{2}\, \frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\, d\vartheta\,. \tag{19}$$

Tieto častice sa rozptyľujú priestorového uhla, ktorý vyzerá ako prstenec. Priestorový uhol je všeobecne vždy daný ako plocha na guli delená kvadrátom polomeru tejto gule. Pre prstenec medzi uhlami ϑ a $(\vartheta + d\vartheta)$, do ktorého sa častica rozptyľuje, je priestorový uhol $2\pi\,\sin\vartheta\, d\vartheta$. Počet častíc, rozptýlených len do časti $d\Omega$ (obrázok 3) tohoto priestorového uhla je potom

$$dn = \frac{\pi\, n\, N\, h \left(\frac{k}{m v_0}\right)^2 \cot\frac{\vartheta}{2}\, \frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\, d\vartheta}{2\pi\,\sin\vartheta\, d\vartheta}\, d\Omega\,. \tag{20}$$

Tento vzťah ešte upravíme tak, že v menovateli využijeme $\sin\vartheta = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}$. Dostávame Rutherfordovu rozptylovú formulu

$$dn = n\, N\, h \left(\frac{k}{2m\, v_0^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\, d\Omega \tag{21}$$