

UNIVERZITA MATEJA BELA V BANSKEJ BYSTRICI

FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

Didaktika matematiky

medzi obsahom, porozumením a modelovaním

Pavol Hanzel

Vladimír Kobza



Banská Bystrica 2026

Didaktika matematiky medzi obsahom, porozumením a modelovaním

Autori: Pavol Hanzel, Vladimír Kobza

Recenzenti: Meno Priezvisko, Meno Priezvisko

Vydala: Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Fakulta prírodných vied

Rok vydania: 2026

Rozsah: ?? strán

Vydanie: prvé

ISBN: 978-80-XXXX-XXXX-X

DOI: doplniť podľa vydavateľa

© Pavol Hanzel, Vladimír Kobza, 2026

Všetky práva vyhradené. Toto dielo ani žiadnu jeho časť nemožno reprodukovat', ukladať do informačných systémov alebo inak šíriť bez súhlasu držiteľov autorských práv, okrem prípadov povolených zákonom.

Obsah

1	Úvod	1
2	Didaktika matematiky - východiská	3
2.1	Vzťah didaktiky matematiky k dejinám matematiky	5
2.2	Historický vývoj pojmu zlomok	6
2.3	Didaktika matematiky ako vedná disciplína	9
3	Vedecké poznávanie vo vyučovaní matematiky	17
3.1	Vedecké poznávanie a jeho analógia vo vyučovaní matematiky	18
3.1.1	Fázy vedeckého poznávania	19
3.1.2	Výskumné metódy v kontexte vyučovania	20
3.1.3	Využitie výskumných metód v školskej matematike	21
3.1.4	Heuristické stratégie vo vyučovaní matematiky	21
3.1.5	Analógia s problémovým vyučovaním	22
3.1.6	Prepojenie s IKT	23
3.2	Problémové vyučovanie	24
3.2.1	Didaktické ciele a význam	25
3.3	Vizualizácia problému	26
3.3.1	Formy vizualizácie v matematike	26
3.4	Význam a poslanie matematického vzdelávania	26
4	Artificial Intelligence a matematika	29
4.1	Mikro-ukážky z triednej praxe	31
4.2	Možnosti využitia AI v didaktike matematiky	33
4.2.1	AI vo vzdelávaní a jazykové modely v matematike	33
4.2.2	Didaktický potenciál jazykových modelov	34
4.2.3	Potenciálne prínosy využitia AI	35
4.2.4	Riziká a obmedzenia využívania AI	35
4.2.5	AI ako didaktický sparringpartner	36
4.3	Konkrétne scenáre práce so študentmi (návrhy)	37

5	Slovné úlohy	39
5.1	Historické poznámky	40
5.2	Vymedzenie pojmov	45
5.2.1	Ukážka matematických úloh	45
5.3	Matematizácia a vizualizácia slovnej úlohy	46
5.3.1	Ukážka matematizácie	47
5.3.2	Vizualizácia – modely	48
5.3.3	Špecifické modely	50
5.4	Typológia a klasifikácia slovných úloh	52
5.4.1	Klasifikácia podľa matematickej štruktúry	52
5.4.2	Klasifikácia podľa obsahového zamerania	54
5.4.3	Jednoduché a zložené slovné úlohy	54
5.4.4	Anatomický prístup k slovnej úlohe	56
5.4.5	Úlohy o veku ako modelový typ	56
5.4.6	Fragmentácia textu a cesta k rovnicovému modelu	57
6	Číselné obory	61
6.1	Historické poznámky	61
6.1.1	Školská matematika	65
6.2	Prirodzené čísla	67
6.2.1	Desiatková sústava	69
6.3	Celé čísla	72
6.3.1	Opačné čísla	77
6.3.2	Generické modely	80
6.3.3	Operácie s celými číslami	82
6.4	Racionálne čísla	87
6.4.1	Zlomky	91
6.4.2	Výsledok - porozumenie	97
6.5	Reálne čísla	98
6.5.1	Odmocnina z dvoch	102
6.6	Seminárne zadanie	103
7	Rovnice a nerovnice	105
8	Konstruktívna geometria	107
9	Analytická geometria	109
10	Funkcie	111
11	Gamifikácia v matematickom vzdelávaní	113

Kapitola 1

Úvod

Didaktika matematiky ako analýza myslenia v triede

Východiskom tejto knihy je presvedčenie, že didaktika matematiky nemá byť iba súborom všeobecných pedagogických zásad, ale systematickou analýzou matematického myslenia žiakov v konkrétnych vyučovacích situáciách.

Tradičné didaktické texty často odpovedajú na otázku, *čo by sa malo vyučovať a aké metódy sú vhodné*, no len zriedkavo sa venujú tomu, *ako presne žiak uvažuje v procese učenia*, aké predstavy si vytvára, kde vznikajú typické chyby a akým spôsobom sa tieto predstavy môžu meniť.

Matematika je pritom osobitnou oblasťou vzdelávania. Nejde v nej len o osvojovanie postupov, ale o porozumenie vzťahom, o prácu s modelmi, o rozlišovanie medzi domnienkou a istotou a o schopnosť argumentácie. Bez analýzy týchto procesov zostáva didaktika matematiky nevyhnutne abstraktná a málo použiteľná pre reálnu triednu prax.

Zámerom tejto knihy je preto posunúť pozornosť od všeobecných odporúčaní k detailnému opisu didaktických situácií: ako žiak experimentuje, ako formuluje hypotézu, ako pracuje s chybou, ako prechádza od intuitívneho pozorovania k matematickému zdôvodneniu.

Osobitný dôraz sa kladie na dynamiku vyučovania. Súčasné technológie umožňujú pracovať s matematickými objektmi v pohybe, v zmene a v interakcii. To zásadne mení charakter učenia sa matematiky: žiak sa nestáva len príjemcom hotových poznatkov, ale aktívnym účastníkom poznávacieho procesu. Experimentovanie, vizualizácia a diskusia sa stávajú prirodzenou súčasťou budovania pojmov.

Didaktika matematiky je tu chápaná ako reflexia týchto procesov: ako skúmanie toho, *čo sa deje v myslení žiaka*, keď rieši problém, keď sa mýli, keď hľadá pravidelnosť a keď sa pokúša svoje zistenia zdôvodniť.

Takto poňatá didaktika neponúka hotové recepty, ale poskytuje učiteľovi nástroje, ako porozumieť mysleniu žiakov a ako cielene vytvárať situácie, v ktorých sa matematické poznanie rodí prirodzeným a zmysluplným spôsobom.

Predkladaná monografia zdôrazňuje tri základné dimenzie vyučovania matematiky:

- matematický obsah,
- porozumenie žiaka,
- proces matematického modelovania,

ktorý spája matematiku so svetom reálnych situácií.

Didaktika matematiky medzi obsahom, porozumením a modelovaním má niekoľko

Kapitola 2

Didaktika matematiky - východiská

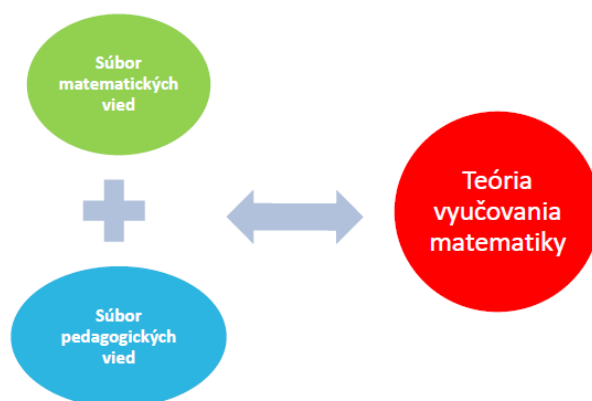
Výučbu matematiky na všetkých stupňoch vzdelávania treba chápať ako

tvorivý a neopakovateľný proces,

ktorý sa nedá spútať do presných schém, modelov, či spojiť len s jedinou teóriou.

Učiteľ matematiky sa dostáva do pozície koordinátora a manažéra vo vyučovacom procese, ktorý sa snaží o rozvíjanie zásadných matematických kompetencií žiakov. Funkcia autoritatívneho školiteľa, ktorý vyžaduje len memorovanie matematických definícií a tvrdení sa stáva skôr podpornou.

Moderná didaktika sa chápe ako disciplína, ktorej predmetom skúmania je proces výučby ako jednota činnosti učiteľa (učenie) a činnosti žiakov (učenie sa). Zaoberá sa procesom výučby vo všeobecnosti, bez ohľadu na konkrétny vyučovací predmet. 3) Odborové didaktiky skúmajú proces výučby v určitých skupinách príbuzných vyučovacích predmetov.



Obr. 2.1: Synergetický vzťah medzi vednými disciplínami

Teória vyučovania matematiky skúma procesy prebiehajúce v školskej matematike a prostredníctvom analýzy

obsahu, prostriedkov, metód a foriem

vyučovania a štúdia matematiky usiluje o hlbšie porozumenie učebnému procesu.

Pre termín *Didaktika matematiky* sa v niektorých prácach [HEJ, 1989] používa termín *Teória vyučovania matematiky*. V práci [KUR, 2016] sa uvádza aj zaužívaný anglický termín od E. Whittmann „*Mathematics Education*“.

Komparáciou viacerých prác a viacerých autorov uvedieme hlavné charakteristiky pre vymedzenie pojmu didaktika matematiky.

Didaktika matematiky (DM)

- Cieľom DM je výskum nových, efektívnejších metód vyučovania matematiky na všetkých stupňoch vzdelávania a ich aplikácie do školskej praxe.
- DM je založená predovšetkým na poznatkoch základných matematických disciplín, na historickom vývoji matematiky ako vedy a ich aplikácií do školskej matematiky.
- Výsledky experimentov DM aplikuje do prípravy budúcich učiteľov matematiky, pričom využíva najnovšie výsledky v oblasti pedagogicko-psychologických disciplín a moderné informačno-komunikačné technológie.

Teoretici v oblasti vyučovania matematiky sa v súčasnosti opierajú o významnú publikáciu [BAL, 2005].

Historický kontext

Korene didaktiky matematiky a medzníky jej vývoja v 20. storočí

1. V roku 1872 **Felix Klein** publikoval Erlangenský program¹⁾ a predniesol prednášku o matematickom vzdelávaní, v ktorej apeloval na väčšiu aplikovateľnosť matematiky pri jej vyučovaní. Ku konci svojej kariéry sa začal zaujímať i o výuku matematiky na nemeckých školách, **snažil sa o modernizáciu matematiky**. Presadil, aby sa na stredných školách vyučovali základy teórie funkcií a základy diferenciálneho a integrálneho počtu (tzv. Kleinsche Reform). Neskôr aktívne prispel k tomu, aby bola didaktika matematiky uznaná ako vedná disciplína. Viac [Tu](#).
2. Dôležitým medzníkom bol rok 1908 a Štvrtý medzinárodný kongres matematikov v Ríme, počas ktorého bola ustanovená nová organizácia: **International Commission on Mathematical Instruction** (Medzinárodný výbor pre výučbu matematiky), ktorej prezidentom sa stal práve Felix Klein. Linka na web [Tu](#).

3. Ďalším významným krokom bolo vytvorenie **Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching - CIEAEM** (Komisia pre štúdium a rozvoj vyučovania matematiky) v roku 1950. Linka na web [Tu](#).
4. Šesťdesiate roky 20. storočia sú obdobím, keď matematici „znovu objavujú“ školu. Objavuje sa hnutie New Math (Nová matematika) u nás známe ako **Modernizácia vyučovania matematiky**.
5. V roku 1970 časopis **Journal for Research in Mathematics Education**, ktorý sa zaradil medzi najrenomovanejšie vedecké časopisy týkajúce sa problematiky didaktiky matematiky.

2.1 Vzťah didaktiky matematiky k dejinám matematiky

Dejiny matematiky približujú spojenie matematiky so životom, odhaľujú proces tvorby matematických pojmov a tvrdení. Historické vsuvky na hodinách matematiky žiakov motivujú, odbúravajú strach z matematiky. Priblížením histórie matematiky môžeme získať užitočné predstavy o vývoji matematického myslenia a tieto potom ďalej aplikovať vo vyučovaní. Podľa P. M. Erdnija [[ERN, 1978](#)]:

„Rast stromu matematických znalostí v hlave jedného človeka bude úspešný len vtedy, keď v určitej miere zopakuje históriu rozvoja tejto vedy“.

Keď sledujeme vývoj vzniku určitého matematického pojmu v histórii ľudstva, a následne pozorujeme myšlienkový proces u našich žiakov, často nachádzame zaujímavú paralelu. Môžeme to pozorovať a porovnávať na vývoji matematického myslenia z obdobia starobylých civilizácií (Egypt, Mezopotámia) s myslením Grékov, Arabov a Európanov v neskoršom období.

Matematické myslenie u Grékov je jasný posun k abstraktnejšiemu mysleniu.

Viac o gréckej matematike nájdete [Tu](#).

Poznámka 2.1

Analogický **proces** sa deje aj v školskej matematike: **od experimentovania** v mladšom veku, žiaci postupne prechádzajú **ku kauzálnemu mysleniu** v staršom veku.

Tento proces budeme interpretovať porovnaním riešenia príkladu (R403) pochádzajúceho zo starovekého Egypta s možnosťami, ktoré poskytuje súčasná školská matematika. Upravená verzia riešeného príkladu zapísaného v Rhindovom papyruse je prevzatá z práce [[BEC, 2003](#)].

Príklad: R403 - Rhindov papyrus

Je treba rozdeliť 100 chlebov medzi 5 mužov tak, aby bola jedna sedmina z troch horných pre dvoch mužov dole.

Riešenie.

Myšlienka pôvodného riešenia, ktoré je uvedené na papyruse je založená na **metóde chybného predpokladu**.

Celkový počet chlebov je 100, ktoré je potrebné nejakým spôsobom rozdeliť medzi 5 mužov. V úlohe sa spomínajú traja horní muži a dvaja dolní.

1. Egypťskí pisári vychádzali z predstavy, že ide o aritmetickú postupnosť tvaru:

$$1, 1 + d, 1 + 2d, 1 + 3d, 1 + 4d \quad (2.1)$$

2. Ďalej je tu podmienka, ktorú je možné interpretovať tak, že súčet počtu chlebov troch horných mužov v usporiadaní sa rovná súčtu chlebov dvoch mužov dole v usporiadaní.

3. Chybným predpokladom je to, že prvým členom tejto postupnosti explicitne stanovili číslo 1. Stručný prepis riešenia tejto úlohy zaznamenaného na papyruse:

- Zo vzťahu 2.1 vypočítame $d = 5\frac{1}{2}$ ($= \frac{11}{2}$)
- Ide teda o postupnosť 1, $6\frac{1}{2}$, 12, $17\frac{1}{2}$, 23, ktorej súčet je 60.
- Číslo 60 musíme vynásobiť číslom $1\frac{2}{3}$, aby sme získali súčet 100.

4. Hľadaná aritmetická postupnosť je $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$, $38\frac{2}{3}$, ktorej diferenciacia je $9\frac{1}{6}$.

□

V súčasnosti by sa táto úloha mohla riešiť ako sústava dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych. Chybný predpoklad **nahradíme neznámou** a . Dostaneme rovnice:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) = 100$$

$$a + (a + d) = 1/7[(a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d)]$$

Jednoduchým výpočtom by sme sa dostali k tomu istému riešeniu.

Rozdiel medzi egyptským a súčasným riešením nespočíva v správnosti výsledku, ale v povahe matematického prístupu k problému, ktorý riešime.

2.2 Historický vývoj pojmu zlomok

Vývoj pojmu zlomok a jeho priemet do školskej matematiky poskytuje mimoriadne vhodnú ilustráciu toho, ako sa matematické myslenie vyvíja postupne, v etapách, a nie skokovo. Tento

historický vývoj má pozoruhodnú paralelu so spôsobom, akým si pojem zlomok osvojujú žiaci v školskej matematike. V oboch prípadoch ide o **špirálovitý proces**, v ktorom sa pojem opakovane vracia, no zakaždým na vyššej úrovni abstrakcie a porozumenia.

Zlomok v starovekom Egypte – zlomok ako operátor

Najstaršie zachované matematické texty zo starovekého Egypta (napr. Rhindov papyrus, približne 1650 pred n.l.) ukazujú, že Egypťania pracovali so zlomkami výlučne v podobe **kmeňových zlomkov**, teda zlomkov tvaru

$$\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zlomok v ich chápaní nepredstavoval samostatné číslo (množstvo), ale **operáciu**: „vezmi jednu n-tinu z celku“. Aj v príklade R403 vidíme, že zlomky vystupujú ako pokyny na rozdelenie, nie ako objekty, s ktorými by bolo možné voľne operovať. Hodnota diferencie $d = 5\frac{1}{2}$ nie je chápaná ako číslo $\frac{11}{2}$, ale ako výsledok procedurálneho postupu, ktorý je následne škálovaný.

Z didaktického hľadiska je dôležité zdôrazniť, že egyptská matematika:

- nepoznala všeobecný zápis zlomku $\frac{p}{q}$,
- nepracovala so zlomkom ako s číselným objektom,
- využívala metódu chybného predpokladu a škálovania namiesto algebraických vzťahov.

Paralela so školskou matematikou – prvá etapa zavádzania zlomkov

Analogická situácia nastáva v školskej matematike, najmä v **nižších ročníkoch 2. stupňa ZŠ (5. – 6. ročník)**.

Zlomok sa tu zavádza predovšetkým:

- ako **operátor** („vezmi polovicu“, „vezmi tri štvrtiny z koláča“),
- prostredníctvom konkrétnych modelov (delenie celku, meranie, separované modely).

V tejto fáze žiaci často:

- nevnímajú zlomok ako číslo,
- nedokážu ho umiestniť na číselnú os,
- pracujú so zlomkami prevažne procedurálne.

Zlomok tu plní rovnakú funkciu ako v egyptskej matematike: je nástrojom konania, nie abstraktným objektom.

Grécka matematika – zlomok ako pomer

Výrazný posun nastáva v antickom Grécku. Grécki matematici začali chápať zlomky najmä ako **pomery dvoch veľkostí**, pričom kládli dôraz na geometrickú interpretáciu. Pomer bol vzťahom, nie číselným objektom.

Aj tu nachádzame paralelu so školskou matematikou približne od 7. ročníka ZŠ:

- žiaci porovnávajú kmeňové zlomky, pričom využívajú adresu v intervale $\langle 0, 1 \rangle$,
- zlomky už chápu ako množstvá, vedia rozhodnúť „väčší – menší zlomok“,
- využívajú úsečky, obrázky a pomerové modely bez explicitnej numerickej reprezentácie.

Stredovek a novovek – zlomok ako číslo

Až s rozvojom aritmetiky v islamskom svete a neskôr v Európe sa postupne presadzuje chápanie zlomku ako **čísla v modernom zmysle**. Zlomok sa stáva prvkom číselného oboru, s ktorým možno vykonávať operácie, zapisovať ho v jednotnom tvare $\frac{p}{q}$ a umiestňovať ho na číselnú os.

Táto etapa zodpovedá vyšším ročníkom ZŠ a SŠ, keď:

- žiak chápe zlomok ako bod na číselnej osi (adresa),
- rozumie ekvivalencii zlomkov,
- dokáže pracovať so zlomkami algebraicky.

Poznámka 2.2

Cieľom práce s historickými kontextmi nie je rekonštrukcia dejín matematiky, ale porozumenie procesu vzniku pojmov, ktorý sa analogicky objavuje aj v myslení žiakov.

Didaktická interpretácia – špirálovitý vývoj pojmu zlomok

Historický vývoj pojmu zlomok ukazuje, že porozumenie zlomkom nevzniká naraz. Každá etapa vývoja je legitímna a funkčná vo svojom kontexte. Preskakovanie etáp vedie k formálnemu, ale povrchnému zvládnutiu učiva.

Rovnaký princíp platí aj v školskej matematike. Špirálovitý návrat k pojmu zlomok na vyššej úrovni abstrakcie nie je prejavom neefektívnosti vyučovania, ale nevyhnutnou podmienkou hlbokého porozumenia.

Z tohto pohľadu môžeme tvrdiť, že vývin matematického myslenia u žiaka v oblasti zlomkov v mnohom kopíruje historický vývoj tohto pojmu v dejinách matematiky – od operátora, cez pomer, až po číslo.

Metodické odporúčania pre vyučujúceho

- V nižších ročníkoch ZŠ klásť dôraz na zlomok ako operátor a pracovať s konkrétnymi modelmi (delenie celku, meranie, reálne situácie).
- Neurýchľovať prechod k formálnym algoritmom operácií so zlomkami.
- V vo vyšších ročníkoch ZŠ systematicky prepájať rôzne významy zlomku (mnohosť – operátor – adresa).
- Zdôrazňovať, že návrat k pojmu zlomok na vyššej úrovni nie je opakovanie, ale prehĺbenie porozumenia.
- Využívať historické úlohy (napr. egyptské rozdeľovanie) ako motivačný a diagnostický nástroj.
- Pri hodnotení práce so zlomkami je potrebné dôsledne odlišovať správny výpočet od správneho porozumenia pojmu.

2.3 Didaktika matematiky ako vedná disciplína

Didaktika matematiky je **samostatná vedná disciplína**, ktorá skúma zákonitosti procesu vyučovania a učenia sa matematiky. Analyzuje

- ciele, obsah;
- metódy, prostriedky;
- výsledky vyučovania.

Predmet výskumu: vzťah učiteľa a žiaka, učebný obsah a prostriedky jeho sprostredkovania, kognitívne procesy pri osvojovaní poznatkov. Vo všeobecnosti predmetom DM je proces sprostredkovania a osvojovania matematických poznatkov.

Metódy výskumu: analýza učebníc, pedagogické experimenty, didaktické testy, pozorovanie, rozhovory so žiakmi, historicko-komparatívne štúdie. Metódy sú zamerané predovšetkým na empirické a experimentálne prístupy.

Úlohy didaktiky matematiky: objasňovať ciele matematického vzdelávania, určovať optimálny obsah, vypracúvať metódy výučby a hodnotenia, skúmať efektívnosť edukačných postupov.

Poznámka 2.3

Rozdiel od metodiky: metodika sa zameriava na konkrétne postupy vyučovania, zatiaľ čo didaktika ako veda skúma zákonitosti celého procesu a jeho teoretické základy.

Učiteľ, ktorý chápe didaktiku matematiky ako vedu, sa opiera o overené výsledky a nie iba o vlastnú skúsenosť či improvizáciu. Tým rastie profesionalita jeho práce. Ak chceme porozumieť didaktike matematiky v plnom rozsahu, musíme ju vnímať v súvislosti s inými vedami.

Obsah vyučovania matematiky na ZŠ a SŠ

Obsah školského vyučovania matematiky je výsledkom didaktickej transformácie – výberu, úpravy a usporiadania poznatkov matematiky do podoby vhodnej pre žiakov. Zohľadňuje:

1. Vekové osobitosti: pre nižšie ročníky sú typické intuitívne a názorné prístupy, pre vyššie ročníky abstrakcia a formalizácia.
2. Základná škola: prirodzené čísla, operácie, zlomky, percentá, elementárna geometria, úvod do algebry, štatistika a pravdepodobnosť.
3. Stredná škola: algebraické štruktúry, funkcie a ich grafy, planimetria a stereometria, analytická geometria, kombinatorika, diferenciálny a integrálny počet v elementárnej podobe.
4. Vertikálne prepojenie: obsah sa buduje v špirále – žiak sa k témam vracia na vyššej úrovni, čím sa rozvíja kontinuita poznania.
5. Didaktické ciele: formovanie logického myslenia, schopnosti riešiť problémy a pripraviť žiaka na praktické aj vysokoškolské využitie matematiky.

Poznámka

Dôležité je, aby učiteľ dokázal vidieť „veľkú mapu“ obsahu a ukázal žiakom zmysel jednotlivých tém v širšom kontexte matematiky a reálneho života.

Čo sa má učiť, ale aj prečo a ako

Didaktika matematiky skúma nielen čo sa má učiť, ale aj *prečo* a *ako*. Nejde teda iba o výber učiva, pojmov a algoritmov, ale o hlbšie otázky zmyslu, poradia, spôsobu sprostredkovania a očakávaného porozumenia.

Tieto tri otázky netvorí tri samostatné roviny, ale jeden prepojený didaktický celok: zvolený obsah ovplyvňuje metódy vyučovania a tie spätne určujú, aké porozumenie je u žiakov reálne dosiahnuteľné.

1. Otázka *čo učiť* súvisí s obsahovou stránkou matematiky:

- ktoré pojmy, vzťahy a postupy považujeme za základné,
- v akom poradí ich zavádzame a akú mieru presnosti od žiakov vyžadujeme.

Táto rovina je do veľkej miery daná učebnými plánmi a kurikulumom. Zároveň musíme upozorniť, že rovnaký obsah môže byť žiakmi pochopený veľmi rozdielne.

2. Otázka *prečo učiť* smeruje k cieľom matematického vzdelávania. **Matematika** nie je len nástrojom na riešenie praktických úloh, ale aj **prostriedkom rozvoja myslenia**:

- učí presne formulovať problémy, hľadať vzťahy,
- rozlišuje medzi domnienkou a istotou,
- argumentuje na základe dôkazov.

Didaktika matematiky sa preto nezaobrá iba okamžitou využiteľnosťou učiva, ale aj jeho **dlhodobým vplyvom na kognitívny rozvoj** žiaka.

Otázke *prečo učiť* sa budeme venovať v nasledujúcej kapitole a priebežne v ďalších kapitolách.

3. Otázka *ako učiť* patrí k jadrú didaktického skúmania. Didaktický proces vyučovania matematiky zahŕňa:

- výber metód, foriem práce, ktoré umožňujú zvyšovať efektívnosť matematického vzdelávania,
- návrh aj tvorbu modelov a reprezentácií, ktoré podporujú porozumenie pojmov a pomáhajú zvládnuť zložitejšie algoritmy.

Rozdiel medzi mechanickým nácvikom a zmysluplným učením spočíva práve v spôsobe, akým je učivo sprostredkované.

Didaktika matematiky preto sleduje, ako žiaci uvažujú, aké chyby robia, aké predstavy si vytvárajú a ako tieto predstavy postupne menia.

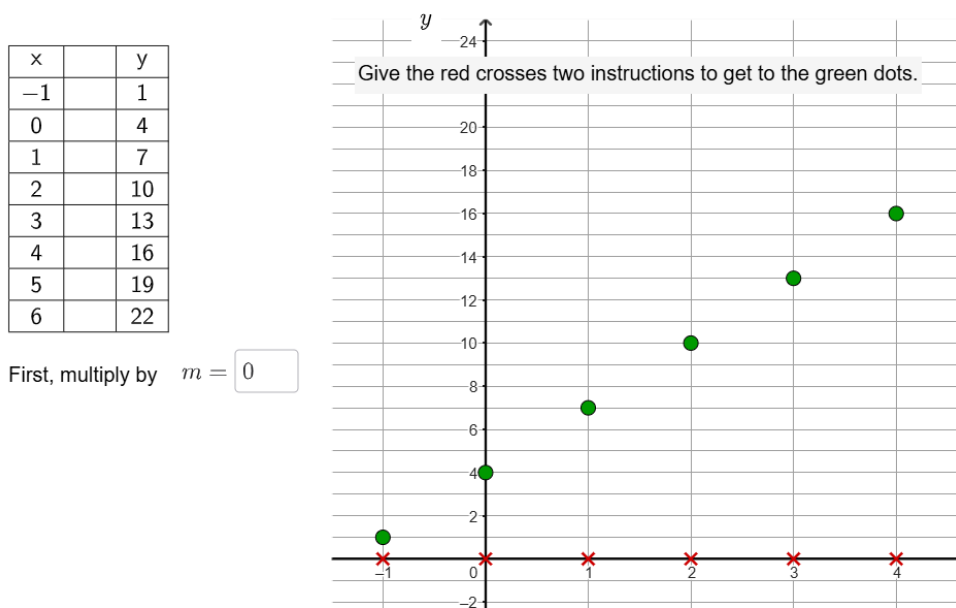
Interpretácia Čo sa má učiť, ale aj prečo a ako

Uvedieme niekoľko príkladov s prepojením na reálny život.

Príklad: Lineárne funkcie

Nie grafy, ale vzťahy

Pri vyučovaní lineárnych funkcií nejde len o kreslenie priamok, ale o pochopenie vzťahu medzi dvoma veličinami. Rovnica $y = ax + b$ opisuje, ako sa jedna veličina mení v závislosti od druhej. Nasledujúci applet ilustruje túto myšlienku.



Obr. 2.2: Lineárna funkcia

Applet je dostupný na: <https://www.geogebra.org/m/zeqcunfr>

Cieľom práce s appletom nie je nájsť čísla a a b mechanicky, ale porozumieť významu jednotlivých krokov ako modelu vzťahu medzi veličinami.

Práca s appletom. V applete (obr. 2.2) sú červené krížiky priradené k jednotlivým hodnotám premennej x . Zelené body predstavujú výsledné hodnoty premennej y .

- Vašou úlohou je pomocou **dvoch opakovaných výpočtových krokov** (s možnosťou iterovať tieto 2 kroky) presunúť červené krížiky do polohy zelených bodov. Kroky pre iterácie:
 1. zadajte m a stlačte Enter,
 2. zadajte b a stlačte Enter,
 3. „try again“ - iterujte až dôjdete k požadovanému výsledku.
- Každý krok predstavuje jednu operáciu, ktorá sa vykonáva so všetkými hodnotami rovnako.

- Vyriešte ďalšie úlohy zo stránky <https://www.geogebra.org/m/zeqcunfr>.

Pomocné otázky pre žiakov:

1. Ako sa mení hodnota y , keď sa hodnota x zväčší o 1?
2. Ktorý výpočtový krok zodpovedá násobeniu premennej x ?
3. Ktorý krok predstavuje posun grafu nahor alebo nadol?
4. Viete zapísať vzťah medzi x a y pomocou rovnice?

Zovšeobecnenie. Na základe pozorovania určte predpis funkcie v tvare

$$y = ax + b.$$

Prípadný mikro-dialóg pri práci s appletom

Žiak: Zelené body sú pevne umiestnené. Červené zmenia polohu ak zadám číslo m ?

Učiteľ: Áno, ale úloha spočíva v nájdení vhodného čísla m .

Žiak: Takže ide o to, čo sa stane s červenými bodmi, ak zmením číslo x urobí?

Učiteľ: Presne tak. Skús povedať, čo sa stane s hodnotou y , keď sa x zväčší o 1.

Sleduj tabuľku vľavo.

Žiak: Zdá sa, že hodnoty v stĺpci pre y sa každé zväčší o 3.

Učiteľ: A to je veľmi dôležitá informácia. Čo nám to hovorí o vzťahu medzi x a y ?

Žiak: Že sa nemenia náhodne, ale pravidelne?

Učiteľ: Presne. A práve toto pravidlo sa snažíme zapísať rovnicou.

Graf je len spôsob, ako toto pravidlo vidíme.

Po takomto experimentovaní by učiteľ mohol uviesť vhodnú interpretáciu z reálneho života, ktorý zodpovedá modelovej matematickej situácii z obrázka 2.2. Uvádžeme možnú reálnu situáciu.

Reálna situácia

Cena služby

Učiteľ: Predstavme si, že ide o cenu taxi služby.

- Premenná x označuje počet kilometrov jazdy.
- Premenná y označuje celkovú cenu v eurách.

Taxi má:

- nástupný poplatok 4 €,

- cenu 3 € za každý kilometer.

Učiteľ: Úlohou žiakov je:

1. opísať slovami, ako sa cena mení so vzdialenosťou,
2. určiť, ktorý krok v applete zodpovedá nástupnému poplatku,
3. určiť, ktorý krok zodpovedá cene za kilometer,
4. zapísať vzťah medzi vzdialenosťou a cenou pomocou rovnice.

$$y = 3x + 4$$

Didakticky je dôležité, aby žiak nevidel graf len ako geometrický objekt, ale ako model situácie: rast nákladov, závislosť ceny od množstva, alebo vzťah medzi časom a dráhou pri rovnomernom pohybe.

Cvičenie. Nasledujúce úlohy rozpracujte podobne ako úlohu o lineárnej rovnici.

Podobný didaktický problém, aký sa objavuje pri lineárnej funkcii, nachádzame aj pri zavádzaní zlomkov: žiak môže zvládnuť postup, no bez porozumenia vzťahu medzi časťou a celkom zostáva poznanie formálne.

Úloha: Zlomky

Viac než „počítanie s koláčmi“.

Zlomky sa v škole často motivujú delením koláča alebo pizze. Didakticky však nejde primárne o jedlo, ale o budovanie predstavy *vzťahu časti a celku*. Táto predstava sa neskôr prenáša do práce s mierami, percentami, hustotou, rýchlosťou či pravdepodobnosťou.

Ak žiak chápe zlomok len ako symbolický zápis, dokáže síce vykonať algoritmus, no má ťažkosti pri interpretácii výsledku. Didaktická otázka preto neznie, či vie žiak zlomky sčítavať, ale či rozumie tomu, *čo sa v skutočnosti sčítava*.

Reálny presah: pomery v recepte, podiel práce, percentuálne zľavy, pravdepodobnosť.

Úloha: Negatívne čísla

Skúsenosť, nie pravidlo.

Záporné čísla nie sú len formálnym rozšírením číselnej osi. Predstavujú nový typ myslenia, v ktorom sa pracuje s opačnosťou, smerom a kompenzáciou.

Didakticky je dôležité, aby žiak mal skúsenosť so situáciami, kde záporné čísla dávajú zmysel: dlh a kredit, teplota pod nulou, zmena výšky alebo posun v opačnom smere. Bez tejto skúsenosti sa pravidlá pre sčítanie a násobenie záporných čísel javia ako umelé a nezrozumiteľné.

Dôkaz

Nie formalizmus, ale istota.

Matematický dôkaz sa v škole často vníma ako formalizmus bez praktického významu. Z didaktického hľadiska však ide o kľúčový nástroj rozlišovania medzi tým, čo „funguje v niekoľkých prípadoch“, a tým, čo platí vždy.

Dôkaz učí žiaka, že presvedčenie nestačí, ak nie je podložené argumentmi. Tento spôsob myslenia má presah aj mimo matematiky: do prírodných vied, techniky a kritického hodnotenia informácií.

Didaktika matematiky sa preto nezaobrá len výberom učiva, ale skúma hlbší zmysel vyučovania: aké predstavy si žiaci vytvárajú, ako sa ich myslenie vyvíja a aké nástroje učiteľ používa, aby tento vývoj podporil.

Otázky *čo*, *prečo* a *ako* sú v matematickom vzdelávaní neoddeliteľné a tvoria základ didaktického uvažovania.

Kapitola 3

Vedecké poznávanie vo vyučovaní matematiky

Didaktické ciele kapitoly

Po absolvovaní kapitoly by mal študent učiteľstva matematiky:

1. rozumieť analógii medzi vedeckým poznávaním (pozorovanie – hypotéza – overenie – zovšeobecnenie) a procesom učenia sa matematiky v triede,
2. vedieť plánovať problémové vyučovanie tak, aby žiak prešiel od skúmania k argumentácii,
3. poznať a cielene používať heuristické stratégie a typické učiteľské otázky,
4. účelne využívať vizualizáciu a IKT (GeoGebra, Moodle) ako podporu experimentovania a formulovania dôkazov.

Úvod

Vedecké poznávanie možno chápať ako sled metodických krokov, v ktorom sa z pozorovania a experimentovania postupne rodia hypotézy, tieto sa overujú, korigujú a nakoniec zovšeobecňujú do teórií. Analogicky vo vyučovaní matematiky učiteľ vedie žiakov od problémovej situácie k formulovaniu predpokladov, ich skúmaniu, k dôkazom a aplikáciám. Takýto prístup nielen rozvíja matematické myslenie, ale zároveň napodobňuje proces poznávania v samotnej matematike.

Názornosť v matematike má významné miesto vo vyučovaní: **vizualizácia**, teda názorné znázorňovanie matematických štruktúr. Už Euklides zdôrazňoval kreslenie obrazcov ako súčasť dôkazu a moderné technológie tento princíp posúvajú ďalej – umožňujú žiakovi nielen sledovať obrázok, ale aj dynamicky manipulovať s objektmi.

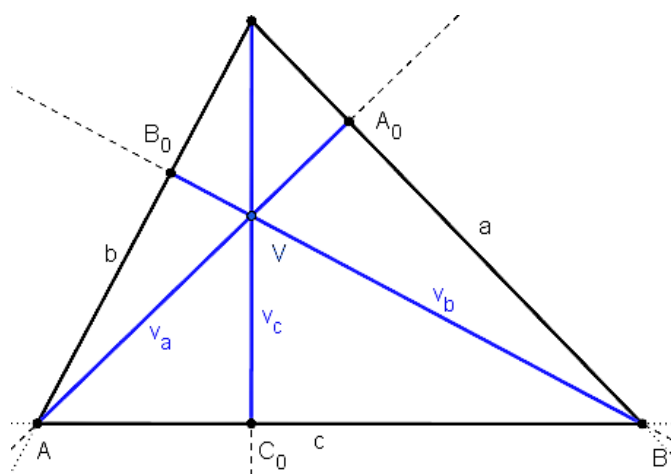
Zameranie kapitoly

V kapitole sledujeme prepojenie vedeckého poznávania s vyučovaním matematiky najmä prostredníctvom problémového vyučovania a heuristických stratégií. Konkrétne sa zameriame na:

1. fázy bádateľského cyklu a ich analógiu vo vyučovaní matematiky,
2. problémové vyučovanie a jeho metodické postupy,
3. heuristické stratégie a typické učiteľské otázky,
4. možnosti IKT podpory (Moodle, GeoGebra) na konkrétnych príkladoch.

Didaktická poznámka

Názornosť a problémovosť sa nedajú vnímať izolovane – učiteľ vytvára pre žiakov „mikromodel“ vedeckého bádania. Pri probléme „Kde sa pretínajú výšky trojuholníka?“ môže žiak najprv pozorovať, potom experimentovať (GeoGebra), vysloviť hypotézu a nakoniec dôjsť k dôkazu (porovnaj obr. 3.1). Takto sa krokmi približuje k metodológii matematiky ako vedy.



Obr. 3.1: Priesečník výšok, applet si otvoríte [Tu](#).

3.1 Vedecké poznávanie a jeho analógia vo vyučovaní matematiky

Charakteristickou črtou vedeckého poznávania je proces systematického skúmania, dôslednej analýzy a následného vysvetľovania javov a vzťahov vo svete. V matematike a didaktike matematiky ide o spôsob, ako systematicky zisťovať pravidlá, princípy a postupy, ktoré umožňujú

efektívne vyučovanie a učenie sa. Cieľom tejto sekcie je ukázať, ako sa metódy vedeckého skúmania dajú analogicky uplatniť vo vyučovaní matematiky.

Proces skúmania v matematike sa v školskom prostredí neprejavuje formálnymi dôkazmi, ale spôsobom kladenia otázok, hľadania vzťahov, overovania tvrdení a práce s chybou.

Empirické overenie a matematická istota

V školskom experimente (napr. v GeoGebre) môžeme získať vysokú mieru presvedčenia, že tvrdenie platí. Ide však o *empirickú istotu* založenú na pozorovaní mnohých prípadov. Matematická istota vzniká až vtedy, keď žiak dokáže vysvetliť, *prečo* tvrdenie platí vždy. Úlohou učiteľa je preto viesť žiaka od experimentu k argumentácii a podľa úrovne aj k dôkazu.

Úlohou učiteľa nie je sprostredkovať hotové poznatky, ale vytvárať situácie, v ktorých sa žiak učí myslieť podobne ako matematik: formuluje hypotézy, skúša ich, opravuje sa a postupne spresňuje svoje predstavy.

Typická žiacka miskoncepcia

Žiaci často považujú tvrdenie za dokázané, ak sa „potvrdilo na mnohých príkladoch“. Tento spôsob uvažovania je prirodzený, ale v matematike nestačí. Didaktickou úlohou učiteľa je oceniť experiment ako zdroj hypotézy, no zároveň dôsledne odlišovať *overenie* od *zdôvodnenia*.

3.1.1 Fázy vedeckého poznávania

Vedecké skúmanie možno rozdeliť do niekoľkých fáz, ktoré sú užitočné aj pre učiteľov a študentov matematiky:

1. **Formulácia problému alebo výskumnej otázky** – určenie presného cieľa a definovanie, čo chceme skúmať.
2. **Hypotéza alebo predpoklad** – predpoklad, ktorý je možné testovať experimentom alebo pozorovaním.
3. **Zber dát** – využitie pozorovania, experimentu, dotazníkov alebo iných nástrojov na získanie relevantných informácií.
4. **Analýza dát** – spracovanie zozbieraných informácií pomocou kvantitatívnych alebo kvalitatívnych metód.
5. **Interpretácia a diskusia výsledkov** – hodnotenie a vysvetlenie zistení, identifikácia vzťahov a súvislostí.

6. **Záver a odporúčania do praxe** – formulácia záverov a odporúčaní pre ďalšie vyučovanie alebo výskum.

3.1.2 Výskumné metódy v kontexte vyučovania

Profesor Kopka navrhol viacero metód, ktoré podporujú systematické a kritické myslenie vo vedeckom poznávaní. Zdôrazňuje, že stratégia alebo taktika pri riešení problémov sa nazýva **heuristika**. Výskumný prístup pri výučbe školskej matematiky sa v značnej miere opiera o **experimentovanie**. Uvedieme použitie heuristickej metódy na jednoduchom matematickom príklade.

Experimentovanie ako heuristická stratégia

Je dané celé číslo. Vydělím ho číslom 3. K výsledku pripočítam číslo 7. Takto získané číslo ešte vynásobím číslom -2 . Výsledné číslo je -6 . Aké číslo bolo dané na začiatku?

Riešenie. Budeme experimentovať:

1. Skúsime, či by „dané číslo“ nemohlo byť napr. číslo 6 (skúšame len čísla deliteľné tromi?).
2. Vypočítame, že v tomto prípade výsledné číslo je $(2 + 7) \cdot (-2) = -18$.
3. Teda číslo 6 nemôže byť daným začiatočným číslom.
4. Zvolíme iné číslo, napr. 3 a budeme si všímať, ako sa približujeme k výsledku: dostaneme -16 .
5. Ak „nemáme šťastie“, pokračujeme v experimentovaní.

Priebežné zistenie. Experimentálne číslo sa zmenšilo o 3 a „výsledné číslo“ sa zväčšilo o 2. K výsledku (t. j. k číslu -6) sa „približujeme“. Pokračujeme v experimentovaní a výsledky zapíšeme do tabuľky.

Dané číslo	Výsledné číslo
6	-18
3	-16
0	-14
...	...

Tabuľka 3.1: Experimentálne výsledky

Pokúsme sa postup zovšeobecniť:

1. K číslu -18 je nutné 6-krát pripočítať číslo 2, aby sme získali výsledné číslo -6 .
2. K číslu 6 je nutné 6-krát odpočítať číslo 3: $6 + 6 \cdot (-3) = -12$.

Dané číslo by teda mohlo byť -12 , o čom sa presvedčíme skúškou.

Odpoveď. Na začiatku bolo dané číslo -12 . □

Experimentovanie v predchádzajúcej úlohe **nie je náhodné skúšanie**, ale **je riadené pozorovanie zmien**: zmena vstupu o -3 spôsobuje zmenu výstupu o $+2$. Žiak tak objavuje vzťah medzi veličinami, ktorý potom umožní zovšeobecnenie a spätné určenie hľadaného čísla.

Tieto všeobecné fázy a výskumné metódy sa neobmedzujú iba na akademický výskum. Pri vhodnej didaktickej adaptácii ich môžeme využiť aj v školskej matematike, kde majú potenciál viesť žiakov k aktívnemu objavovaniu a kritickému mysleniu.

Terminologická poznámka

Pojem *výskumná metóda* označuje všeobecný rámec skúmania (pozorovacia, analytická, experimentálna), kým *heuristická stratégia* sa vzťahuje na konkrétny postup alebo taktiku, ktorú žiak volí pri riešení problému (analógia, náčrt, špeciálny prípad a pod.). Vo vyučovaní sa obe roviny prirodzene prelínajú.

3.1.3 Využitie výskumných metód v školskej matematike

Celý proces poznávania s využitím výskumných metód môžeme stotožniť so schémou:

konkretizácia (špecializácia) \rightarrow zovšeobecňovanie \rightarrow hypotéza \rightarrow zdôvodnenie / dôkaz.

Uvedená schéma je v súlade so štruktúrou separovaných a generických modelov (Hejný) a zároveň odráža hlavné rysy problémového vyučovania v matematike na ZŠ a SŠ. Preto heuristické výskumné metódy možno výhodne využiť aj pri problémovom vyučovaní matematiky. Sú to predovšetkým:

- **Analytická metóda** – systematické rozkladanie problému, identifikácia jeho častí a vzťahov.
- **Experimentálno-pozorovacia metóda** – získavanie empirických dát o správaní a úspešnosti žiakov pri riešení úloh.
- **Historicko-porovnávací metóda** – skúmanie zmien didaktických postupov v čase; ukazuje vývoj matematického myslenia.
- **Matematická modelácia** – využitie modelov na kvantifikáciu vzťahov, napr. medzi typom úlohy a úspešnosťou žiakov.

3.1.4 Heuristické stratégie vo vyučovaní matematiky

Heuristické stratégie predstavujú osvedčené postupy, ktorými sa žiak alebo učiteľ usiluje o riešenie problémovej úlohy. Ich význam spočíva v tom, že poskytujú nástroje na prekonanie

tzv. *blokad v myslení*, keď priama cesta k riešeniu nie je zrejmá. Učiteľ môže tieto stratégie nielen uplatňovať, ale aj reflektovať spolu so žiakmi, čím rozvíja metakogníciu – schopnosť „učiť sa učiť“.

Príklady stratégií.

- **Analógia** – hľadanie podobnosti medzi novou úlohou a už riešenou situáciou.
- **Špeciálny prípad** – skúmanie jednoduchšej alebo hraničnej situácie.
- **Náčrt** – vizualizácia problému pomocou obrázku, grafu alebo schémy.
- **Experimentovanie** – skúšanie viacerých možností a sledovanie vzorcov či pravidielností.
- **Algoritmizácia** – systematizovanie postupu do krokov alebo pravidiel.
- **Rozklad problému** – dekompozícia na menšie, ľahšie riešiteľné podproblémy.

Prepojenie s metakogníciou. Učiteľ, ktorý pracuje s heuristickými stratégiami, vedie žiakov k uvedomovaniu si *ako uvažujú*: ktoré stratégie im pomohli a ktoré boli menej účinné. Žiaci sa učia plánovať kroky, sledovať priebeh riešenia a spätne hodnotiť vlastné myslenie.

3.1.5 Analógia s problémovým vyučovaním

Vedecké poznávanie a problémové vyučovanie sú príbuzné procesy:

- začínajú identifikáciou problému,
- vyžadujú tvorbu hypotéz a predpokladov,
- spoliehajú sa na pozorovanie a experiment,
- končia analýzou, interpretáciou a závermi.

Ukážka: Súčet prvých n nepárnych čísel

Majme určiť súčet prvých n nepárnych čísel.

Riešenie.

- **Špeciálny prípad:** pre $n = 1$: $1 = 1^2$, pre $n = 2$: $1 + 3 = 4 = 2^2$, pre $n = 3$: $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$.
- **Experimentovanie:** pre $n = 4$: $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$.
- **Náčrt:** rastúci štvorec z jednotkových štvorcíkov (1, potom 3 okolo, potom 5 okolo, ...).

Záver: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. □

Metodická poznámka

Úloha je vhodná na ukážku viacerých heuristických stratégií v praxi. Učiteľ môže viesť diskusiu tak, že nechá žiakov najprv vypočítať niekoľko *špeciálnych prípadov* a hľadať pravidelnosť. Nasleduje *experimentovanie* – skúšanie ďalších hodnôt a preverovanie hypotézy. Pri otázke „*Nepodobá sa to na niečo, čo už poznáte?*“ sa dá využiť *analógia*. Vizualný *náčrt* podporuje porozumenie a zároveň metakognitívnu reflexiu („*Ako som prišiel na tento vzorec?*“).

Typické heuristické otázky učiteľa.

1. Otázky pri fáze „hľadania“.

- Čo sa stane, ak skúsiš jednoduchší alebo špeciálny prípad?
- Vyskytuje sa podobný problém, ktorý už poznáme?
- Ako by sme situáciu znázornili na obrázku?
- Je možné rozdeliť úlohu na viac menších častí?
- Aký je ďalší krok, ktorý by si mohol urobiť?
- Ako môžeš overiť, či je tvoje riešenie správne?
- Vieš opísať, akú stratégiu práve používaš?

2. Otázky na prechod k dôkazu.

- Prečo si myslíš, že to bude platiť vždy, nie len v tomto príklade?
- Ktorý krok je v tvojom uvažovaní rozhodujúci a prečo?
- Vieš vysvetliť, čo sa v riešení *nemôže zmeniť* (čo je invariant)?
- Ako by si presvedčil spolužiaka, ktorý ti neverí?

3.1.6 Prepojenie s IKT

Informačné a komunikačné technológie (napr. GeoGebra, Moodle) umožňujú vizualizovať problémy, zbierať dáta a analyzovať výsledky žiakov, čím podporujú experimentovanie aj argumentáciu.

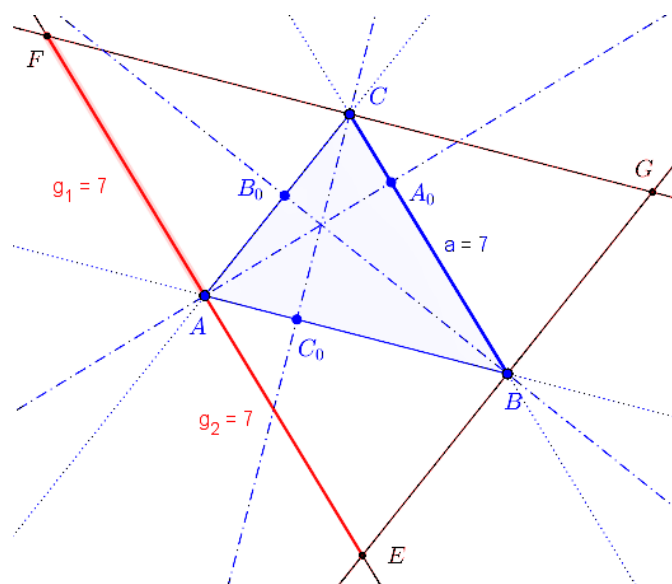
- **GeoGebra:** dynamická manipulácia s objektmi umožňuje rýchle testovanie hypotéz.
- **Moodle:** úloha typu *otvorená odpoveď* vedie žiakov k zapísaniu hypotézy a opisu postupu; učiteľ môže oceniť originálne heuristické prístupy.

Scenár využitia IKT

Učiteľ zadá (napr. v Moodle) úlohu: „Skúmajte, či sa výšky trojuholníka vždy pretínajú v jednom bode.“ Žiaci majú:

1. zostrojí trojuholník v GeoGebre a zakreslí jeho výšky,
2. v Moodle zapísať hypotézu a krátky opis postupu,
3. diskutovať vo fóre o rôznych polohách ortocentra.

Na záver učiteľ poskytne spätnú väzbu a vyzdvihne jasnú argumentáciu alebo originálny prístup (porovnaj obr. 3.2)



Obr. 3.2: Výšky v trojuholníku - dôkaz. Applet si otvoríte [Tu](#).

3.2 Problémové vyučovanie

Problémové vyučovanie predstavuje taký prístup k vyučovaniu matematiky, v ktorom sa nové poznatky odvodzujú z riešenia problémových úloh. Žiaci sú vedení k aktívnej činnosti, k objavovaniu a k hľadaniu vlastných riešení. Úlohou učiteľa nie je podať hotový poznatok, ale vhodne viesť proces riešenia problému.

Heuristické stratégie tvoria praktickú výbavu žiaka pri riešení problémov. Problémové vyučovanie je didaktické usporiadanie výučby, v ktorom sa táto výbava cielene rozvíja.

3.2.1 Didaktické ciele a význam

- rozvíja tvorivé a kritické myslenie žiakov,
- vedie k hlbšiemu porozumeniu matematických pojmov,
- podporuje motiváciu žiakov prostredníctvom otázok a výziev,
- umožňuje rozvíjať spoluprácu v skupine pri riešení.

Historická vsuvka

Thalés z Milétu (6. stor. pred n. l.) je považovaný za jedného z prvých, ktorí matematické poznatky systematicky odvodzovali z pozorovania a logickej úvahy. **Euklides** (3. stor. pred n. l.) vytvoril v *Elementoch* súbor definícií, postulátov a dôkazov a vo svojich dôkazoch využíval názorné znázorňovanie (konštrukciu obrazcov), ktoré je predchodcom dnešnej vizualizácie v softvéroch typu GeoGebra.

Kde sa pretínajú výšky trojuholníka?

V danom trojuholníku skúmajte priesečník výšok a overte, či sa všetky výšky pretínajú v jednom bode. Aktivujte applet [Ortocentrum – experiment](#).

Riešenie. Odporúčaný postup (riadené bádanie):

1. FORMULÁCIA PROBLÉMU: Zistite, či priesečníky dvojíc výšok predstavujú ten istý bod.
2. STANOVENIE HYPOTÉZY: Výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode (ortocentrum).
3. EXPERIMENTÁLNE OVERENIE: Meníte polohu vrcholov a sledujete, či sa hypotéza potvrdzuje.
4. ZOVŠEOBECNENIE: Formulujte tvrdenie a diskutujte o polohe ortocentra (vnútri, mimo, na vrchole).

□

Za problémovú považujeme úlohu vtedy, keď:

1. žiak nemá k dispozícii okamžitý algoritmus,
2. úloha umožňuje viac stratégií alebo viac ciest riešenia,
3. poskytuje priestor na hypotézu, overenie a zovšeobecnenie,
4. vedie k potrebe zdôvodniť postup alebo výsledok.

Didaktická poznámka

Žiaci týmto postupom prechádzajú „malým vedeckým procesom“: z pozorovania vytvoria hypotézu, experimentujú s jej overovaním a nakoniec dospejú k formulácii všeobecného tvrdenia. Vizualizácia tu neplní len ilustračnú funkciu, ale vytvára podmienky pre následnú argumentáciu.

3.3 Vizualizácia problému

Vizualizácia patrí medzi kľúčové heuristické stratégie riešenia problémov. Umožňuje zmeniť abstraktný problém na konkrétnejší, odhaliť vzory a podporiť diskusiu. Je však potrebné zdôrazniť, že **vizualizácia nenahrádza dôkaz** – pripravuje pôdu pre jeho formuláciu.

3.3.1 Formy vizualizácie v matematike

V didaktike matematiky rozlišujeme napr.:

- *symbolické reprezentácie* (algebraické zápisy),
- *grafické reprezentácie* (grafy, tabuľky),
- *dynamické vizualizácie* (GeoGebra, Maple),
- *pojmové mapy a schémy*.

Didaktická poznámka

Súčasná prax často trpí nedostatkom názorného zdôvodňovania. Formálne sprostredkovanie poznatkov bez vizualizácie vedie k povrchnej reprodukcii učiva. Preto je dôležité cielene rozvíjať vizualizačné stratégie a integrovať ich s modernými technológiami.

3.4 Význam a poslanie matematického vzdelávania

Počas vzdelávania sa často stretávame s problémom zdôvodnenia významu matematického vzdelávania pre potreby bežného života. Žiaci, študenti ale aj ľudia v aktívnom pracovnom prostredí kladú otázky typu

- „Načo mi je matematika?“,
- „Prečo musíme dokazovať?“
- „Prečo investovať do matematiky?“

Pritom očakávajú fundovanú či dokonca vedecky podloženú odpoveď. Žiaci často chcú „praktické využitie“, ale učiteľ ponúka viac typov legitimizácie matematiky (kognitívna, kultúrna, spoločenská).

Otázky o zmysle matematiky majú viac vrstiev: (1) praktickú, (2) kognitívnu (rozvoj myslenia), (3) kultúrnu (jazyk vedy) a (4) spoločenskú (kritické rozhodovanie). Nasledujúce dialógy ponúkajú učiteľovi možné odpovede primerané rôznym adresátom.

Dialóg 1: Žiak ZŠ – učiteľ

Žiak: Načo sa vlastne učíme zlomky? Veď kalkulačka to spočíta.

Učiteľ: Kalkulačka vie počítať, ale nevie pochopiť, čo tie čísla znamenajú. Keď sčítavaš zlomky, neučíš sa len výsledok, ale rozmýšľaš o častiach celku.

Žiak: A prečo je to dôležité?

Učiteľ: Pretože rovnakým spôsobom budeš neskôr premýšľať o rýchlosti, hustote alebo pravdepodobnosti. Matematika ťa učí rozumieť vzťahom, nie len počítať.

Učiteľ neargumentuje praktickým využitím, ale poukazuje na **rozvoj spôsobu myslenia**. Matematika je tu chápaná ako tréning porozumenia vzťahom.

Dialóg 2: Žiak SŠ – učiteľ

Žiak: Ja tomu verím, že to platí. Prečo to ešte musíme dokazovať?

Učiteľ: Pretože v matematike nestačí, že niečo funguje v niekoľkých príkladoch. Dôkaz nám hovorí, prečo to musí fungovať vždy.

Žiak: A na čo je to dobré?

Učiteľ: Učí ťa rozlišovať medzi domnienkou a istotou. To je presne ten rozdiel, ktorý robí poznanie vedeckým.

Dôkaz nie je cieľom sám o sebe, ale nástrojom **kultivácie argumentácie a presného myslenia**.

Dialóg 3: Štátnik – didaktik matematiky

Štátnik: Prečo by sme mali venovať toľko času matematike, keď ju väčšina ľudí v živote priamo nepoužije?

Didaktik: Pretože matematika neučí konkrétne postupy, ale spôsob, ako pracovať s problémami, neistotou a dôkazmi.

Štátnik: To nestačia digitálne nástroje?

Didaktik: Nástroje riešia úlohy. Matematika pripravuje ľudí na to, aby rozumeli dôsledkom rozhodnutí.

Matematické vzdelávanie má spoločenský význam, **rozvíja kritické a analytické myslenie**, ktoré je nevyhnutné pre informované rozhodovanie.

Vedecké poznávanie v matematike sa v ďalších kapitolách prejaví pri práci s modelmi, diagnostike porozumenia a využití umelej inteligencie ako nástroja reflexie matematického myslenia.

Záver kapitoly

V tejto kapitole sme ukázali, že vedecké poznávanie nie je pre školskú matematiku „niečo navyše“, ale prirodzený rámec, v ktorom sa rodí porozumenie: od problémovej situácie cez pozorovanie, experimentovanie a formulovanie hypotéz až po argumentáciu a (primeraný) dôkaz. Takto organizované vyučovanie vedie žiakov k tomu, aby matematiku nevnímali ako súbor pravidiel, ale ako spôsob myslenia, ktorý sa dá kultivovať a rozvíjať.

Problémové vyučovanie a heuristické stratégie predstavujú praktické nástroje učiteľa, ako tento poznávací proces cielene podporovať. Typické učiteľské otázky pritom neslúžia na „prezrádzanie“ riešenia, ale na usmernenie skúmania, pomenovanie použitých stratégií a rozvoj metakognície (učenie sa učiť). Osobitnú úlohu má vizualizácia: experiment v GeoGebre alebo iná názorná reprezentácia môže byť silným zdrojom hypotézy, no didaktickou úlohou učiteľa zostáva viesť žiakov od empirického presvedčenia k matematickej istote.

Záverečné dialógy naznačili, že otázka „prečo sa učiť matematiku“ sa v triede prirodzene spája s týmto obrazom matematiky ako poznávacieho procesu: matematika rozvíja schopnosť pracovať s problémami, presne argumentovať a rozlišovať medzi domnienkou a zdôvodneným tvrdením. Na tieto východiská nadviažu ďalšie kapitoly, v ktorých sa vedecké poznávanie prejaví pri práci s modelmi, diagnostike porozumenia a pri využití umelej inteligencie ako nástroja na reflexiu žiackeho myslenia.

Kapitola 4

Artificial Intelligence a matematika

V posledných rokoch sa umelá inteligencia (AI) stáva čoraz významnejším nástrojom v oblasti vzdelávania. Jej rozvoj neovplyvňuje len technické aspekty výučby, ale zásadným spôsobom mení aj to, ako chápeme proces učenia, vyučovania a nadobúdania poznatkov. AI dnes nevystupuje iba ako podporná technológia, ale ako systém schopný pracovať s jazykom, reprezentáciami a argumentáciou, čo sú oblasti kľúčové aj pre matematické vzdelávanie.

Matematika ako jeden z najviac štruktúrovaných a logicky usporiadaných predmetov predstavuje prirodzené prostredie pre zmysluplné využitie umelej inteligencie. Jej integrácia do vyučovania matematiky otvára nové možnosti najmä v oblastiach

1. personalizovaného učenia,
2. automatizovanej spätnej väzby a hodnotenia,
3. interaktívnych výučbových nástrojov a adaptívnych systémov.

V oblasti personalizovaného učenia dokáže AI reagovať na individuálne potreby žiakov a študentov. Na základe analýzy ich odpovedí, spôsobu argumentácie alebo typických chýb môže

1. identifikovať slabé miesta v porozumení matematických pojmov,
2. rozlíšiť medzi chybou výpočtu a chybnou predstavou,
3. navrhnúť úlohy alebo vysvetlenia zodpovedajúce aktuálnej úrovni porozumenia.

Takýto prístup je v súlade s didaktickým dôrazom na porozumenie pojmov, ktorý je v matematike dôležitejší než samotné zvládnutie algoritmov.

V oblasti hodnotenia môže AI preberať časť rutinných činností, ako je kontrola výsledkov, generovanie variantov úloh alebo poskytovanie okamžitej spätnej väzby. To umožňuje učiteľovi sústrediť sa na kvalitatívne aspekty vyučovania, predovšetkým na analýzu žiackeho myslenia, vedenie diskusie a podporu argumentácie. Dôležité však je zdôrazniť, že AI v tomto kontexte nemá nahrádzať pedagogické rozhodovanie učiteľa, ale slúžiť ako podporný nástroj.

Osobitný význam má využitie AI ako interaktívneho didaktického partnera. V takomto poňatí AI nevystupuje ako autorita poskytujúca správne odpovede, ale ako prostriedok na vyvolanie otázok, pochybností a diskusie. Odpovede AI sa tak stávajú predmetom analýzy, porovnávania a kritického hodnotenia, čo je v súlade s cieľmi matematického vzdelávania.

Integrácia umelej inteligencie do vyučovania matematiky však so sebou prináša aj viaceré výzvy. Medzi najvýznamnejšie patria otázky didaktickej vhodnosti jej použitia, riziko povrchného osvojovania poznatkov a etické aspekty spojené s hodnotením a zodpovednosťou za rozhodovanie. Preto je nevyhnutné, aby bolo využívanie AI vo vzdelávaní sprevádzané jasným didaktickým zámerom a kritickou reflexiou zo strany učiteľa.

V tomto kontexte sa otvára diskusia o tom, ako môže umelá inteligencia prispieť ku kultivácii matematického myslenia, a zároveň o hraniciach jej využitia v školskom prostredí. Odpovede na tieto otázky nie sú technického, ale predovšetkým pedagogického charakteru.

4.1 Mikro-ukážky z triednej praxe

Nasledujúce mikro-ukážky ilustrujú situácie, v ktorých AI neslúži na riešenie úloh, ale na odhaľovanie a analýzu žiackeho myslenia.

Spoločným znakom uvedených mikro-ukážok je skutočnosť, že AI nevystupuje ako zdroj autoritatívnych odpovedí, ale ako prostriedok na podporu didaktického dialógu. Rozhodovanie o tom, čo je pedagogicky vhodné, zostáva vždy v kompetencii učiteľa.

Mikro-ukážka 1: Diagnostika porozumenia

Žiak vyrieši úlohu

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

a zapíše správny výsledok $\frac{11}{12}$. Na otázku učiteľa, ako k výsledku dospel, však nedokáže vysvetliť význam jednotlivých krokov.

Učiteľ požiada AI, aby vysvetlila riešenie úlohy pre žiaka 7. ročníka.

Možná odpoveď AI

Pri sčítaní zlomkov $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{4}$ musíme najprv nájsť spoločného menovateľa. Spoločným menovateľom čísel 3 a 4 je 12.

Zlomok $\frac{2}{3}$ preto rozšírime na $\frac{8}{12}$ a zlomok $\frac{1}{4}$ na $\frac{3}{12}$. Potom už len sčítame čitatele:

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}.$$

Výsledok sčítania je teda $\frac{11}{12}$.

Didaktická interpretácia: AI neposkytuje hodnotenie žiaka, ale vytvára podnet na rozlíšenie medzi správnym výsledkom a porozumením pojmu.

Následne učiteľ so žiakmi spoločne analyzuje odpoveď AI a **kladie otázky**.

- Kde sa v tomto vysvetlení objavuje význam zlomku?
- Čo v tomto vysvetlení znamená zlomok $\frac{2}{3}$? Je to časť celku alebo výsledok výpočtu?
- Prečo práve spoločný menovateľ 12? Súvisí to s významom zlomku alebo len s pravidlom?
- Rozumieme z tohto vysvetlenia, čo vlastne sčítavame?
- Vedeli by ste tento postup vysvetliť pomocou obrázka alebo modelu? Pozrite si generický model [Tu](#).

Odpoveď AI je formálne správna a algoritmicke presná, no pracuje so zlomkami výlučne ako so symbolmi, nie ako s reprezentáciami častí celku. Práve táto vlastnosť robí odpoveď AI vhodným východiskom na diskusiu o rozdiel medzi správnym výsledkom a správnym porozumením.

Mikro-ukážka 2: Modely reálnych čísel

Učiteľ požiada AI o návrh modelu na vysvetlenie pojmu reálne číslo. AI navrhne číselnú os, meranie dĺžky alebo teplotnú stupnicu.

Úlohou žiakov je:

- určiť, či ide o separovaný alebo generický model,
- pomenovať, ktorú vlastnosť reálnych čísel model zvyrazňuje,
- rozhodnúť, v ktorom momente by mal učiteľ model opustiť.

Didaktická interpretácia: AI generuje modely, ale didaktické rozhodnutie o ich vhodnosti zostáva v rukách učiteľa.

Mikro-ukážka 3: Chyba ako zdroj informácie

Žiak tvrdí, že

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}.$$

Učiteľ požiada AI, aby vysvetlila, v čom žiak urobil chybu, a navrhla otázky, ktoré by mu pomohli chybu pochopiť.

So žiakmi následne diskutuje:

- Či navrhnuté otázky smerujú k pochopeniu pojmu zlomku,
- alebo len k oprave výsledku.

Didaktická interpretácia: AI pomáha simulovať diagnostický rozhovor, ktorý by inak vyžadoval veľa času a skúseností.

4.2 Možnosti využitia AI v didaktike matematiky

Didaktické ciele

Po absolvovaní tejto časti by mal študent učiteľstva matematiky:

1. rozumieť možnostiam a hraniciam využitia umelej inteligencie v matematickom vzdelávaní,
2. chápať AI ako didaktický nástroj podporujúci porozumenie, nie ako náhradu matematického myslenia,
3. vedieť využiť AI pri práci s modelmi, diagnostike porozumenia a reflexii žiackych riešení,
4. kriticky posúdiť vhodnosť použitia AI v konkrétnych vyučovacích situáciách.

Východiská využitia AI v didaktike matematiky

Umelej inteligencii nemožno v súčasnom vzdelávaní rozumieť len ako ďalšiemu digitálnemu nástroju podobnému kalkulačke či dynamickému softvéru. Jej potenciál spočíva predovšetkým v práci s jazykom, reprezentáciami a argumentáciou, teda v oblastiach, ktoré sú pre didaktiku matematiky kľúčové.

V tejto publikácii sa AI nechápe ako prostriedok nahrádzajúci matematické myslenie žiaka, ale ako **didaktický sparringpartner**. Jej úlohou nie je poskytovať hotové odpovede, ale vytvárať priestor na analýzu, porovnávanie a reflexiu.

Tento prístup prirodzene nadväzuje na dôraz na modely, porozumenie pojmov a diagnostiku žiackeho myslenia, ktoré boli systematicky rozvíjané v predchádzajúcich kapitolách.

4.2.1 AI vo vzdelávaní a jazykové modely v matematike

Rozvoj umelej inteligencie v posledných rokoch priniesol do vzdelávania nové typy nástrojov, ktoré dokážu pracovať s prirodzeným jazykom, analyzovať odpovede používateľov a generovať nové reprezentácie matematických úloh. Z pedagogického hľadiska nejde len o technologickú inováciu, ale o zmenu spôsobu, akým možno organizovať proces učenia a vyučovania.

Vo vzdelávaní možno úlohu umelej inteligencie chápať v niekoľkých rovinách. AI môže vystupovať ako

- **tutoriálny systém**, ktorý poskytuje vysvetlenia a spätnú väzbu,
- **didaktický partner**, ktorý vstupuje do dialógu so žiakom alebo študentom,
- **nástroj pre učiteľa**, ktorý podporuje prípravu výučby a tvorbu didaktických materiálov.

Najmä posledná z uvedených rovín je v súčasnosti pedagogicky veľmi významná. Jazykové modely dokážu generovať matematické úlohy, návrhy vysvetlení alebo alternatívne formulácie pojmov, čo môže učiteľovi pomôcť pri príprave diferencovaných aktivít pre žiakov s rôznou úrovňou porozumenia.

Z didaktického hľadiska však tieto nástroje nemožno chápať ako zdroj hotových riešení, ale ako **prostriedok na podporu reflexie a analýzy**. Odpoveď AI predstavuje jednu z možných reprezentácií matematického problému, ktorú je potrebné interpretovať a kriticky posúdiť.

4.2.2 Didaktický potenciál jazykových modelov

Jazykové modely umožňujú pracovať s matematikou spôsobom, ktorý spája symbolické vyjadrenie s prirodzeným jazykom. Práve táto vlastnosť je pre didaktiku matematiky mimoriadne dôležitá, pretože matematické porozumenie sa neprejavuje len v správnom výsledku, ale aj v schopnosti vysvetliť postup riešenia a interpretovať jeho význam.

V pedagogickej praxi možno jazykové modely využívať najmä v týchto oblastiach:

1. Generovanie matematických úloh

AI môže navrhovať varianty úloh rôznej náročnosti, čím podporuje diferenciáciu vyučovania. Učiteľ môže rýchlo pripraviť viacero verzií rovnakého typu úlohy alebo vytvoriť slovné úlohy v rôznych kontextoch.

2. Alternatívne vysvetlenia pojmov

AI dokáže formulovať viacero spôsobov vysvetlenia rovnakého matematického pojmu. Učiteľ tak môže porovnávať rôzne formy vysvetlenia a diskutovať so žiakmi o ich presnosti a zrozumiteľnosti.

3. Analýza žiackych riešení

Zadaním typickej chyby do AI možno simulovať diagnostický rozhovor, ktorý by inak vyžadoval veľké pedagogické skúsenosti. Takýto postup môže pomôcť pri identifikovaní miskoncepcií a chybných predstáv žiakov.

4. Reflexia matematickej argumentácie

Študenti učiteľstva môžu analyzovať odpovede AI a diskutovať o tom, či dané vysvetlenie skutočne vedie k porozumeniu matematickému pojmu.

4.2.3 Potenciálne prínosy využitia AI

Pri vhodnom pedagogickom využití môže AI priniesť viacero pozitívnych efektov pre vyučovanie matematiky.

- **Podpora diferenciacie** AI umožňuje generovať úlohy rôznej náročnosti a reagovať na individuálne potreby žiakov.
- **Okamžitá spätná väzba** Digitálne systémy môžu žiakom poskytovať rýchlu informáciu o správnosti riešenia a naznačiť ďalšie kroky.
- **Podpora reflexie** Odpovede AI sa môžu stať predmetom diskusie, porovnávania a kritickej analýzy.
- **Efektívnejšia príprava učiteľa** Automatizácia niektorých rutinných činností môže uvoľniť čas pre pedagogickú prácu s triedou.

Tieto prínosy však nevznikajú automaticky. Ich realizácia závisí od didaktického kontextu, v ktorom je AI používaná.

4.2.4 Riziká a obmedzenia využívania AI

Popri uvedených prínosoch je potrebné zohľadniť aj obmedzenia umelej inteligencie v matematickom vzdelávaní.

Jedným z najvýznamnejších problémov je skutočnosť, že jazykové modely pracujú na princípe pravdepodobnostného generovania textu. Ich odpovede môžu byť formálne presvedčivé, ale obsahovo nepresné alebo didakticky nevhodné.

Ďalším rizikom je možnosť, že žiaci začnú AI používať ako náhradu vlastného premýšľania. Takéto využitie môže viesť k povrchnému osvojovaniu matematických postupov bez hlbšieho porozumenia pojmov.

Z pedagogického hľadiska preto platí zásada, že AI by mala byť využívaná predovšetkým ako **podnet na diskusiu a analýzu**, nie ako autoritatívny zdroj riešení.

Didaktická zásada

AI by v matematike nemala nahrádzať proces riešenia úloh. Jej pedagogická hodnota spočíva v tom, že umožňuje analyzovať rôzne reprezentácie riešenia a diskutovať o ich významoch.

4.2.5 AI ako didaktický sparingpartner

V kontexte tejto monografie chápeme AI predovšetkým ako **didaktického sparingpartnera**. Odpoveď umelej inteligencie nie je cieľom vyučovania, ale východiskom pre ďalšiu prácu so žiakmi alebo študentmi učiteľstva.

Takýto prístup je v súlade s koncepciou matematického vzdelávania založeného na

- práci s modelmi,
- diagnostike žiackeho myslenia,
- argumentácii a diskusii o matematických pojmoch.

Správne využitá AI tak môže podporiť reflexiu matematických reprezentácií a prehĺbiť porozumenie pojmov. Rozhodujúce pedagogické rozhodnutia však vždy zostávajú v rukách učiteľa.

Čo AI v matematike nerobí

AI by v didaktike matematiky nemala:

- nahrádzať riešenie úloh za žiaka,
- poskytovať hotové riešenia bez vysvetlenia,
- obchádzať proces porozumenia prostredníctvom mechanického kopírovania odpovedí.

Takéto použitie síce môže viesť k správnejmu výsledku, no je v rozpore s cieľmi matematického vzdelávania, ktoré sú založené na budovaní pojmov, argumentácie a schopnosti vysvetľovať.

AI ako didaktický sparingpartner

Základnou myšlienkou využitia AI v didaktike matematiky je dialóg. Odpovede AI nie sú cieľom, ale východiskom pre ďalšiu prácu. Rovnako ako pri práci s modelmi, ani odpoveď AI nepredstavuje „pravdu“, ale jednu z možných reprezentácií, ktorú je potrebné interpretovať a kriticky posúdiť.

Metodická poznámka

AI je najefektívnejšia vtedy, keď jej odpoveď vyvolá otázku, pochybnosť alebo diskusiu. Ak odpoveď diskusiu nevyvoláva, pravdepodobne bola otázka položená didakticky nevhodne.

4.3 Konkrétne scenáre práce so študentmi (návrhy)

Scenár 1: Diagnostika porozumenia pojmu

Cieľ: Rozlíšiť správny výsledok od správneho porozumenia.

Postup:

1. Študent zadá AI riešenie úlohy (napr. so sčítaním zlomkov).
2. Požiada AI o vysvetlenie algoritmu pre sčítanie zlomkov „tak, aby vysvetleniu od AI porozumel žiak 8. ročníka ZŠ“.
3. Študent analyzuje, aký význam pojmov AI používa a kde by mohli vzniknúť miskoncepce.

Didaktický prínos:

AI môže simulovať odpoveď pre žiaka ZŠ ale aj napr. pre študenta učiteľstva matematiky.

AI dokáže simulovať situáciu žiaka ZŠ, ktorý síce dosiahne správny výsledok, ale jeho pojmové porozumenie je neúplné.

Scenár 2: AI a modely číselných oborov

Cieľ: Prehľbiť prácu s modelmi.

Postup:

1. Študent (VŠ) požiada AI o návrh modelu pre záporné čísla, zlomky alebo reálne čísla.
2. Následne posúdi, či ide o separovaný alebo generický model.
3. Diskutuje, ktoré vlastnosti model zvyrazňuje a ktoré potláča.

Didaktický prínos:

Študent sa učí hodnotiť modely z didaktického hľadiska, nie len ich preberať.

Scenár 3: Analýza žiackych chýb

Cieľ: Rozvíjať schopnosť diagnostikovať myslenie žiaka.

Postup:

1. Učiteľ alebo študent (VŠ) zadá AI typické chybné riešenie úlohy.
2. AI má pomenovať možnú chybnú predstavu a navrhnúť otázky pre žiaka.
3. Študent hodnotí, či otázky smerujú k porozumeniu alebo len k oprave výsledku.

Scenár 4: Práca s jazykom a argumentáciou

Cieľ: Rozvíjať matematickú argumentáciu.

Postup:

1. Študent požiada AI o vysvetlenie pojmu (napr. hustota, iracionalita).
2. Úlohou študenta je vysvetlenie zjednodušiť pre ZŠ alebo spresniť pre SŠ.
3. Nasleduje reflexia, čo sa zjednodušením stratilo a čo zostalo zachované.

Záver

AI môže podporiť tvorbu diferenciovaných úloh, návrh reflexných otázok a spätnú väzbu k vysvetleniu. Nemala by však samostatne hodnotiť porozumenie ani nahrádzať pedagogické rozhodovanie učiteľa.

V kontexte tejto publikácie AI nepredstavuje nový začiatok, ale pokračovanie už vybudovanej didaktickej filozofie: práce s modelmi, dôrazu na porozumenie a diagnostiky žiackeho myslenia. Správne využitá AI môže matematické vzdelávanie kultivovať, nie nahrádzať.

Kapitola 5

Slovné úlohy

Úvod

Slovná úloha predstavuje v školskej matematike osobitný typ činnosti, pri ktorej žiak nepracuje iba s číslami a symbolmi, ale predovšetkým s významom. Nestačí poznať matematický postup; treba porozumieť textu, rozpoznať vzťahy medzi údajmi, rozhodnúť, čo je dôležité, a až potom vytvoriť matematický model situácie.

Práve v tomto spočíva didaktická hodnota slovných úloh. Učia žiaka prechádzať od bežného jazyka k matematickému jazyku a späť. Rozvíjajú nielen počítanie, ale aj čítanie s porozumením, predstavivosť, schopnosť argumentácie a kontrolu výsledku v kontexte zadania.

Pre budúceho učiteľa matematiky je preto dôležité chápať slovné úlohy nielen ako aplikačné cvičenia, ale ako prostriedok rozvoja matematického myslenia. Otázkou nie je iba to, „ako úlohu vypočítať“, ale aj to, „ako žiak úlohu porozumie, aké reprezentácie si zvolí a kde sa pri riešení môže dopustiť chyby“.

Didaktické ciele kapitoly

Po absolvovaní kapitoly by mal študent učiteľstva matematiky:

1. rozlišovať medzi **matematickou úlohou** a **slovnou úlohou** a chápať význam jazykovej zložky pri jej riešení,
2. vedieť opísať proces **matematizácie slovnej úlohy**, teda prechod od textu situácie k matematickému modelu,
3. ovládať základné **modely vizualizácie** slovných úloh a vedieť posúdiť ich didaktickú vhodnosť na jednotlivých stupňoch školy,
4. rozlišovať medzi **jednoduchou** a **zloženou** slovnou úlohou a medzi **analytickým** a **syntetickým** spôsobom riešenia,
5. navrhovať také metodické postupy, ktoré vedú žiaka **od porozumenia textu** k samostatnej **formulácii riešenia** a slovnej odpovede.

Slovné úlohy tvoria významnú súčasť školskej matematiky. Ich riešenie prepája matematické vedomosti s bežnými životnými situáciami a zároveň rozvíja čítanie s porozumením, jazykové kompetencie, schopnosť analýzy a interpretácie vzťahov. Práve preto patria slovné úlohy k tým tematickým okruhom, ktoré sú z didaktického hľadiska mimoriadne dôležité.

5.1 Historické poznámky

Historický kontext

Už najstaršie zachované matematické texty obsahujú úlohy formulované slovne. Egypťské papyry, babylonské tabuľky aj stredoveké početnice pracovali s príbehmi o rozdeľovaní chleba, obchode, meraní alebo pohybe. Slovná úloha teda nevznikla ako doplnok „hotovej“ matematiky, ale ako prirodzený spôsob, ktorým sa matematika viazala na potreby života.

Historicky mali slovné úlohy predovšetkým praktickú funkciu. V starovekých a stredovekých textoch sa objavujú úlohy o delení zásob, výmene tovaru, meraní pozemkov alebo spoločnej práci. Postupne sa z nich stával aj didaktický nástroj: žiak nemal iba vykonať výpočet, ale musel pochopiť situáciu, rozlíšiť známe a neznáme údaje a zostaviť primeraný postup riešenia. Tento aspekt zostáva aktuálny aj v súčasnosti.

Historické ukážky

Jedným z najstarších zachovaných matematických textov je *Rhindov papyrus* (cca 1650 pred n. l.). Obsahuje zbierku praktických úloh z aritmetiky a geometrie.

Príklad 5.1: Úloha R49 - Rhindov papyrus

Príklad výpočtu obsahu obdĺžnikového poľa.
Ak pole má dĺžku 10 khet a šírku 2 khet, aký je jeho obsah?

Riešenie. Vynásob 10 a 2. Dostaneš 20 setat.

V modernom zápise ide o výpočet obsahu obdĺžnika

$$S = a \cdot b,$$

teda

$$S = 10 \cdot 2 = 20.$$

□

Úloha ilustruje praktický charakter egyptskej matematiky, ktorá vznikala najmä z potrieb merania polí a hospodárskej správy. Táto úloha ilustruje

1. jednu z najstarších foriem slovnej úlohy v dejinách matematiky,

2. prepojenie matematiky s praktickým meraním pôdy,
3. jednoduchý algoritmickej štýl riešenia.

Slovné úlohy sa riešili už v starovekom Babylone (cca 1800 pred n. l.). Na hlinených tabuľkách sa objavujú problémy určovania dĺžky a šírky poľa, keď je známy súčet strán a obsah.

Príklad 5.2: Babylon – úlohy o dĺžke a šírke poľa

Pole má tvar obdĺžnika. Súčet jeho dĺžky a šírky je 20 jednotiek a obsah poľa je 96 štvorcových jednotiek. Určte rozmery poľa.

Riešenie. V modernom zápise dostaneme sústavu

$$x + y = 20, \quad xy = 96.$$

Babylončania však takúto úlohu riešili algoritmickej, bez symbolického zápisu rovníc.

Babylonský postup riešenia Pri probléme, keď je známy súčet strán a obsah obdĺžnika, postupovali približne takto:

1. vezmi polovicu súčtu strán,

$$\frac{20}{2} = 10$$

2. umocni ju,

$$10^2 = 100$$

3. odčítaj obsah,

$$100 - 96 = 4$$

4. vezmi druhú odmocninu,

$$\sqrt{4} = 2$$

5. pripočítaj a odpočítaj výsledok k polovici súčtu:

$$10 + 2 = 12, \quad 10 - 2 = 8.$$

Dostaneme rozmery obdĺžnika 12 a 8.

V modernom algebraickom zápise možno túto úlohu zapísať ako kvadratickú rovnicu

$$x^2 - 20x + 96 = 0,$$

z ktorej vyplýva $x = 12$ a $y = 8$.

□

V európskych aritmetikách 16. storočia sa často objavovali praktické úlohy týkajúce sa merania polí a záhrad. Jedným z autorov, ktorí popularizovali aritmetiku v mestskom prostredí, bol nemecký matematik *Adam Ries* (1492–1559). V jeho učebniciach sa nachádzajú úlohy, ktoré dnes interpretujeme pomocou algebraických rovníc. Uvádžame ukážku slovnej úlohy, ktorú je vhodné použiť ako motivačnú na strednej škole.

Príklad 5.3: Adam Ries, 16. storočie

Záhrada má obdĺžnikový tvar. Jej obvod je 40 stôp a obsah je 96 štvorcových stôp. Aké sú rozmery záhrady?

Riešenie. *Riešenie v modernom zápise*

Nech x označuje dĺžku a y šírku obdĺžnika. Z podmienky o obvode dostávame

$$2(x + y) = 40,$$

teda

$$x + y = 20.$$

Z podmienky o obsahu platí

$$xy = 96.$$

Dosadením $y = 20 - x$ do druhej rovnice dostávame

$$x(20 - x) = 96,$$

$$x^2 - 20x + 96 = 0.$$

Po úprave dostaneme riešenia

$$x = 12, \quad y = 8.$$

Rozmery záhrady sú teda 12 stôp a 8 stôp. □

V zbierkach matematických úloh určených pre gymnáziá v 19. storočí sa často objavovali úlohy spájajúce geometrické a algebraické uvažovanie. Tieto zbierky sú dnes dostupné v digitálnej knižnici *DML-CZ*.

Príklad 5.4: Gymnaziálna zbierka úloh - [STU, 1877]

Obdĺnikové pole má obsah 480 čtverečných jednotek. Jeho úhlopříčka měří $\sqrt{544}$ jednotek. Určete délku a šířku pole.

Riešenie. Označme x dĺžku a y šírku poľa.

$$xy = 480$$

Pre uhlopriečku platí podľa Pytagorovej vety

$$x^2 + y^2 = 544.$$

Použijeme vzťah

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy,$$

odkiaľ

$$(x + y)^2 = 544 + 960 = 1504.$$

Riešením vzniknutej sústavy dostaneme

$$x = 24, \quad y = 20.$$

Rozmery poľa sú teda 24 a 20 jednotiek. □

Didaktický význam historických ukážok

Úlohy s historickým kontextom sú vhodné na prepojenie matematických tém:

- vzťahu medzi **geometrickými veličinami** (obvod, obsah),
- **matematizácie slovnej úlohy**,
- prechodu od **aritmetického uvažovania** k **algebraickému modelu**.

Žiaci nižších ročníkov ZŠ často riešia podobné úlohy ešte bez formálneho použitia rovníc. Využívajú napríklad systematické skúšanie alebo tabuľku hodnôt. Vo vyšších ročníkoch ZŠ a na SŠ žiaci zisťujú, že rovnaký problém sa dá zapísať pomocou matematického modelu, najčastejšie pomocou algebraických rovníc.

Historické ukážky učiteľovi umožňujú poukázať na to, že podobné praktické problémy stáli pri zrode algebry.

Diskusia o rôznych stratégiách riešenia pomáha budúcim učiteľom pochopiť, ako sa u žiakov postupne formuje prechod od aritmetického k algebraickému mysleniu.

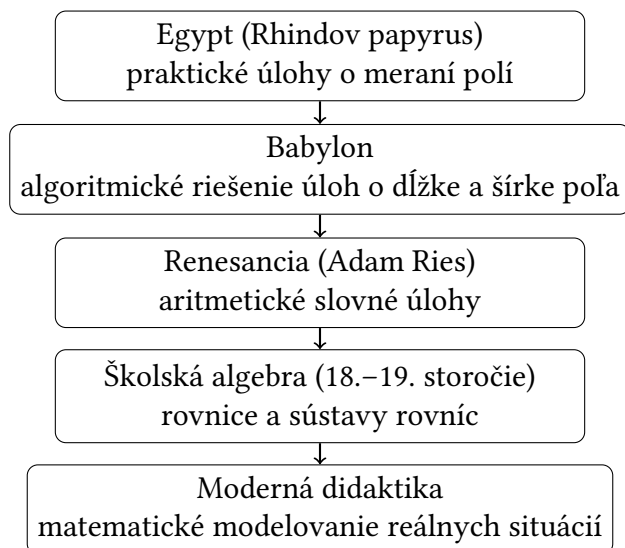
Historické ukážky zároveň naznačujú, že slovné úlohy sprevádzajú školskú matematiku od jej počiatkov a dodnes zostávajú dôležitým mostom medzi praktickou skúsenosťou a matematickým modelovaním.

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Historický kontext je vhodné využívať **motivačne**, nie encyklopedicky. Dôležitejšie než presné dátumy je ukázať, že potreba riešiť slovné úlohy vyrastá z praktických problémov.
2. V školskej matematike sa osvedčuje otázka: „Ktoré dnešné školské slovné úlohy majú blízko k historickým úlohám o delení, výmene alebo meraní?“
3. Študentov je vhodné viesť k tomu, aby historický materiál nepoužívali ako ozdobu výkladu, ale ako prostriedok na vysvetlenie, **prečo sa určitý typ úlohy v škole vôbec objavuje**.

Reflexné otázky pre študentov

1. Prečo sú slovné úlohy vhodným prostredím na prepájanie matematiky s reálnym životom?
2. V čom sa v súčasnosti slovná úloha podobá historickým úlohám a v čom sa od nich odlišuje?
3. Aké matematické pojmy alebo postupy sa v historických slovných úlohách objavujú v implicitnej forme?



Obr. 5.1: Vývoj slovných úloh v dejinách matematiky

Diagram naznačuje postupný vývoj slovných úloh od praktických výpočtov v starovekých civilizáciách k dnešnému matematickému modelovaniu reálnych situácií.

5.2 Vymedzenie pojmov

Problematika riešenia slovných úloh tvorí dôležitú časť didaktiky matematiky. Riešenie slovných úloh sa vyznačuje pomerne veľkou náročnosťou tak pre riešiteľov a žiakov, ako aj pre učiteľa pri výklade metód riešenia. V praxi býva hlavnou prekážkou úspešného riešenia slovných úloh **neschopnosť žiaka porozumieť úlohe**, pochopiť opísanú situáciu alebo výzvu, ktorú úloha kladie.

Definícia 5.1: Slovná úloha

Slovná úloha je úloha, v ktorej je závislosť medzi danými a hľadanými údajmi vyjadrená slovnou formuláciou a v ktorej riešiteľ rieši prostredníctvom matematiky určitý problém zo spoločenskej, ekonomickej alebo inej životnej oblasti.

Slovná úloha si vyžaduje jazykové porozumenie a presah do životnej skúsenosti.

Pojem slovná úloha nie je v didaktickej literatúre úplne jednotne vymedzený. V niektorých prácach sa zdôrazňuje, že ide o matematickú úlohu formulovanú slovne, v iných sa požaduje aj **presah do životnej skúsenosti človeka**. Z didaktického hľadiska je tento rozdiel dôležitý, lebo nie každá úloha zapísaná vetou má charakter slovnej úlohy.

5.2.1 Ukážka matematických úloh

Nasledujúce štyri úlohy (sú prevzaté z práce [HEJ, 2003]) možno využiť na diskusiu o tom, čo ešte budeme považovať za slovnú úlohu a čo už nie:

1. Učiteľ napísal na tabuľu rovnicu $5x + 4 = 19$ a spýtal sa triedy, či by ju niekto vedel vyriešiť.
2. Súčet dvoch čísel je 19 a ich rozdiel je 3. Ktoré sú to čísla?
3. Sestry Klára a Lenka majú dokopy 19 rokov. Klára je o 3 roky staršia ako Lenka. Koľko rokov má Klára a koľko Lenka?
4. Sestry Klára a Lenka majú dokopy 19 rokov. Klára mala 3 roky, keď sa Lenka narodila. Koľko rokov má Klára a koľko Lenka?

Pri tejto štvorici úloh sa ukazuje, že samotná slovná formulácia nestačí.

1. Prvá úloha je formulovaná vetou, ale ide o typickú symbolicky zapísanú matematickú úlohu, nie o slovnú úlohu.
2. Druhá úloha **osciluje medzi aritmetickou a slovnou** úlohou. Ani tento typ úloh nebudeme považovať za slovné. Podľa klasifikácie slovných úloh [HEJ, 2003] „budeme od slovnej úlohy požadovať, aby mala presah do životnej skúsenosti človeka“.

3. Tretia a štvrtá úloha už zreteľne opisujú situáciu, ktorú treba modelovať. Úloha 3 je statická, úloha 4 je dynamická, obidve sú **typické slovné úlohy**.

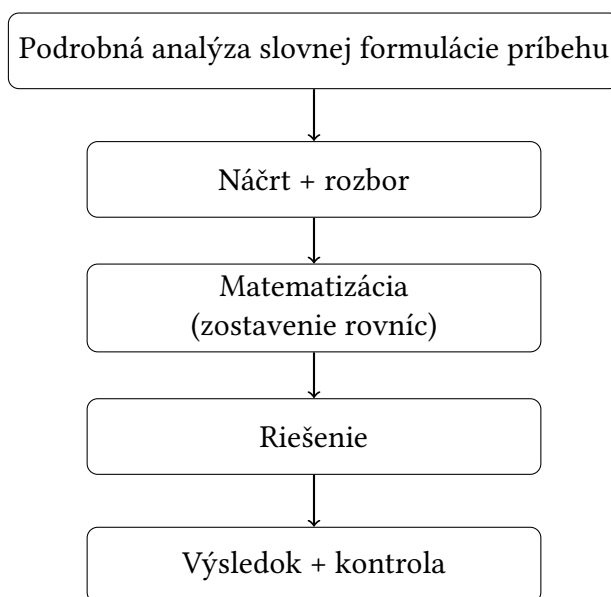
Poznámka

V školskej praxi sa často zamieňajú pojmy „príklad“ a „slovná úloha“. Je vhodné študentov upozorniť, že pojem „príklad“ označuje širšiu kategóriu; slovná úloha predstavuje taký typ zadania, v ktorom je potrebné interpretovať situáciu a preložiť ju do matematického jazyka.

5.3 Matematizácia a vizualizácia slovnej úlohy

Štruktúru slovnej úlohy tvoria tri základné časti:

1. podrobný opis situácie, v ktorej sa príbeh odohráva,
2. číselné údaje potrebné k úspešnému vyriešeniu úlohy; tieto časti nazývame **podmienky úlohy**,
3. otázka, ktorou sa pýtame na neznámy údaj, teda **požiadavka úlohy**.



Obr. 5.2: Schéma riešenia slovnej úlohy

Vyriešiť slovnú úlohu znamená previesť príbeh alebo situáciu do formalizovaného jazyka, najčastejšie do tvaru rovnice či sústavy rovníc. Tento proces schematicky znázorňuje obrázok 5.2.

Tak vzniká **matematický model úlohy**.

Prechod od slovnej úlohy k matematickej úlohe nazývame **matematizácia slovnej úlohy** [SED, 2013].

Spätňý prechod od výsledku matematického riešenia k pôvodnej situácii nazývame **interpretácia výsledku**. Postup riešenia slovnej úlohy možno chápať ako prechod od analýzy reálnej situácie cez matematický model k riešeniu a interpretácii výsledku.

5.3.1 Ukážka matematizácie

Príklad: Statická slovná úloha

Sestry Klára a Lenka majú spolu 19 rokov. Klára je o 3 roky staršia ako Lenka. Koľko rokov má Klára a koľko Lenka?

Riešenie. Na nižšom stupni vzdelávania sa pri riešení takejto úlohy často používa experimentálna metóda **pokus – omyl**. Napríklad použijú „bodkový“ model, prípadne úsečkový model. Symbolicky zapíšu:

Klára ●●●●● ●●●●●

a potom o tri bodky menej k Lenke

Lenka ●●●●● ●●

Spočítajú bodky v obidvoch radoch a zistia, že výsledok 17 je málo. Pridajú ešte po jednej bodke do každého riadku a úlohu majú vyriešenú.

Starší žiaci môžu využiť **rovnícový model**, napríklad:

$$K + L = 19, \quad K = L + 3,$$

kde K je vek Kláry a L je vek Lenky. □

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Pri výklade treba zdôrazniť, že matematizácia nie je mechanický prepis slov na symboly, ale výsledok **porozumenia situácii**.
2. Je vhodné porovnávať viacero spôsobov riešenia tej istej úlohy: aritmetický, modelový a algebraický. Študent tak lepšie uvidí, že matematizácia sa môže uskutočniť na rôznych úrovniach abstrakcie.
3. Hodnotenie žiackeho riešenia by malo rozlišovať medzi chybou vo výpočte a chybou v porozumení textu.

Reflexné otázky pre študentov

1. V ktorom momente sa zo slovnej úlohy stáva matematická úloha?

2. Aké nebezpečenstvo hrozí, ak žiaka priveľmi skoro vedieme priamo k rovnici?

5.3.2 Vizualizácia – modely

Pri riešení slovnej úlohy významnú úlohu zohráva **vizualizácia**. Vizualizácia môže mať podobu náčrtu, schémy, diagramu, tabuľky alebo úsečkového modelu. Nie je iba pomôckou k výpočtu; často sa stáva súčasťou samotného procesu riešenia.

Na vizualizáciu slovnej úlohy sa využívajú rôzne modely, ktoré žiakom umožňujú ľahšie porozumieť vzájomným vzťahom medzi objektmi skúmaného príbehu. Uvedieme štyri typy modelov, ktoré sa pomerne často používajú na 2. stupni základnej školy:

1. rovnicový alebo algebraický model,
2. tabuľkový model,
3. úsečkový model,
4. množinový model.

Použitie týchto modelov budeme interpretovať pri riešení nasledujúcej úlohy.

Príklad: Vyššie sekundárne až gymnaziálne vzdelávanie

V triede je 25 žiakov, z ktorých je 12 chlapcov. Na hodine telesnej výchovy učiteľ zistil, že 5 chlapcov vie plávať a 2 dievčatá nevedia plávať. Koľko žiakov v triede vie plávať?

Rovnicový model

Rovnicový model je vhodný skôr pre vyššie ročníky alebo pre nadanejších žiakov ZŠ. Jeho výhodou je prehľadné vyjadrenie údajov a vzťahov pomocou symbolov. V našej úlohe môžeme označiť počet plávajúcich dievčat neznámou x :

$$\begin{aligned}\text{plávajúci chlapci} &= 5, \\ \text{plávajúce dievčatá} &= x, \\ \text{neplávajúci chlapci} &= 12 - 5 = 7, \\ \text{neplávajúce dievčatá} &= 2.\end{aligned}$$

Počet dievčat v triede je $25 - 12 = 13$, teda $x + 2 = 13$, odkiaľ $x = 11$. Spolu vie plávať $5 + 11 = 16$ žiakov.

	chlapci	dievčatá	spolu
plávajú	5	x	$5 + x$
neplávajú	7	2	9
spolu	12	13	25

Tabuľka 5.1: Tabuľkový model riešenia slovnej úlohy

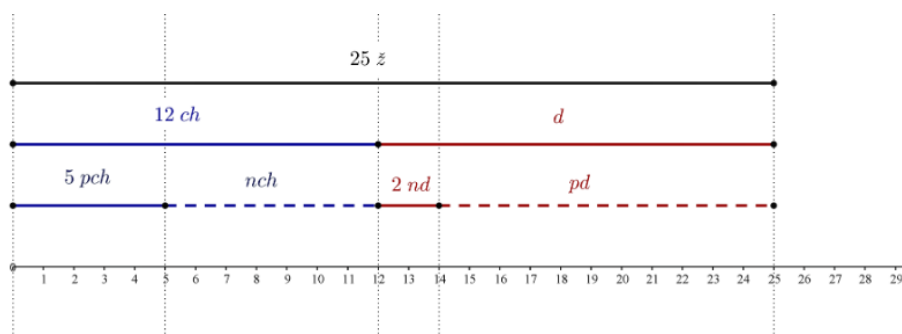
Tabuľkový model

Tabuľkový model umožňuje prehľadne zorganizovať údaje a vzťahy medzi nimi. V tomto prípade možno zostaviť tabuľku podľa pohlavia a podľa toho, či žiak pláva alebo nepláva.

Dynamickú prezentáciu tabuľky si môžete spustiť na stránke <https://www.geogebra.org/m/fsujg9p3>.

Úsečkový model

Úsečkový model patrí medzi veľmi účinné prostriedky vizualizácie, najmä pri úlohách o porovnávaní, častiach celku a veku. Pri uvedenej úlohe možno úsečkou reprezentovať celý počet žiakov a jeho rozdelenie na chlapcov, dievčatá, plávajúcich a neplávajúcich.



Obr. 5.3: Úsečkový model

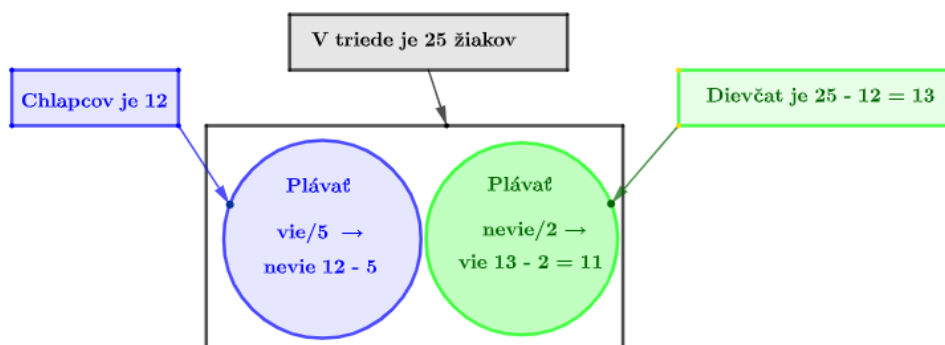
Množinový model

Množinový model využíva najmä Vennove diagramy, ktoré môžu byť upravené podľa požiadaviek zadania. Pri úlohách o spoločných vlastnostiach žiakov pomáha rozlišovať prienik a doplnok množín. V našom príklade môžeme pracovať s množinou chlapcov a s množinou plavcov.

Ak označíme množinu chlapcov Ch a množinu plavcov P , potom z údajov úlohy vyplýva

$$|Ch| = 12, \quad |P \cap Ch| = 5, \quad |D \setminus P| = 2,$$

pričom počet dievčat je 13, teda počet plávajúcich dievčat je 11.



Obr. 5.4: Množinový model

Dynamickú prezentáciu množinového modelu si môžete spustiť na stránke <https://www.geogebra.org/m/sqjpdtdt>.

Viac o využití rôznych modelov vhodných na interpretáciu slovných úloh nájdete v práci [NOV, 2004] a [HOF, 2019].

5.3.3 Špecifické modely

Slovné úlohy na priamu a nepriamu úmernosť podporujú rozvoj funkčného myslenia žiakov. Ich zaradenie sa považuje za dôležitú súčasť vyučovania matematiky, pretože vedie k pochopeniu závislosti medzi veličinami. Pri ich riešení sa využíva štandardný **model trojčlenky**.

Priama úmernosť

Príklad: Úloha - priama úmernosť

Priemerná spotreba automobilu je 6 litrov benzínu na 100 kilometrov. Akú vzdialenosť prejde automobil pri tejto spotrebe na plnú nádrž s objemom 40 litrov?

Riešenie. Závislosť medzi spotrebou benzínu a prejdenou vzdialenosťou je priama. Zapišeme trojčlenku

$$6 \text{ litrov} \leftrightarrow 100 \text{ km,}$$

$$40 \text{ litrov} \leftrightarrow x \text{ km.}$$

Dostávame

$$\frac{6}{40} = \frac{100}{x}, \quad x = \frac{40 \cdot 100}{6} \approx 666,7 \text{ km.}$$

Aktivujte si dynamický model na stránke <https://www.geogebra.org/m/ywxgcnmk>.

□

Nepriama úmernosť

Príklad: Úloha - nepriama úmernosť

Šiestim koňom vydrží zásoba sena 15 dní. Ako dlho vydrží táto zásoba sena deviatim koňom?

Riešenie. Počet koní a počet dní sú v nepriamo úmernom vzťahu. Zapišeme trojčlenku

$$6 \text{ koní} \leftrightarrow 15 \text{ dní,}$$

$$9 \text{ koní} \leftrightarrow x \text{ dní.}$$

Pretože ide o nepriamu úmernosť, dostávame

$$6 \cdot 15 = 9 \cdot x,$$

a teda

$$x = 10 \text{ dní.}$$

Aktivujte si dynamický model <https://www.geogebra.org/m/mtrueuhn>.

Kombinácia modelov

V niektorých slovných úlohách je vhodné kombinovať viacero vizualizácií. Typickým príkladom sú úlohy o veku, v ktorých sa osvedčuje spojenie tabuľkového modelu s rovnicovým modelom.

Príklad: Úloha o veku, pozrite tiež 5.4.6

Keď bude mať Katka toľko rokov, koľko má dnes Janko, bude Janko o 10 rokov starší ako je Katka dnes. Určte, o koľko rokov bol Janko starší od Katky v čase jej narodenia.

V tejto úlohe je vhodné vytvoriť tabuľkové modely pre osoby (Janko, Katka) a pre tri časové hladiny (vtedy, dnes, potom). Takéto usporiadanie pomáha rozlíšiť otvorené a skryté vzťahy medzi údajmi.

Napríklad pre otvorený výskyt (údaje priamo uvedené v zadaní) možno vzťahy vyjadriť pomocou tabuľkového modelu 5.5. Pre skrytý výskyt slúži model 5.6. Riešenie *Katka sa narodila v čase, keď mal Janko 5 rokov* nájdete v časti *Fragmentácia textu a cesta k rovnicovému modelu*.

	vtedy	dnes	potom
Katka	0	y	
Janko	x		y + 10

Obr. 5.5: Otvorený výskyt – počiatočný stav

	vtedy	dnes	potom
Katka	0	y	$y - x + 10$
Janko	x	$y + x$	$y + 10$

Obr. 5.6: Skrytý výskyt – konečný stav

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Pri úlohách o veku sa veľmi osvedčuje viesť žiakov k rozlíšeniu časových hladín „vtedy – dnes – potom“.
2. Trojčlenku netreba vyučovať ako mechanický postup; dôležité je, aby žiak vedel najprv rozhodnúť, či ide o priamu alebo nepriamu úmernosť.
3. Kombinovanie modelov je didakticky hodnotné: ukazuje, že rôzne reprezentácie tej istej situácie sa navzájom dopĺňajú.

Reflexné otázky pre študentov

1. Ktorý model je podľa vás pre žiaka na 2. stupni ZŠ najprístupnejší a prečo?
2. Pri ktorých typoch úloh by ste preferovali tabuľkový model a pri ktorých úsečkový model?

5.4 Typológia a klasifikácia slovných úloh

Slovné úlohy možno triediť z viacerých hľadísk. V didaktike matematiky nejde iba o formálne rozdelenie, ale o také triedenie, ktoré pomáha učiteľovi lepšie porozumieť povahe úlohy, predvídať typické chyby žiakov a zvoliť vhodný spôsob riešenia alebo reprezentácie.

Pri triedení slovných úloh sa najčastejšie uplatňujú tri hľadiská:

1. **matematická štruktúra úlohy**,
2. **obsahové zameranie úlohy**,
3. **náročnosť riešenia** z hľadiska počtu krokov a miery matematizácie.

5.4.1 Klasifikácia podľa matematickej štruktúry

Z hľadiska matematickej štruktúry rozlišujeme najmä úlohy:

- aditívne,

- multiplikatívne,
- proporcionálne,
- rovnicové,
- kombinatorické,
- úlohy vedúce na funkčný alebo grafický model.

Aditívne úlohy Aditívne slovné úlohy sú založené na vzťahoch typu „o koľko viac“, „o koľko menej“, „koľko spolu“, „koľko zostalo“. V nižších ročníkoch sú dôležitým východiskom pre pochopenie významu sčítania a odčítania.

Príklad: Ilustračná úloha

Marta má 12 jabĺk a Eva má o 5 jabĺk viac. Koľko jabĺk majú spolu?

Riešenie. Najprv určíme počet jabĺk Evy:

$$12 + 5 = 17.$$

Potom určíme spoločný počet:

$$12 + 17 = 29.$$

Odpoveď: Marta a Eva majú spolu 29 jabĺk. □

Multiplikatívne úlohy Multiplikatívne úlohy pracujú so vzťahmi typu „koľkokrát viac“, „rovnaké skupiny“, „delenie na časti“, „delenie podľa obsahu“. Sú základom pre pochopenie násobenia a delenia.

Príklad: Ilustračná úloha

V každom balíčku je 6 ceruziek. Koľko ceruziek je v 8 balíčkoch?

Riešenie. Počet ceruziek určíme násobením:

$$6 \cdot 8 = 48.$$

Odpoveď: V 8 balíčkoch je 48 ceruziek. □

Proporcionálne úlohy Do tejto skupiny patria najmä úlohy na priamu a nepriamu úmernosť, percentá, mierku a trojčlenku. Ich didaktický význam spočíva v rozvíjaní vzťahového a funkčného myslenia.

Rovnicové úlohy Rovnicové slovné úlohy vyžadujú vytvorenie jednej rovnice alebo sústavy rovníc. Patria sem úlohy o veku, o pohybe, o spoločnej práci, o zmesiach a mnohé ďalšie. Rovnicový model však nepredstavuje cieľ sám osebe; jeho výber má byť didakticky zdôvodnený vzhľadom na vek žiakov a charakter úlohy.

5.4.2 Klasifikácia podľa obsahového zamerania

Z obsahového hľadiska sa v školskej matematike často rozlišujú slovné úlohy:

- o veku,
- o pohybe,
- o spoločnej práci,
- o percentách a zlomkoch,
- o peniazoch, nákupoch a zľavách,
- o geometrických veličinách,
- o zmesiach a zloženiach,
- o kombinatorických situáciách.

Toto triedenie je pre učiteľa užitočné najmä preto, že jednotlivé skupiny úloh majú svoje typické jazykové konštrukcie, typické vzťahy medzi veličinami a typické chyby pri matematizácii.

5.4.3 Jednoduché a zložené slovné úlohy

Podľa náročnosti riešenia rozlišujeme:

1. **jednoduché slovné úlohy**, pri ktorých stačí jeden výpočtový krok alebo jedna základná operácia,
2. **zložené slovné úlohy**, pri ktorých treba postupovať vo viacerých nadväzujúcich krokoch.

V jednoduchej slovnej úlohe je cieľom čo najpresnejšie identifikovať známu a neznámu veličinu a určiť, ktorú početnú operáciu treba použiť. V nižších ročníkoch ZŠ sa jednoduché slovné úlohy riešia spravidla v obore prirodzených čísel a členia sa podľa dominantnej operácie.

Zloženú slovnú úlohu riešime tak, že ju postupne transformujeme na postupnosť nadväzujúcich jednoduchých slovných úloh, aby výsledok jednej jednoduchej úlohy bol východiskom pre druhú. Táto transformácia sa najčastejšie uskutočňuje dvoma spôsobmi: **analyticky** a **synteticky**. V praxi sa často využíva aj **analyticko-syntetický postup**.

Pri analytickom spôsobe riešenia začíname od otázky úlohy a formulujeme také medzikroky, ktoré vedú späť k známym údajom. Pri syntetickom spôsobe vychádzame z daných údajov a postupne skladáme cestu k neznámemu výsledku.

Riešenie zloženej slovnej úlohy možno členiť na tri fázy:

1. rozbor úlohy (čítanie s porozumením, analýza vzťahov, prípadne náčrt alebo diagram),
2. zostavenie plánu riešenia,
3. výpočet, kontrola výsledku a formulácia odpovede.

Príklad: Rôzne riešenia

Skupina 8 pretekárov prejde spolu za 7 dní na bicykli 2632 km. Koľko kilometrov prejde jeden pretekár za jeden deň, ak predpokladáme rovnaký výkon u každého zúčastneného?

Analytické riešenie

- Chceme zistiť, koľko km prejde 1 pretekár za 1 deň.
- Najprv sa pýtame, koľko km prejde 1 pretekár za 7 dní.
- Potom sa pýtame, koľko km prejde 1 pretekár za 1 deň.

To vedie k výpočtu

$$2632 : 8 = 329, \quad 329 : 7 = 47.$$

Teda jeden pretekár prejde za jeden deň 47 km.

Syntetické riešenie

Vieme, že 8 pretekárov išlo 7 dní, teda spolu ide o $8 \cdot 7 = 56$ rovnakých „výkonových jednotiek“. Jeden takýto diel predstavuje

$$2632 : 56 = 47.$$

Aj syntetické riešenie vedie k výsledku 47 km za deň.

Poznámka

Matematické operácie pri analytickom aj syntetickom riešení môžu byť rovnaké, no **postup uvažovania** je odlišný. Práve tento rozdiel je z didaktického hľadiska veľmi dôležitý.

5.4.4 Anatomický prístup k slovnej úlohe

Pri riešení slovnej úlohy je užitočné rozlišovať jej **anatóniu**, teda jednotlivé stavebné časti textu a ich funkciu v procese matematizácie. Slovná úloha nie je iba súbor viet; je to štruktúrovaný text, v ktorom jednotlivé jazykové prvky nesú rôzne druhy informácií.

Z didaktického hľadiska možno v slovnej úlohe rozlišovať najmä:

1. **kontextové jadro** – kto alebo čo v úlohe vystupuje,
2. **dané údaje** – explicitne uvedené veličiny,
3. **vzťahy medzi veličinami** – otvorené alebo skryté,
4. **časové a situačné roviny** – napr. vtedy, dnes, potom,
5. **požiadavku úlohy** – čo máme určiť.

Takéto anatomické čítanie úlohy pomáha žiakovi aj budúcemu učiteľovi uvedomiť si, že matematizácia nezačína písaním rovnice, ale rozpoznaním štruktúry situácie.

Anatomický prístup vedie študenta k tomu, aby pri každej slovnej úlohe pomenoval:

- kto alebo čo je nositeľom veličín,
- ktoré údaje sú priamo dané,
- ktoré vzťahy musíme odvodiť,
- aký model bude pre riešenie najvhodnejší.

5.4.5 Úlohy o veku ako modelový typ

Úlohy o veku tvoria osobitne významnú skupinu slovných úloh. Ich didaktická hodnota spočíva v tom, že prepájajú jazykové porozumenie, časové vzťahy, prácu s neznámou a často aj potrebu tabuľkového alebo rovnicového modelu.

Pre tieto úlohy je charakteristické:

- vystupujú v nich **časové hladiny** („vtedy – dnes – potom“),
- rozdiel vekov osôb ostáva **konštantný**,
- text často obsahuje **skryté vzťahy**, ktoré nie sú vyjadrené priamo.

Príklad: Úloha o veku

Sestry Klára a Lenka majú spolu 19 rokov. Klára je o 3 roky staršia ako Lenka. Koľko rokov má každá z nich?

Riešenie. Označme vek Lenky písmenom x . Potom vek Kláry je $x + 3$. Zo zadania dostávame rovnicu

$$x + (x + 3) = 19.$$

Po úprave:

$$2x + 3 = 19,$$

$$2x = 16,$$

$$x = 8.$$

Lenka má 8 rokov a Klára má

$$8 + 3 = 11$$

rokov. □

Táto úloha je statická. Časový vzťah sa nemení, ide o jeden časový okamih.

Príklad: Dynamická úloha o veku

Otec má dnes 40 rokov a syn 10 rokov. O koľko rokov bude otec práve dvakrát starší ako syn?

Riešenie. Nech hľadaný čas je x rokov. Potom o x rokov bude mať otec

$$40 + x$$

rokov a syn

$$10 + x$$

rokov.

Podmienka „otec bude dvakrát starší ako syn“ vedie na rovnicu

$$40 + x = 2(10 + x).$$

Po úprave:

$$40 + x = 20 + 2x,$$

$$20 = x.$$

Odpoveď: O 20 rokov bude otec práve dvakrát starší ako syn. □

5.4.6 Fragmentácia textu a cesta k rovnicovému modelu

Jednou z účinných didaktických stratégií pri náročnejších slovných úlohách je **fragmentácia textu**. Znamená to, že text úlohy nerozoberáme naraz, ale po menších významových úsekoch. Každý fragment priradujeme k určitej časti modelu: k osobe, veličine, časovej hladine alebo

vzťahu.

Tento postup je mimoriadne užitočný práve pri úlohách o veku, pretože v nich bývajú dôležité vzťahy rozptýlené vo viacerých vetách a žiaci ich ľahko prehliadnu. Fragmentácia textu nevedie priamo k výsledku, ale pomáha identifikovať tie časti zadania, ktoré nesú matematicky podstatné informácie.

Príklad: Náročnejšia úloha o veku, pozrite tiež 5.3.3

Keď bude mať Katka toľko rokov, koľko má dnes Janko, bude Janko o 10 rokov starší, ako je Katka dnes. Koľko rokov má Janko a Katka dnes?

Riešenie. Najprv rozdelíme text na významové fragmenty:

1. „Keď bude mať Katka toľko rokov, koľko má dnes Janko“
2. „bude Janko o 10 rokov starší, ako je Katka dnes“

Označme dnešný vek Janka J a Katky K .

Z prvého fragmentu vyplýva, že od dneška po daný budúci okamih uplynie

$$J - K$$

rokov.

V tom istom okamihu bude mať Janko vek

$$J + (J - K).$$

Druhý fragment hovorí, že v tomto okamihu bude Janko o 10 rokov starší, ako je Katka dnes, teda

$$J + (J - K) = K + 10.$$

Po úprave dostaneme

$$2J - K = K + 10,$$

$$2J - 2K = 10,$$

$$J - K = 5.$$

To znamená, že Janko je dnes o 5 rokov starší ako Katka. □

Samotné zadanie teda **neurčuje ich presný vek jednotlivo**, ale určuje ich vekový rozdiel. Ak by sme chceli určiť oba veku jednoznačne, museli by sme mať v zadaní ešte jednu doplňujúcu informáciu.

Tento príklad je didakticky cenný práve preto, že ukazuje, ako sa pri mechanickom riešení môže prehliadnúť skutočnosť, že úloha nemá jednoznačné riešenie pre oba veku, ale iba pre ich

rozdiel.

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Pri klasifikácii slovných úloh je vhodné prepájať formálne triedenie s analýzou ich didaktickej náročnosti.
2. Úlohy o veku sú výborným prostredím na rozvíjanie schopnosti rozlišovať medzi explicitnými a implicitnými vzťahmi.
3. Fragmentácia textu pomáha žiakovi prejsť od intuitívneho porozumenia k presnejšiemu matematickému modelu.
4. Odporúča sa porovnávať úlohy, ktoré majú jednoznačné riešenie, s úlohami, ktoré určujú iba niektorý vzťah medzi veličinami.

Reflexné otázky pre študentov

1. Ktoré triedenie slovných úloh považujete za najvhodnejšie pre učiteľa na 2. stupni ZŠ?
2. V čom sa líši obsahové triedenie slovných úloh od triedenia podľa matematickej štruktúry?
3. Prečo sú úlohy o veku didakticky náročnejšie než bežné aditívne úlohy?
4. Akým spôsobom môže fragmentácia textu pomôcť žiakovi pri zostavovaní rovnice?
5. Ako by ste vysvetlili rozdiel medzi analytickým a syntetickým riešením na konkrétnom príklade?
6. Kedy je pri slovnej úlohe vhodnejšie zostať pri aritmetickom riešení a kedy už prejsť k algebraickému modelu?

Kapitola 6

Číselné obory

6.1 Historické poznámky

Didaktické ciele kapitoly

Po absolvovaní kapitoly by mal študent učiteľstva matematiky::

1. rozlišovať medzi intuitívnym školským zavádzaním pojmu čísla a jeho abstraktnou matematickou definíciou,
2. chápať **historický vývoj** pojmu čísla ako **didaktický zdroj**, nie ako encyklopedickú informáciu,
3. vedieť vysvetliť **rozdiel** medzi pojmami **číslo a číslica** na úrovni ZŠ.

V priebehu školskej matematiky sa žiaci postupne zoznamujú so základmi aritmetiky a geometrie, dvoch najstarších matematických oblastí. V školskej matematike sa pojem čísla zavádza intuitívne, zatiaľ čo na VŠ je definovaný abstraktne (ako prvok množiny s operáciami). Tento študijný materiál je zameraný na aritmetické učivo, teda na prácu s číslami a početnými operáciami, ktoré tvoria neoddeliteľnú súčasť každodenného života. **Slovo aritmetika pochádza z gréckeho slova arithmos, čo znamená číslo.**

Definícia 6.1: Aritmetika

Aritmetika je matematická disciplína, ktorá sa zaoberá najmä rozširovaním číselných oborov a základnými početnými operáciami v týchto oboroch – sčítaním, odčítaním, násobením a delením.

Definícia 6.2: Číslo a číslica

Číslo je matematický pojem, ktorým vyjadrujeme počet, množstvo alebo poradie.
Číslica je znak, pomocou ktorého čísla zapisujeme.

V školskej matematike je **dôležité rozlišovať pojmy číslo a číslica**. V súčasnosti používame desať arabských číslic:

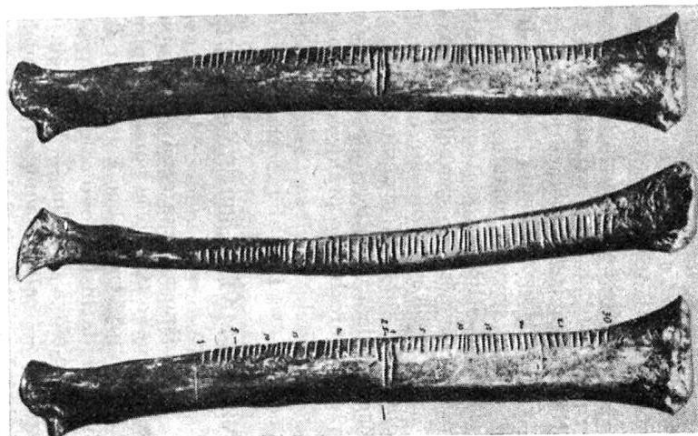
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Každá z týchto číslic môže sama o sebe vyjadrovať aj príslušné číslo. V bežnom živote tieto pojmy často nerozlišujeme, no v matematike je presné vyjadrovanie nevyhnutné. Arabské číslice majú pôvod v Indii, do Európy sa však rozšírili prostredníctvom arabských učencov a obchodníkov. Okrem slova číslica sa používa aj výraz cifra. S pojmom číslo sa stretávame aj v slovách ako numerický či číselný.

Historické ukážky vývoja číselných oborov

Pojem čísla si ľudia osvojili už veľmi dávno, ešte v období bez písomných záznamov, keď sa učili rozlišovať počet predmetov v skupinách. Spočiatku ľudia pomenúvali len malé počty a znázorňovali ich jednoduchými spôsobmi – napríklad zárezmi do dreva, uzlíkmi na povraze alebo hromádkami kamienkov. Väčšie množstvá vyjadrovali neurčito, slovom „mnoho“. S rozvojom hospodárstva, obchodu a remesiel rástla potreba presnejšieho a úspornejšieho zaznamenávania počtov, čo viedlo k vzniku číselných sústav a k zdokonaľovaniu výpočtových postupov.

O vysokej úrovni aritmetických poznatkov v staroveku svedčia napríklad egyptské papyrasy a babylonské hlinené tabuľky. Významný prínos mali aj matematici v Číne, Indii a najmä v starovekom Grécku, kde sa poznatky o číslach systematizovali a aritmetika sa postupne formovala ako vedecká disciplína. Tieto základy umožnili neskorší rozvoj ďalších oblastí matematiky. Základným stavebným prvkom aritmetiky je číslo. Hoci ľudia používali prirodzené čísla už

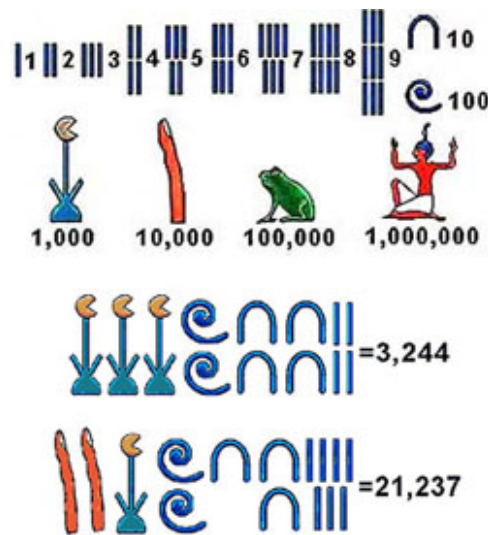


Obr. 6.1: Věstonická vrubovka

tisíce rokov, rozhodujúcim krokom pre rozvoj matematiky bol vznik desiatkovej sústavy a jej zápisu pomocou arabských číslic. Prvé predstavy o číslach pochádzajú už z dávneho obdobia staršej doby kamennej, paleolitu. Sú nerozlučne spojené s obdobím, keď na začiatku štvrtohôr

začína človek získavať pomocou nástrojov prostriedky k obžive. Za prvý dôkaz, že človek už vedel počítať sa považujú vrubovky. Pozri obrázok 6.1.

Egyptčania a Babylončania (2000 – 500 pred n. l.) používali všetky základné aritmetické operácie už v roku 2000 pred Kristom. Hieroglyfický systém pre egyptské číslice vychádzal zo sčítacích značiek používaných na počítanie. Pozri obrázok 6.2. Tento pôvod viedol k hodnotám, ktoré používali desiatinný základ, ale nezahrňali pozičný zápis. Babylončania používali šesťdesiatkový systém.



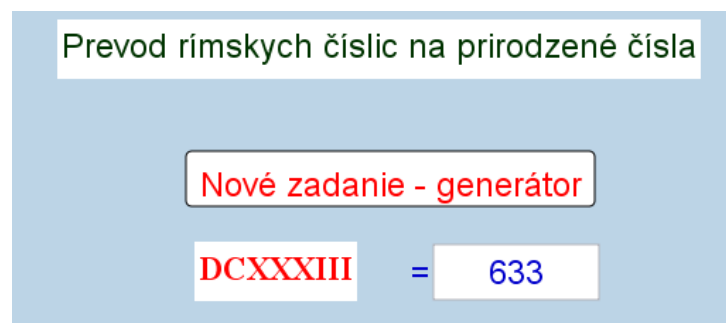
Obr. 6.2: Egyptská číselná sústava

Babylončania a Egypťania poznali základné vlastnosti operácií s prirodzenými číslami, ako je komutatívnosť, asociatívnosť a distributívnosť. Tiež skúmali niektoré vlastnosti súvisiace s deliteľnosťou v obore prirodzených čísel. Nepoznali pojem prvočíslo, nebol im známy explicitne. Ich poznatky boli **zamerané skôr na praktické výpočty a zlomky**.

Nepretržitý vývoj modernej aritmetiky nastal s érou Gréckej civilizácie. Euklides zhromaždil všetky znalosti tej doby z matematiky a napísal knihu Základy. Jeho práca obsahuje nielen geometriu, ale sú tu zhrnuté všetky výsledky bádania v oblasti matematiky. Na vznik matematických pojmov a operácií s nimi, pôsobili praktické podnety (obchod, peňažníctvo, zememeračstvo, moreplavby, astronómia...). Starovekým Grékom až do helenistického obdobia chýbal symbol pre nulu a ako číslice používali tri samostatné sady symbolov: jednu pre jednotky, jednu pre desiatky a jednu pre stovky. Pre tisícky by znovu použili symboly pre umiestnenie jednotiek atď. Algoritmus pre sčítanie, odčítanie a delenie bol rovnaký ako dnešný, len algoritmus násobenia sa mierne líšil. Komplexné výpočty s rímskymi číslicami si na získanie výsledkov vyžadovali pomoc počítacej dosky (alebo rímskeho počítadla). Pozri obrázky 6.5 a 6.4. Skoré číselné systémy, ktoré obsahovali pozičný zápis, neboli desiatkové, vrátane šesťdesiatkového (základ 60) systému pre babylonské číslice a vigezimálneho (základ 20) systému, ktorý definoval mayské číslice. Vďaka tomuto konceptu hodnoty miesta prispela možnosť opätovného použitia rovnakých číslic pre rôzne hodnoty k jednoduchším a efektívnejším metódam výpočtu.

1	I	11	XI	50	L
2	II	12	XII	100	C
3	III	13	XIII	500	D
4	IV	14	XIV	1000	M
5	V	15	XV		
6	VI	16	XVI		
7	VII	17	XVII		
8	VIII	18	XVIII		
9	IX	19	XIX		
10	X	20	XX		

Obr. 6.3: Rímske číslice



Obr. 6.4: Rímske počítadlo - aktivuj [Tu](#).

Zásadným medzníkom vo vývoji aritmetiky bolo vznik desiatkového zápisu prirodzeného čísla v v stredovekom islamskom svete.

Axiomatické budovanie aritmetiky nastalo až v 19. storočí. Základom pri výstavbe aritmetiky bol Giuseppe Peano (1858 –1932), ktorý zaviedol obor prirodzených čísel pomocou axióm. Na jeho počesť nazývame súbor Peanových axióm ako **Peanova aritmetika**.

Historický vývoj pojmu čísla je vhodným zdrojom motivačných situácií najmä na základnej škole. Budúci učiteľ by mal vedieť rozlíšiť, kedy historický príbeh podporuje porozumenie a kedy sa stáva len zaujímavosťou. Podrobnejšie k historickému vývoju aritmetiky nájdete v kurze Vybrané kapitoly z aritmetiky [Tu](#).

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Nejde o historickú exkurziu, ale o **legitimizáciu intuitívnych predstáv žiakov**.
2. Zdôrazniť, že: „Žiak neobjavuje matematiku historicky správne, ale psychologicky primerane.“
3. V seminári sa osvedčuje otázka: „Ktorá historická predstava sa podobá dnešnej detskej predstave?“

Reflexné otázky pre študentov

1. Prečo je presné rozlišovanie pojmov dôležité práve pre učiteľa?
2. Kedy môže byť história matematiky kontraproduktívna?

6.1.1 Školská matematika

Didaktické ciele

Po absolvovaní kapitoly by mal študent učiteľstva matematiky::

1. pochopiť **rozširovanie číselných oborov ako odpoveď na problém**, nie ako formálny krok,
2. vedieť identifikovať **didaktický moment zlyhania starého oboru**,
3. rozlišovať medzi **kurikulárnym faktom** („je to v osnovách“) a **didaktickým dôvodom**.

Definícia 6.3: Číselný obor

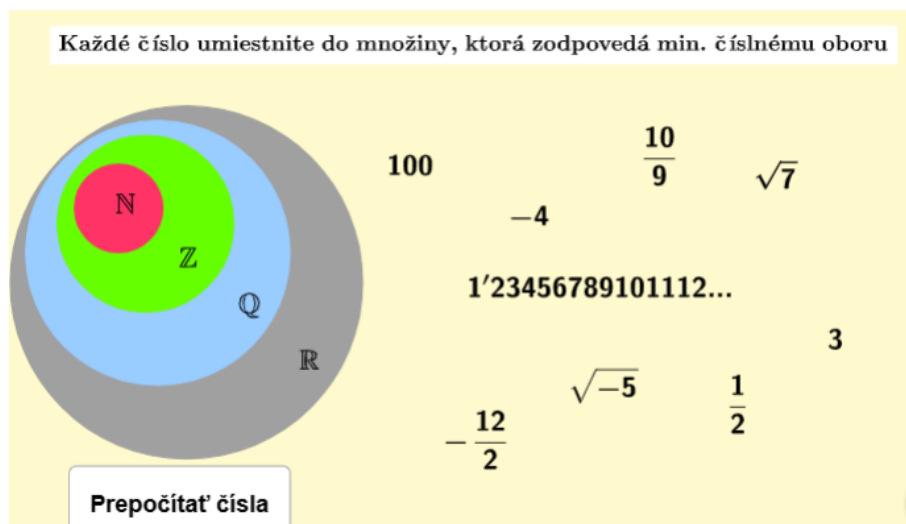
Číselný obor je množina čísel (číselná množina), na ktorej sú zavedené základné aritmetické operácie: sčítanie a násobenie.

Číselné obory zavádzame postupne:

1. Na 1. stupni ZŠ **začíname oborom prirodzených** čísel menších ako 10 000.
2. Na 2. stupni ZŠ **rozširujeme** tento obor pre čísla väčšie 10 000.
 - (a) V 6. ročníku priblížime zápis prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave; plus **desatinné čísla**.
 - (b) V 7. ročníku vybudujeme **zlomky** a operácie s nimi.
 - (c) Obor celých čísel zavádzame **pomocou záporných čísel v 8. ročníku**.
 - (d) V poslednom ročníku ZŠ sa žiaci oboznamujú s mocninami a odmocninami. Pozrite si ukážku obohatenia"z učebnice [Bero a kol.: Matematika 9; strana 9, cvičenie 1](#).
3. Obor racionálnych čísel obohatíme o **iracionálne čísla** až na SŠ. Komplexné čísla v súčasnosti tvoria nepovinný tematický okruh na SŠ. Zavádzajú sa ako množina všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel, na ktorej sú vhodne definované operácie sčítania a násobenia. Významným prvkom - komplexným číslom - je **komplexná jednotka**

$$i = (0, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

pričom platí vzťah $i \times i = i^2 = -1$.



Obr. 6.5: Číselná klasifikácia. Applet si môžete aktivovať [Tu](#).

Potrebu rozširovania číselných oborov môžeme demonštrovať **na riešení rovníc**.

1. Na prvom stupni ZŠ sa žiaci stretávajú s rovnicami, v ktorých je použitý *rámik* na označenie neznámej

$$\square + 2 = 5$$

Pri riešení rovníc tohto typu žiaci používajú metódu priameho dosadzovania/zapisovania. Do rámika \square vpisujú prirodzené čísla a zisťujú, či vzniknutá rovnosť platí. Na tomto stupni vzdelávania základnou metódou pri riešení jednoduchých lineárnych rovníc je **experimentálna metóda**.

2. Na druhom stupni ZŠ pri niektorých lineárnych rovniciach

$$6x + 2 = 5 \tag{6.1}$$

Už nevystačia s prirodzenými číslami. Pri riešení lineárnych rovníc typu 6.1 žiaci ZŠ sa naučia využívať **ekvivalentné úpravy**.

3. Náročnejšia situácia nastane pri rovnici

$$x + 5 = 2 \tag{6.2}$$

Pri tejto rovnici ešte ani žiaci 8. ročníka ZŠ nedokážu nájsť správne riešenie. Nevedia zdôvodniť, že **riešením je záporné číslo**.

4. Na strednej škole sú to kvadratické rovnice

(a)

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \tag{6.3}$$

Pri riešení kvadratických rovníc žiaci 1. ročníka SŠ využívajú okrem ekvivalentných úprav aj **vzorce pre výpočet koreňov** kvadratických rovníc.

Na tomto stupni vzdelávania žiaci sa stretávajú aj s grafickým riešením rovníc. Pozrite si applet [Tu](#).

(b)

$$x^2 + 2x + 3 = 0 = 0 \quad (6.4)$$

Pri riešení kvadratických rovníc so záporným diskriminantom žiaci SŠ **musia poznať komplexné čísla**.

Cvičenie

Riešte v obore reálnych čísel rovnicu

$$3x + 2 = \sqrt{26 + 5x}. \quad (6.5)$$

Urobte skúšku. Riešenie [Tu](#).

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Dôležité je explicitne zdôrazniť: „Nový číselný obor nevzniká preto, že ho chceme, ale preto, že ho potrebujeme.“
2. **Rovnice sú tu diagnostický nástroj, nie cieľ.**
3. Odporúčané porovnanie:
 - „Ako by som túto potrebu vysvetlil žiakovi?“
 - „Ako by som ju vysvetlil rodičovi?“

Reflexné otázky pre študentov

1. Kedy žiak cíti potrebu nového pojmu?
2. Ako dlho je didakticky únosné „nechať problém otvorený“?

6.2 Prirodzené čísla

Didaktické ciele

Po absolvovaní kapitoly by mal študent učiteľstva matematiky:

1. rozumieť pojmu prirodzené číslo **ako symbol** rovnakých množstiev,
2. chápať porovnávanie množín ako **predprípravu pojmu kardinality**,
3. chápať desiatkovú sústavu ako **pozičný systém**, nie len zápis,
4. vedel identifikovať **typické žiacke miskoncepce** (číslíca & pozícia).

Prirodzené čísla si ľudia utvárali pri skúmaní vzťahov medzi skupinami reálnych objektov. Pri takomto skúmaní vzťahov medzi skupinami objektov sa abstrahovalo od veľkosti, farby a ďalších vlastností. **Podstatné** bolo len to, či predmety dvoch súborov možno vzájomne (bez zvyšku) zoradiť do dvojíc.

Za najdôležitejšie zistenie pri „zoskupovaní objektov“ bol objav ľudstva, pomocou ktorého ľudia dokázali odpovedať na otázku:

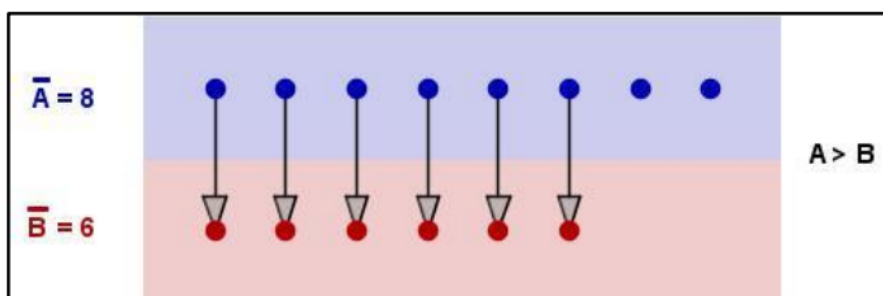
V ktorej skupine je menej, viac resp. rovnako objektov?

V podstate ide určovanie "**Veľkosť množiny**". Princíp resp. **metóda porovnávania** je východisková metóda pri zavádzaní pojmu prirodzeného čísla aj na 1. stupni ZŠ. Žiaci na tomto stupni vzdelávania porovnávajú množiny z pohľadu množstva prvkov. Osvoja si situácie, kedy množiny majú rovnaký počet prvkov.

Ide o predprípravu pojmu kardinality.

Predstavme si, že nepoznáme žiadnu teóriu o číslach ale poznáme len pojmy jeden, dva a viac. **Našou úlohou bude zistiť, ktorých krúžkov je viac** – modrých alebo červených? Pozrite si obrázok 6.6.

Úlohu môžeme jednoducho vyriešiť tak, že budeme spájať jeden modrý krúžok s jedným červeným krúžkom. Dostaneme sa do situácie, keď už nemôžeme spájať a pritom máme ešte voľné dva modré krúžky. Vtedy „*slávnostne*“ vyhlásime, že **modrých krúžkov je viac** ako červených krúžkov.



Obr. 6.6: Porovnávanie množín.

Žiaci porovnávajú konečné množiny s reálnymi prvkami - skupiny domácich zvierat; deti pri rôznych hrách; peniaze, ktoré musia zaplatiť v obchode a pod. Po získaní zručností v metóde

porovnávaní, žiaci sa zoznamujú s pojmom prirodzeného čísla ako symbolom pre všetky množiny s rovnakým počtom prvkov. **Takýmto symbolom budú hovoriť prirodzené čísla.** Naučia sa ako tieto symboly zapísať (pomocou čiarok, číslic , ...) a čítať. Pozrite si obrázok 6.7. **Žiaci často zamieňajú hodnotu číslice a jej pozíciu v zápise čísla.**

$$\text{||||} \text{ |||} \text{ |||} \text{ ||} \leftrightarrow 3 \cdot 5 + 3 = 18$$

Obr. 6.7: Symboly pre prirodzené čísla.

Z histórie vývoja matematiky sú známe tzv. **vrubovky**, ktoré slúžili na primitívne určovanie počtu prvkov v skupine. Jedna z najstarších vruboviek bola objavená na Morave v roku 1936.

Poznámka 6.1

V siedmom storočí nášho letopočtu indo-arabská matematika zaviedla desiatkovú číselnú sústavu.

Uvedieme zjednodušenú definíciu pojmu prirodzeného čísla, ktorá je vhodná pre 2. stupeň ZŠ.

Definícia 6.4: Prirodzené čísla

Prirodzené čísla sú prvky množiny

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}.$$

Prirodzené číslo vyjadruje počet prvkov danej konečnej a zároveň neprázdnej množiny.

Definícia 6.5: Nula

Nula predstavuje počet prvkov prázdnej množiny.

Nulu z praktických dôvodov na základnej škole nezaraďujeme medzi prirodzené čísla. Má samostatné postavenie v číselných oboroch.

6.2.1 Desiatková sústava

Dnes zapisujeme čísla pomocou skupín založených na čísle 10 (desiatková číselná sústava). Zostavujeme postupne skupiny o 10, 100, 1000, 10 000, ... Počet núl za jednotkou označuje veľkosť skupiny a nazýva sa **rád**.

Desiatková číselná sústava je spôsob zapisovania prirodzených čísel pomocou desiatich číslic: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pri zápise hodnota čísla závisí od jej miesta číslice v zápise čísla (jednotky, desiatky, stovky, ...). Napríklad žiaci už na 1. stupni ZŠ sa rýchlo naučia (a aj pochopia), že zápisy 12 a 21 predstavujú rôzne čísla resp. rôzne počty prvkov.

Desiatková číselná sústava

V desiatkovej sústave zapisujeme čísla pomocou **desiatich** číslic.
Hodnota číslice závisí od jej miesta v čísle.



Obr. 6.8: Zápis čísla v desiatkovej číselnej sústave.

Prevzatý riešený príklad

Přečti (zapiš slovy) nasledujúci prirodzená čísla zapsaná v desiatkovej soustavě. U každého z nich uveď počet čeho môžu udávať (napríklad číslo 58 môže udávať počet maturantů ve dvou maturitních třídách).

Čísla napiš v rozvinutém zápise čísla. U každého čísla urči jeho najvyšší rád.

- a) 14 b) 301 c) 6 520 012 304

(Prevzaté z [Matematika ZŠ.realisticky.cz](http://Matematika.ZŠ.realisticky.cz))

Riešenie.

- 14 - počet dívok v primě, najvyšší rád 1 (desítky)
- 301 - počet žáků školy, najvyšší rád 2 (stovky)
- 6 520 012 304 - počet obyvatel Země, najvyšší rád 9 (miliardy).

□

Porovnávanie a usporadúvanie prirodzených čísel.

Čísla zapísané pomocou desiatkovej číselnej sústavy je možné aj ľahko porovnávať. Pozrite si interaktívne obohatenia z učebnice pre 5. ročník od autorov Bero a kolektív.

Operácie na množine prirodzených čísel.

V nižších ročníkoch 2. stupňa ZŠ sa pri operáciách s prirodzenými číslami kladie dôraz na **porozumenie významu operácií**, ich vzájomných vzťahov a využitie v reálnych situáciách, nie len na zvládnutie výpočtových algoritmov.

Uvádzame príklady z učebníc v 5. ročníku.

Číslo, ktoré má viac cifier, je vždy väčšie.

$$2\ 504\ 601 > 4\ 571$$

Ak majú dve čísla rovnaký počet cifier, tak porovnávame ich cifry zľava doprava:

$$4\ 872\ 506 > 4\ 853\ 519$$

prvú s prvou, druhú s druhou... Väčšie číslo je to, u ktorého najskôr nájdeme väčšiu cifru.

Obr. 6.9: Bero a kol., Matematika pre 5. ročník, str. 9

1. Žiaci si opakujú základné pojmy a vzťahy pre sčítanie a odčítanie.
2. Osvojujú si operácie násobenie a delenie prirodzených čísel.
3. Rozširujú obor násobenia a delenia.

$\begin{array}{rcl} 124 & \cdot & 4 & = & 496 \\ \text{ČINITEĽ} & \cdot & \text{ČINITEĽ} & = & \text{SÚČIN} \end{array}$
$\begin{array}{rcl} 496 & : & 4 & = & 124 \\ \text{DELENEC} & : & \text{DELITEĽ} & = & \text{PODIEL} \end{array}$

Obr. 6.10: Šedivý a kol., Matematika pre 5. ročník, str. 23.

Učebnica Šedivý a kol. je dostupná v elektronickej forme [Tu](#).

Rôzne prístupy

Rôzne prístupy k zavádzaniu a precvičovaniu pojmov, ktoré sa viažu k operáciám na množine prirodzených čísel.

1. Ukážka z učebnice od autorov Šedivý a kolektív je statická. Neumožňuje žiakom interaktívne si overovať znalosti, ktoré dosiahli pri operáciách s prirodzenými číslami.
2. Učebnica Bero a kol.: [Matematika pre 5. ročník](#) na strane 48 ponúka žiakom obohatenie „Násobilka“.

Príklad: samostatné cvičenie

Využitím AI navrhnete (prípadne vyhľadajte) interaktívne materiály, ktoré učitelia v 5. ročníku ZŠ môžu využiť v tematickom okruhu „Operácie s prirodzenými číslami“.

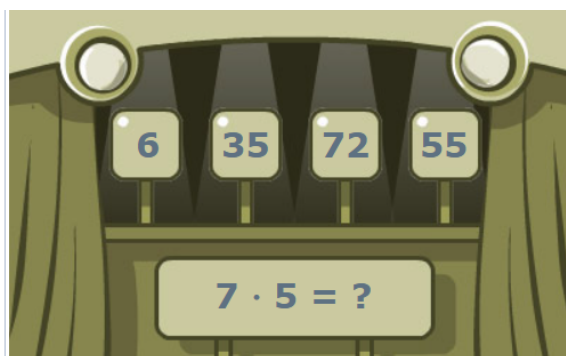
$4 \cdot 12 = \square$

$6 \cdot 4 = \square$

$5 \cdot 11 = \square$

$4 \cdot 8 = \square$

$7 \cdot 6 = \square$



Obr. 6.11: Bero a kol., Násobilka3.

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Neurýchľovať prechod k symbolike.
2. Pracovať s reálnymi situáciami, nie abstraktnými objektmi.
3. AI môže generovať:
 - chybné žiacke odpovede na analýzu,
 - diferenciované úlohy pre slabších žiakov.

Reflexné otázky pre študentov

1. Prečo je „počítanie“ viac než mechanická zručnosť?
2. Kedy má zmysel zavádzať nulu?
3. Čo sa zmení, ak presunieme číslicu?

6.3 Celé čísla

Didaktické ciele

Po absolvovaní kapitoly by mal študent učiteľstva matematiky:

1. chápať zavedenie celých čísel ako **nevyhnutný krok**, nielen ako rozšírenie „pre pohodlie“,
2. vedieť vysvetliť význam pojmu **opačné číslo**,
3. rozumieť rozdielu medzi **školskou a vysokoškolskou konštrukciou** \mathbb{Z} ,
4. rozlišovať **separovaný a generický model**,
5. vedel vysvetliť, že **číselná os patrí medzi najabstraktnejšie modely**.

Jedna z náročných ale zároveň dôležitých etáp pri rozširovaní číselných oborov na základnej škole je rozšírenie oboru prirodzených čísel na **obor celých čísel**. Zavedenie oboru celých čísel je v súčasnosti zakotvené v učebných osnovách pre 8. ročník ZŠ. Východiskovým pojmom je **opačné číslo**.

Prv než začneme s charakteristikou procesu výstavby celých čísel na ZŠ a komparáciou učebníc matematiky používaných na ZŠ, uvedieme teoretické východiská k tejto problematike. **Motiváciou pri zavádzaní celých čísel** môže byť problém, ktorý nastane pri pokuse riešiť niektoré lineárne rovnice v obore prirodzených čísel. Napríklad jednoduchá algebraická rovnica

$$x + 5 = 2,$$

ktorej koeficienty 1, 2, 5 sú prirodzené čísla nemá v obore prirodzených čísel riešenie.

1. Ak budeme aplikovať ekvivalentnú úpravu „odčítanie“ čísla 5 k obovom stranám rovnice, tak dostaneme

$$(x + 5) - 5 = 2 - 5.$$

2. Po úprave na ľavej strane rovnice dostaneme len neznámu x a na pravej strane to bude **rozdiel** $(2 - 5)$.
3. Veľmi ľahko sa presvedčíme, že rozdiel $(2 - 5)$ v obore prirodzených čísel neexistuje. Preto **je nutné vytvoriť nový číselný obor**, v ktorom takýto rozdiel existuje.
4. Pri rozširovaní oboru prirodzených čísel na obor prirodzených čísel je vhodné (aj keď nie nutné) zaviesť pojem opačného čísla.

Definícia 6.6

Pre ľubovoľné prirodzené číslo n definujeme **opačné číslo** m také, pre ktoré platí rovnosť

$$n + m = 0. \tag{6.6}$$

Na rovnosť 6.6 sa môžeme pozerať aj ako rozdiel $n = 0 - m$. Myšlienka vytvorenia nového číselného oboru pomocou „**rozdielov prirodzených čísel**“ je nosnou pri zavádzaní oboru celých čísel v teoretickej aritmetike na VŠ.

Základná škola.

Uvedieme definíciu pojmu celého čísla, ktorá je vhodná pre 2. stupeň ZŠ.

Definícia 6.7

Celé čísla sú všetky prirodzené (kladné celé) čísla a čísla k nim opačné (záporné celé) plus číslo nula.

Symbolicky to zapíšeme ako množinu

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\} \quad (6.7)$$

Záporné celé čísla umožňujú vyjadriť aj veľkosť úbytku resp. poklesu v reálnych situáciách, ktoré sa týkajú výpočtov.

Hovoríme aj o odbore celých nezáporných čísel, ktorý predstavuje množinu

$$\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

Vysoká škola - teoretická aritmetika.

Jednou z možností ako zaviesť obor celých čísel je využitie vhodnej relácie ekvivalencie na karteziánskom súčine $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ množiny prirodzených čísel. Na prednáškach z teoretickej aritmetiky sa táto relácia zvykne definovať nasledovne:

Nech \mathbb{N} je množina všetkých prirodzených čísel. Definujme binárnu reláciu R na množine $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takto:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b, \quad (6.8)$$

kde a, b, c, d sú prirodzené čísla.

Cvičenie

Relácia 6.8 je reláciou ekvivalencie. **Dokážte** toto tvrdenie.

Pozrite si vlastnosti tejto relácie Tu. V kurze z vyššej algebry ste sa presvedčili, že každá relácia ekvivalencie indukuje rozklad množiny na disjunktné triedy. Zrejme môžeme vysloviť tvrdenie/vetu, ktoré zároveň definuje množinu celých čísel.

Veta 6.1

Nech $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$ je rozklad karteziánskeho súčinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ podľa relácie 6.8. Potom triedy tohto rozkladu budeme považovať za celé čísla.

Pre úplnosť je nutné zdefinovať vhodné operácie súčtu a súčinu.

Definícia 6.8: Súčet celých čísel.

Nech $T_{(a,b)}, T_{(c,d)}$ sú dve celé čísla (dve triedy rozkladu), potom ich súčtom

$$T_{(a,b)} \oplus T_{(c,d)}$$

bude trieda

$$T_{(a+c,b+d)}.$$

Teda súčet tried je určený vzťahom

$$T_{(a+c,b+d)} := T_{(a,b)} \oplus T_{(c,d)} \quad (6.9)$$

Samostatné cvičenia

Vyriešte nasledujúce úlohy!

1. Ukážte, že usporiadané dvojice prirodzených čísel $(2, 5)$ a $(0, 3)$ patria do tej istej triedy rozkladu a teda predstavujú to isté „záporné“ číslo -3 .
2. Zvoľte si ľubovoľné prvky $x \in T_{(0,2)}$, $y \in T_{(3,5)}$ a vypočítajte súčet $x + y$. Určte triedu rozkladu, do ktorej tento súčet patrí.
3. **Vyslovte definíciu pre súčin** dvoch tried. *Pomoc:* pozrite si definíciu v kurze [Budovanie číselných oborov](#).

Tento prístup nie je určený pre žiakov ZŠ, ale budúcim učiteľom ponúka hlbšie porozumenie podstate záporných čísel.

Základná škola celé čísla.

Vráťme sa teraz do 8. ročníka základnej školy a pokúsme sa vyriešiť rovnicu $x + 5 = 2$.

Pri jej riešení môžeme **použiť aj nasledovný postup**.

- žiaci už na ZŠ vedia, že platí rovnosť $3 + (-3) = 0$,
- pri riešení rovnice $x + 5 = 2$ využijú asociatívnosť: $(x + 3) + 2 = 2$,
- od obidvoch strán rovnice žiaci odčítajú to isté číslo: 2
- po odčítaní získajú „jednoduchšiu“ rovnicu $x + 3 = 0$,
- keďže platí aj rovnosť $(-3) + 3 = 0$.

Iná možnosť riešenia rovnice $x + 5 = 2$

- ak „odčítame“ číslo 5 od obidvoch strán rovnice,
- dostaneme $(x + 5) - 5 = 2 - 5$,
- odkiaľ $x = (2 - 5)$.

Zistili sme, že riešenie môžeme zapísať dvomi spôsobmi: $x = (-3)$ resp. $x = (2 - 5)$.

Záver:

1. Keďže rovnica má len jedno riešenie (prečo?), tak musí platiť $(-3) = (2 - 5)$.
2. Namiesto zápisu (-3) budeme používať zápis -3 .
3. Zavedieme označenie $2 - 5 = -3$.
4. Čísla zapísané v tvare -3 budeme nazývať **záporné čísla** a čítať ...

Historický kontext

Záporné čísla sa objavili po prvýkrát v čínskej matematike. V knihe „Deväť kapitol matematického umenia“ (202 pred n.l.) sú použité červené „úsečky“ pre kladné čísla a čierne pre záporné čísla.

231			≡	
5089	≡		⊥	≡
407				⊥
6720	⊥	⊥	=	

Obr. 6.12: Čínsky zápis záporných čísel

Tento systém je opak súčasného zapisovania kladných a záporných čísel v oblasti bankovníctva, účtovníctva a obchode.

Poznámka 6.2

atematici v rôznych historických obdobiach považovali záporné čísla za **absurdné** (Di-
ofantos), **klamné** (Descart) a **fiktívne** (Bombelli).

6.3.1 Opačné čísla

Úloha ZŠ. (Zmena teploty).

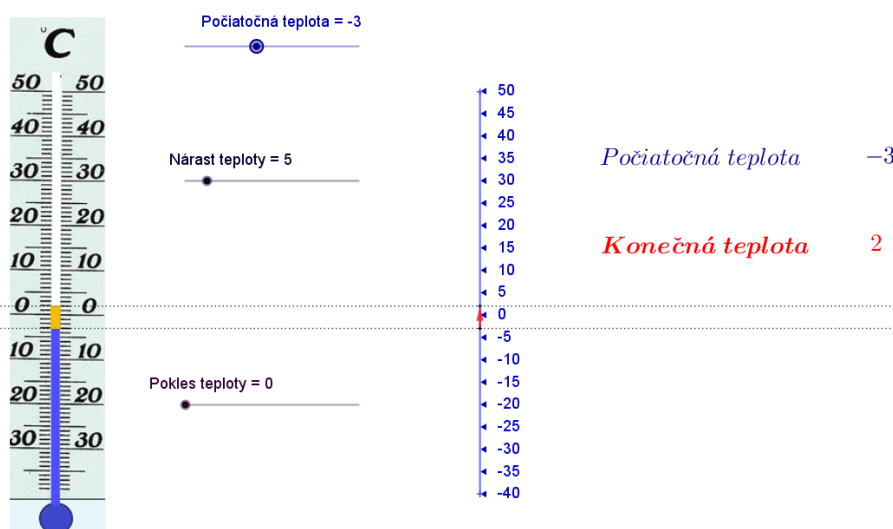
Janko a Marienka mali za úlohu zistiť ako sa zmenila vonkajšia teplota na školskom dvore medzi 7 hodinou a 10 hodinou. Janko zistil, že teplota vzduchu v tomto časovom úseku **stúpla o 5 stupňov**, Marienka zistila, že teplota vzduchu o 10 hodine **dosiahla len 2 stupne**.

Na hodine matematiky mali žiaci 8. triedy vypočítať aká bola teplota vzduchu na školskom dvore ráno o 7 hodine.

Riešenie.

1. Žiaci pri riešení dospeli k rovnici či $x + 5 = 2$, ktorej koeficienty 1, 2, 5 sú prirodzené čísla.
2. Zistili, že rovnica v obore prirodzených čísel **nemá riešenie**.
3. **Otázka:** Prečo rovnica $x + 5 = 2$ nemá riešenie v obore prirodzených čísel?
Odpoveď: Ekvivalentnou úpravou - pričítaním ľubovoľného prirodzeného čísla $n \geq 0$ k číslu 5 dostaneme $n + 5 \geq 0 + 5 = 5 > 2$. Teda výraz $x + 5$ v obore prirodzených čísel nikdy nenadobudne hodnotu 2.

□



Obr. 6.13: Ilustrácia riešenie úlohy „Zmena teploty“

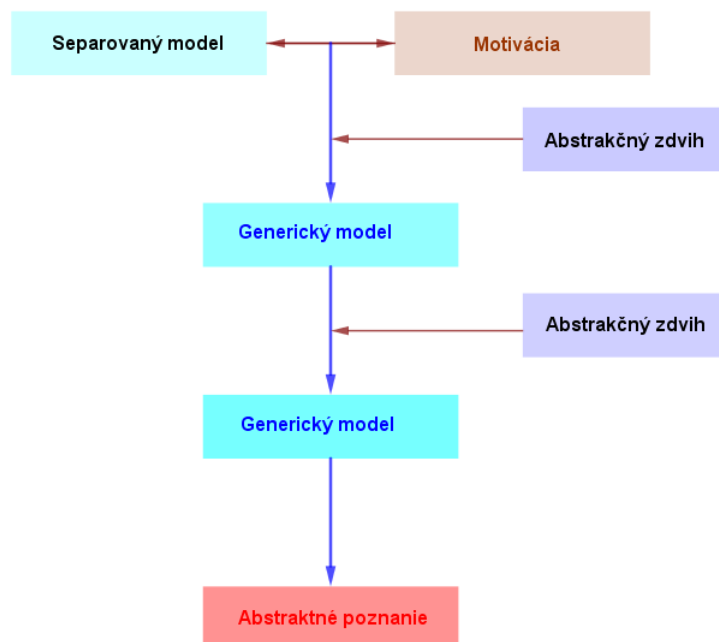
Žiaci intuitívne prijímajú záporné čísla v kontexte teploty skôr než v čisto algebraickej forme. Pri riešení je vhodné použiť dynamický applet „**Teplomer**“, ktorý si aktivujete [Tu](#). V applete nastavte posuvník „Nárast teploty“ na hodnotu 5 a posuvník „Počiatočná teplota“

plynule posúvajte tak, aby „Konečná teplota“ dosiahla hodnotu 2. Applet zobrazí v textovom poli „Počiatočná teplota“ hodnotu -3, ktorá je riešením úlohy.

Východisko pri zavádzaní celých resp. záporných čísel v školskej matematike je **pojem opačného čísla**. Opačné čísla sú zavádzané pomocou modelov, ktoré reprezentujú názorné reálne situácie. Z pohľadu metodológie ide teóriu separovaných a generických modelov.

Osvojovanie matematických schopností je úzko spojené s duševným výkonom žiaka, ktorého dôležitou súčasťou je **proces abstrakcie**. Viac v práci [Hejný, 2004]. Poznávací proces vychádza z toho, že vo vzdelávacom procese žiak/študent

1. najskôr vníma a pochopí elementárne javy asúvislosti na viacerých konkrétnych situáciách (**separované modely**),
2. neskôr hľadá čo majú spoločné tieto elementárne javy (**generické modely**) a následne objavuje obecnjšie javy a vzťahy, pričom **prichádza k abstraktnému poznaniu**.

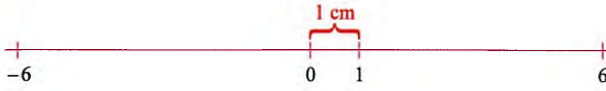


Obr. 6.14: Vzťahy medzi separovanými a generickým modelmi

Základná škola


Uvedieme ukážky tematického bloku „Opačné číslo“, ktoré sú zahrnuté v najčastejšie používaných učebniciach. Za najabstraktnejší generický model sa považuje model „Číselná os“. Pravdepodobne najmenej výhodný je model „Výťah“, keďže reálne v našej geografickej oblasti máme veľmi málo budov s podlažiami označenými zápornými číslami. Ako najúčinnější sa javí model „Teplomer“, ktorý je akýmsi prechodom od separovaného modelu ku generickému. Tu sú tri ukážky z rôznych učebníc.

PRÍKLAD 1
 Janko si narysoval číselnú os a na nej vyznačil dve čísla:



Čím je táto dvojica čísel zaujímavá?

RIEŠENIE
 Janko meria:
 Vzdialenosť obrazu čísla 6 od obrazu čísla 0 je 6 cm.
 Vzdialenosť obrazu čísla -6 od obrazu čísla 0 je 6 cm.
 Obrazy týchto čísel sú rovnako vzdialené od obrazu čísla 0 a ležia na opačných častiach číselnej osi vzhľadom na obraz čísla 0.
 Číslo -6 je opačné k číslu 6. Platí to aj obrátene:
 Číslo 6 je opačné k číslu -6.



Obr. 6.15: Číselná os - Šedivý

1. Šedivý, O. a kol.: [Matematika pre 6. roč. ZŠ, 1. časť](#), str. 41.

Na číselnej osi sú zobrazené symetricky umiestnené body.

2. Žabka, J., Černek, P.: [Matematika pre ZŠ, 8. roč, 1. časť](#), str. 49.

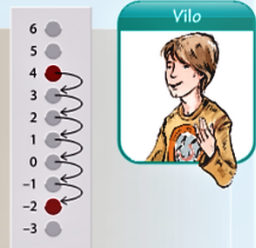
3 Predstavte si, že ste na 4. poschodí a zveziete sa o 6 poschodí nižšie. Na ktorom poschodí budete?

Pozrite, ako úlohu riešil Vilo.

Vilo:
 Postupne si predstavujem, ako idem

o jedno poschodie nižšie	3. poschodie
o dve poschodia nižšie	2. poschodie
o tri poschodia nižšie	1. poschodie
o štyri poschodia nižšie	0. poschodie (prízemie)
o päť poschodí nižšie	-1. poschodie
o šesť poschodí nižšie	-2. poschodie.

Budem na -2. poschodí.



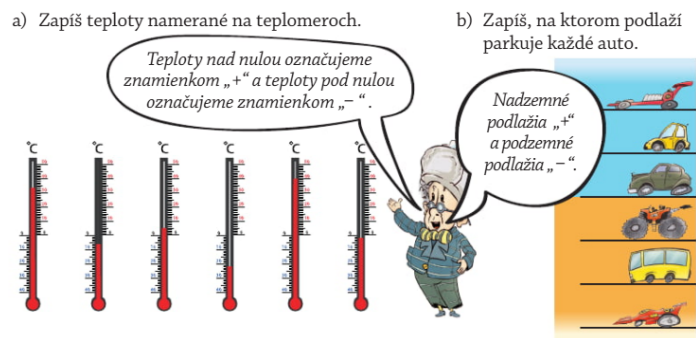
Obr. 6.16: Vozenie hore - dole výťahom

3. Berovci: Interaktívna kniha - Matematika - [Učebnica pre 8. ročník, str. 5](#). Pozrite si na tejto stránke obohatenie „Prečo sú záporné čísla potrebné?“

Pri ukážke záporných čísel sa používajú tiež príklady z oblasti financií a meteorológie (teplota), ktoré sa naviac približujú reálnemu životu. Na priblíženie pojmu záporného čísla (Žabka) sa používa aj výťah alebo nadmorská výška, ale to sú nie celkom reálne situácie.

1. Situácie typu $2 - 5$ alebo $2 + (-5)$ výhodne môžeme modelovať napríklad na financiách (pokúste sa interpretovať toto odčítanie pri platbe platobnou kartou).

2. K pojmu záporného/opačného čísla si v rámci cvičenia vytvoríme dynamický applet, na ktorom budeme modelovať situácie o zmene teploty. Pozrite si ukážku [teplomera Tu](#) a [výťahu Tu](#). Na dynamickom teplomere vymodelujte situáciu, ktorá prezentuje riešenie rovnice $x + 5 = 2$.



Obr. 6.17: Meranie teploty

Zapamätajte si závery:

1. Rovnica má len jedno riešenie, preto musí platiť $(-3) = (2 - 5)$.
2. Namiesto zápisu (-3) budeme používať aj zápis -3 .
3. Čísla zapísané v tvare -3 budeme nazývať **záporné čísla** a čítať **mínus tri**.

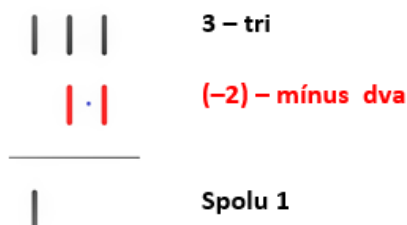
6.3.2 Generické modely

Modely pre upevňovanie pojmu záporné číslo

1. **Farebný model - operácie.** Žiaci intuitívne prijímajú záporné čísla v kontexte teploty skôr než v čisto algebraickej forme. predstavujú **čierne a červené paličky**. Tento model vychádza z čínskeho spôsobu zápisu záporných čísel. Tento model je vhodný aj pre žiakov základných škôl. Stačí im povedať pravidlo: Jedna čierna a jedna červená palička sa vyruší. Teda rovnaký počet čiernych a červených paličiek dáva nulu. Potom napríklad rovnosť

$$3 + (-2) = 1$$

môžeme reprezentovať tak, ako je znázornené na obrázku „Čínsky model“.



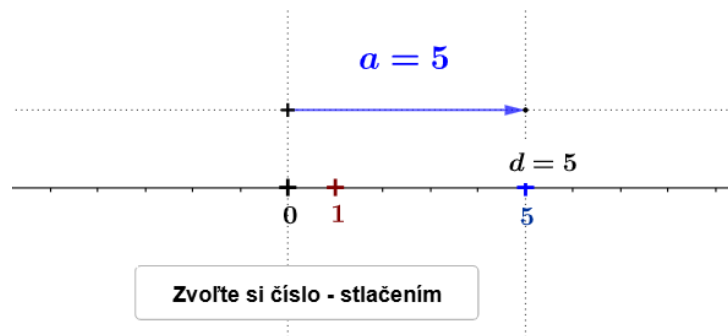
Obr. 6.18: Čínsky model

2. Model profesora Milana Hejného **Tajná chodba** používa pravidlo:
 - Výstup o jeden schod predstavuje prirodzené číslo 1

- Zostup o jeden schod predstavuje záporné číslo (-1)
- Potom matematickú úlohu na sčítanie v obore celých čísel môžeme prezentovať ako prechádzku po chodbe, v ktorej sa nachádzajú viaceré schodišťa v smere nahor ako aj nadol.

Analogickú funkciu má model **Výtah - zmena stavu**.

3. Číselná os



Obr. 6.19: Číselná os

Pravdepodobne najprirodzenejším a najpraktickejším modelom pre zobrazovanie celých čísel zrejme ostane číselná os. Prechod od dynamických modelov k číselnej osi predstavuje prechod od konkrétneho k abstraktnému mysleniu.

Nech je daná priamka a nej body 0 a 1, pričom $d(0, 1) = 1$. Applet „Číselná os“ je dostupný [Tu](#).

Celému číslu $u \in \mathbb{Z}$ priradíme bod A na osi x podľa pravidiel:

- Pre nezáporné číslo a bude jeho obraz bod na polpriamke $\vec{01}$, pričom bude platiť $d(0, A) = a$.
- Ak číslo a je záporné, tak jeho obraz bude bod A' na opačnej polpriamke k polpriamke $\vec{01}$, pričom pre vzdialenosť bodu A' od počiatku bude platiť $d(0, A') = |a|$.

Cvičenie (7. - 8. ročník ZŠ)

Na obrázku 6.20 je narysovaná číselná os a na nej sú vyznačené tri čísla x, y, z . Narysujte na tejto číselnej osi obraz nuly, ak viete, že súčet dvoch vyznačených čísel sa rovná tretiemu. Nájdite všetky riešenia.

Otvorte si applet „Číselná os“, ktorý je dostupný [Tu](#).



Obr. 6.20: Číselná os - usporiadanie čísel

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Model je most, nie cieľ.
2. Výťah, teplomer, financie – každý model má obmedzenia.
3. Každý model niečo zvýrazňuje a niečo potláča.
4. Úlohou učiteľa je vedieť, kedy model opustiť a prejsť k číselnej osi.
5. Zdôrazniť, že: „Abstrakcia nie je odstránenie kontextu, ale jeho zovšeobecnenie.“

Reflexné otázky pre študentov

1. Ktorý model je prečo účinný?
2. Kedy model začne žiaka brzdiť?

6.3.3 Operácie s celými číslami

Didaktické ciele

Po absolvovaní kapitoly by mal študent učiteľstva matematiky:

1. chápe pravidlá znamienok ako výsledok pozorovania,
2. vie identifikovať nevhodné verbálne algoritmy,
3. vie navrhnúť sekvenciu úloh vedúcu k objavu pravidla.

Sčítanie a odčítanie

Sčítanie a odčítanie celých čísel sa v dostupných učebniciach matematiky zavádza postupne ako súčet:

1. dvoch kladných čísel

2. dvoch záporných čísel
3. kladného a záporného dvoch,

pričom sa zdôrazňuje tvrdenie: „**Odčítat záporné číslo znamená pričítať číslo opačné.**“

PRÍKLAD 2
 Petra chce vypočítať tieto príklady:
 $-9 - 32$; $14 - 58$; $100 + (-64)$; $-105 + 47$

RIEŠENIE
 Petra použije takýto postup:

1. určí znamienko výsledku:

	čísla majú	
rovnaké znamienka	↔	rôzne znamienka
	výsledok bude mať	
to isté znamienko	↔	znamienko toho čísla, ktoré je po zakrytí znamienok väčšie
2. vypočíta príklad:

	čísla majú	
rovnaké znamienka čísla sčíta	↔	rôzne znamienka odčíta menšie číslo od väčšieho

Obr. 6.21: Ukážka z učebnice (Šedivý, Matematika 6/1, str. 60)


V učebnici od autorov Žabka, Černek je odčítanie dvoch celých čísel prezentované pomocou pričítania opačného čísla:

Tento výsledok Peter stručne zhrnul takto:

3. Petrovo pravidlo:

Odčítat dané číslo je to isté, ako pripočítat číslo k nemu opačné.

Toto pravidlo platí vždy, aj keď odčítajeme väčšie číslo od menšieho:
 Napr. $6 - 8 = 6 + (-8) = -2$ $-30 - (-27) = -30 + 27 = -3$

Peter


Obr. 6.22: Žabka: Odčítanie celých čísel

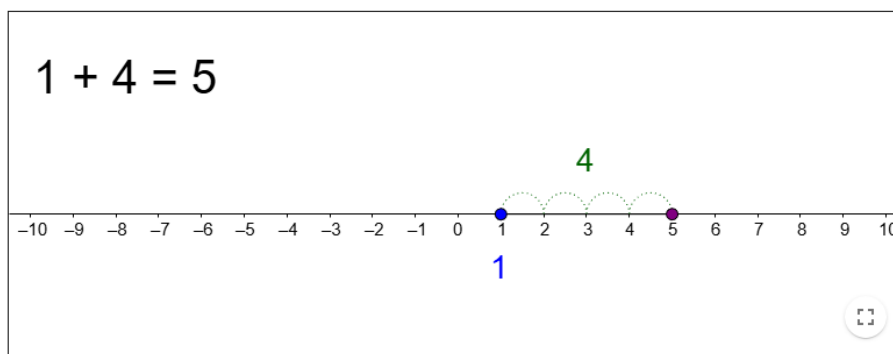
V učebniciach didaktiky matematiky spravidla nájdeme len symbolické zápisy vlastností sčítania. Napríklad:

1. $a + (-a) = 0$, $;\cdot 0 = 0$, $a \cdot 1 = a$,
2. $a + (-b) = a - b$ ak $a > b$, kde $a, b \in N$.

Poznámky

1. Pre žiakov 8. ročníka sčítanie a odčítanie nepredstavuje náročné učivo, keďže sa s v bežnom živote stretávajú aj s úlohami pre odčítanie, v ktorých je výsledok záporné číslo. Sú to prevažne úlohy o teplote a financiách.
2. Ak chceme žiakov dosiahnuť dobré zručnosti pri sčítaní a odčítaní dvoch celých čísel, tak musíme s nimi riešiť dostatočné množstvo príkladov. Dbáme na to, aby príklady korešpondovali so situáciami v bežnom živote.
3. Pre sčítanie a odčítanie celých čísel môžete využiť celú škálu modelov vytvorených v prostredí GeoGebra. Ako príklady uvádzame dostupné modely

- „Číselný rad na sčítanie a odčítanie“ od autora Bo Kristensen



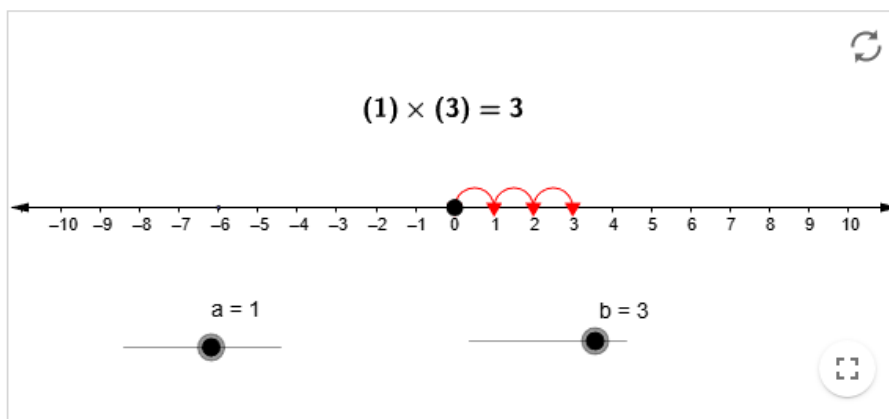
Obr. 6.23: Sčítanie a odčítanie

V applete z obrázka 6.23 posúvajte čierny a modrý bod. Applet je dostupný na stránke GeoGebra [Tu](#).

- „Odčítanie dvoch celých čísel“ od autora Kwanchau. V applete zmeníte hodnoty pomocou posuvníkov. Dostupnosť appleta [Tu](#).
4. Pri riešení úloh sa používajú aj formulácie typu: „Ak absolútna hodnota čísla je väčšia ..., tak odčítame ...“, ktoré sú pre žiakov málo vypovedajúce. Preto uprednostňujeme formulácie: „Ktorá z "cifier" a, b predstavuje väčšie prirodzené číslo“.
 5. **Pravidlá pre znamienka by mali byť výsledkom pozorovania, nie memorovania.**

Násobenie a delenie

Medzi základné operácie v aritmetike celých čísel patrí násobenie a delenie celých čísel. Pri násobení sa využíva skutočnosť, že súčin predstavuje opakované sčítanie rovnakých sčítancov, čo umožňuje nadviazať na skúsenosti žiakov s násobením v obore prirodzených čísel. Rozšírenie násobenia na záporné celé čísla si však vyžaduje didakticky citlivý prístup, v ktorom sa význam znamienka postupne objasňuje prostredníctvom modelov, pozorovania a zovšeobecňovania pravidelností, nie mechanickým zavedením pravidiel pre znamienka. Pri delení celých čísel



Obr. 6.24: Odčítanie dvoch celých čísel

vychádzame z chápania delenia ako inverznej operácie k násobeniu. Dôraz sa kladie na pochopenie vzťahu medzi deliteľom, delencom a podielom, pričom žiaci postupne objavujú, za akých podmienok je podiel celým číslom a kedy je potrebné rozšíriť číselný obor. Aj pri delení je vhodné opierať sa o reálne situácie a modely, ktoré žiakom pomáhajú porozumieť významu operácie a správne použitiu znamienok.

Študijné texty v dostupných učebniciach majú rôzne zameranie. Pozrite si dve ukážky.

PRÍKLAD 1

Súčin $8 \cdot 7$ môžeme zapísať aj pomocou súčtu. Ako? Napište pomocou súčtu aj súčin $8 \cdot (-7)$.

RIEŠENIE

Riešia Martin a Janka:

$$8 \cdot 7 = \underbrace{7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7}_{8\text{-krát}} = 56$$



Ako dobre, že vieme násobilku! Sčítovať toľko sedmičiek by sa nám už nechcelo, pomyslela si Janka.

$8 \cdot (-7)$ vyjadríme ako súčet podobne, Martin píše:

$$\begin{aligned} 8 \cdot (-7) &= (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) = \\ &= \underbrace{-7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7}_{8\text{-krát}} = \end{aligned}$$

všetky čísla majú rovnaké znamienka

$$= -(\underbrace{7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7}_{8\text{-krát}}) = -(8 \cdot 7) = -56$$

Obr. 6.25: Ukážka z učebnice Šedivý

Ukážky, ktoré sme prevzali z učebníc matematiky používaných na našich základných školách **sú statické**.

Nevyužívajú dnešné moderné technické vybavenie ani možnosti poskytované AI (Artificial Intelligence) vo vyučovaní matematiky.

Na upevňovanie vedomostí súvisiacich s operáciami s celými číslami však v dnešnom rozvinutom svete existuje celý rad vhodných GeoGebra appletov, ktoré interpretujú algebraické operácie v rôznych číselných oboroch.


Počítajte ako Rudo.

$3 \cdot (-67)$ $7 \cdot (-568)$ $23 \cdot (-71)$ $673 \cdot (-46)$ $503 \cdot (-931)$

Tomáš:
 Vynásobiť dve kladné čísla je ľahké – výsledný súčin bude kladné číslo:
 $3 \cdot 12 = 36$
 Aj keď mám vynásobiť kladné číslo záporným, bude to ľahké – ako počítanie s dlhmi.
 Preto výsledok bude záporné číslo:
 $3 \cdot (-12) = -36$
 Ako to však bude, keď chcem vynásobiť záporné číslo kladným?
 Napríklad $(-3) \cdot 12$?

Soňa:
 V takom prípade si čísla prehodím a mám to isté, čo predtým:
 $(-3) \cdot 12 = 12 \cdot (-3) = -36$.

Tomáš:
 Jasné, výsledok bude zasa záporné číslo. Potom to nemusím ani prehadzovať,
 môžem rovno napísať, že $(-3) \cdot 12 = -36$.



Obr. 6.26: Ukážka z učebnice Žabka

Takéto dynamické applety učiteľovi môžu významne pomôcť pri výklade násobenia resp. delenia dvoch záporných celých čísel. Applety sú vytvorené v prostredí GeoGebra, ktoré možno jednoducho zdieľať aj v systéme Moodle, kde si zachovávajú svoju dynamičnosť ale aj interaktívnosť. Uvedieme niekoľko ukážok, ktoré sú voľne dostupné na serveri <https://www.geogebra.org/>.

1. Applet z obrázka 6.27 od K. Raju sme upravili (preložili do SK jazyka) pre potreby nášho školského systému.

Násobenie celých čísel Reset

Vypočítajte súčin čísel 2 a -5, výsledok zapíš do textového poľa a stlač Enter!

$2 \times -5 =$

Prepáč, počítaj znovu.

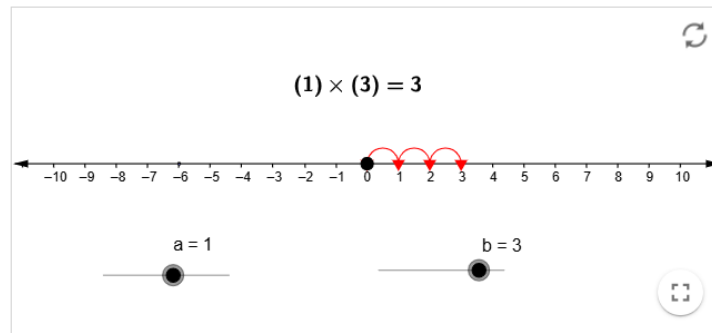
Ďalšia úloha
Skóre
0
0

Created by
 K. Raju
 ZPHS, CheriYala

Obr. 6.27: Násobenie celých čísel

Plná verzia appletu s didaktickými poznámkami je na GeoGebra serveri pod názvom Multiplication of Integers - Translation from Raju to SK. Applet si aktivujete [Tu](#).

2. Applet z obrázka 6.28 od Kwanchau je dostupný [Tu](#).
3. Applet z obrázka 6.29 od Silverman je dostupný [Tu](#). Tento prípad veľmi jasne vizuálne zahŕňa aj násobenie typu **celé číslo záporné** \times **celé číslo záporné**. Tento spoj násobenia sa považuje za najkomplikovanejší z pohľadu učiteľovho výkladu.



Obr. 6.28: Multiplication of Directed Numbers

Testové otázky Moodle

Navrhňte testové otázky pre LSM Moodle o násobení a delení celých čísel podľa učebnice matematiky pre 8. ročník od autorov Bero a Berová.

- Otázky typu „Viacnásobné odpovede“ pre obohatenie „Násobte. Delte“.
- Otázky typu „Numerická odpoveď“ pre obohatenie „Dlh rastie. Dlh klesá“.

Použite [obohatenia zo strany 16](#).

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Neposkytovať pravidlo skôr, než má žiak skúsenosť.
2. **Využívanie AI na analýzu chýb.** Napr. požiadame AI o analýzu konkrétneho alebo typického žiackeho riešenia. Necháme AI pomenovať chybnú predstavu, nie len konštatovať chybu.
3. **GeoGebra a AI sú tu prostriedky na experimentovanie**, nie na nahradenie myslenia. Experiment by mal zahŕňať návrh zadania → realizácia v GeoGebre → didaktická reflexia.

6.4 Racionálne čísla

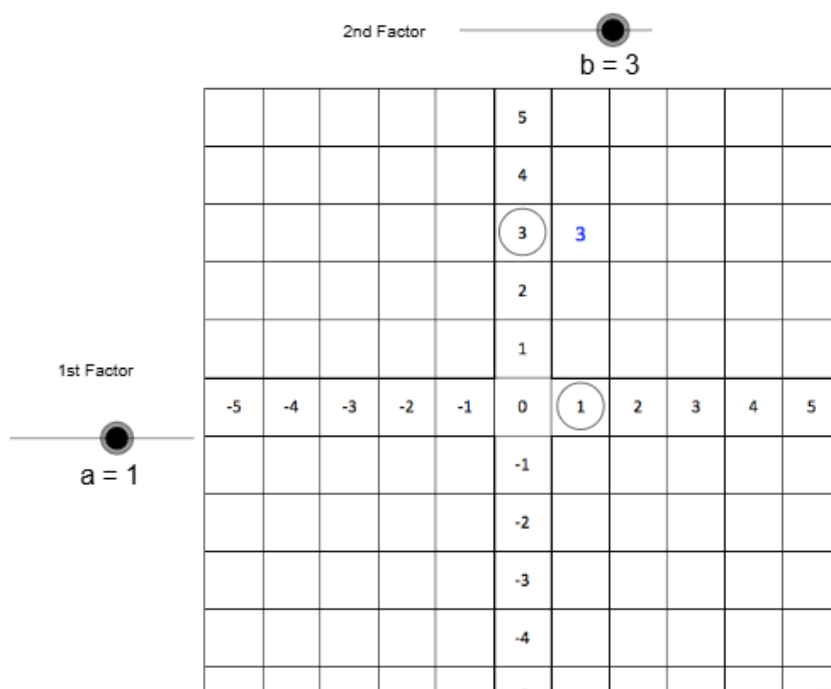
V tejto kapitole sa zameriame na zlomok ako základný nosič pojmu racionálneho čísla a na didaktické úskalia, ktoré s jeho zavádzaním súvisia.

Didaktické ciele kapitoly

Po absolvovaní kapitoly ba mal študent učiteľstva matematiky:

1. rozumie trom významom zlomku: mnohosť – operátor – adresa,

Multiplying Non-Zero Integers



Obr. 6.29: Multiplying Non-Zero Integers

2. pozná kritické miesta vo vyučovaní zlomkov,
3. vie analyzovať žiacke riešenie (Pozrite si ukážku "Cilkin príklad").

Príklad 6.1: Nákup

Mamka išla nakúpiť zeleninu. Kúpila 6 balení zemiakov a 3kg uhoriek. Spolu tak mala v taške 6kg zeleniny. Na hodine matematiky mali žiaci 8. triedy vypočítať koľko kg váži 1 balenie zemiakov.

Riešenie.

1. Žiaci pri riešení dospeli k algebrickej rovnici $6x + 3 = 6$, ktorej koeficienty $1, 3, 6$ sú celé čísla. Takúto rovnicu však **nedokážu vyriešiť** v obore celých čísel. **Prečo?**
2. Lahko sa presvedčíme, že rovnica $6x + 3 = 6$ nemá v obore celých čísel riešenie.
3. Stačí pripočítať k obidvom stranám rovnice číslo -3 a dostaneme rovnicu $6x = 3$, ktorej riešením nemôže byť celé číslo.
4. Na ľavej strane rovnice $6x = 3$ máme párne číslo $2(3x) = 2k$, ale na pravej strane nepárne číslo $3 = 2 \cdot 1 + 1$. **To nie je možné!**

Východisko

Východisko pri zavádzaní racionálnych čísel v školskej matematike je **pojem zlomku**.

Poznámka: K riešeniu príkladu "Nákup"

1. Na chvíľu predpokladajme, že existuje celé číslo, ktoré je riešením danej rovnice $6x = 3$.
2. Vo všeobecnosti pri riešení lineárnej rovnice a vlastností operácie násobenia vieme, že riešením je číslo x rovné podielu $3 : 6$. Teda muselo by platiť: $x = \frac{3}{6}$.
3. Zároveň zo základnej školy vieme, že rovnicu $6x + 3 = 6$ môžeme upraviť na tvar $2x + 1 = 2$.
4. Riešením tejto rovnice je aj číslo $x = \frac{1}{2}$, ktoré tiež nie je celé.
5. Zistili sme, že **rovnica** $6x + 3 = 6$ **má dve riešenia**. Sú to „podiely“ $(3 : 6)$, $(1 : 2)$ resp. zlomky $x = \frac{3}{6}$, $x = \frac{1}{2}$.

Záver. Keďže lineárna rovnica má najviac jedno riešenie, musí platiť rovnosť $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Základná a stredná škola.

Uvedieme definíciu pojmu racionálneho čísla, ktorá je vhodná pre 2. stupeň ZŠ ale aj pre SŠ.

Definícia 6.9

Racionálne čísla sú čísla, ktoré možno vyjadriť v tvare zlomku. Symbolicky to zapíšeme ako množinu

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ak čísla p, q sú nesúdeliteľné (ich spoločný deliteľ je rovný 1), tak zlomok je v základnom tvare.

Racionálne čísla umožňujú vyjadriť aj časti celku.

Vysoká škola - teoretická aritmetika

Jednou z možností ako zaviesť obor racionálnych čísel je využitie vhodnej relácie ekvivalencie na karteziánskom súčine $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Vedeckým prístupom na vysokej škole sa zaoberá Teoretická aritmetika. V kurze [Vybrané kapitoly z aritmetiky](#) nájdete podrobnejšiu charakteristiku vlastností číselných systémov a ich aplikácií. Ako príklad uvádzame dve základné definície

pre obor racionálnych čísel. Reláciu ekvivalencie, ktorá generuje číselný obor racionálnych čísel a definíciu sčítania dvoch racionálnych čísel.

Definícia 6.10

1. Nech \mathbb{Z} je množina všetkých celých čísel. Definujme binárnu reláciu R je na množine $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ takto:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

2. Sčítanie racionálnych čísel

$$T_{(a,b)} \oplus T_{(c,d)} = T_{(a+d+c \cdot b, b \cdot d)},$$

kde $T_{(a,b)}, T_{(c,d)}$ sú dve racionálne čísla (dve triedy rozkladu).

Cvičenie

Dokážte, že binárna relácia R na množine $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ definovaná vzťahom

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

je reláciou ekvivalencie.

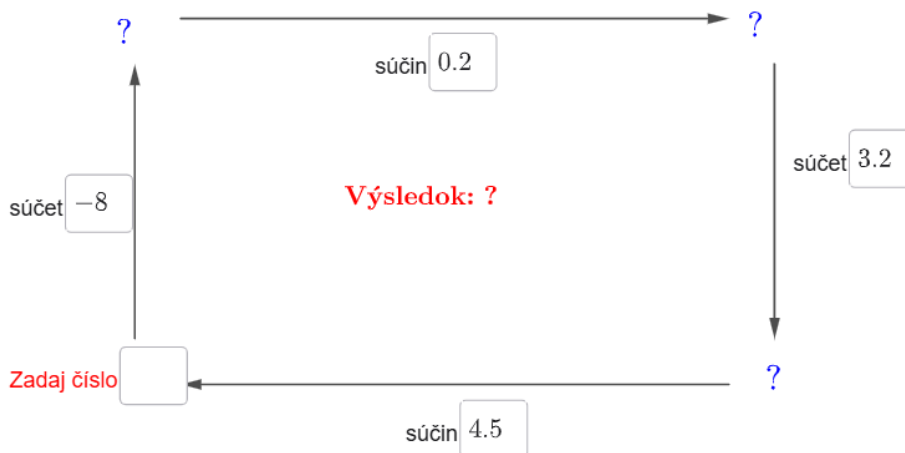
V práci [HEJ, 1989] je uvedené dôležitá funkčná charakteristika racionálneho čísla. Profesor Hejný uvádza:

Číslo môže vystupovať ako: **mnohosť, operátor, adresa.**

Tieto funkcie racionálneho čísla rozoberieme trochu podrobnejšie. Pomôžu nám pri chápaní pojmu zlomok.

1. Prirodzené číslo ako **mnohosť** reprezentujeme v školskej matematike počet prvkov konečnej množiny. V teoretickej aritmetike hovoríme o kardinálnom čísle konečnej množiny.
2. Celé číslo ako **adresa** vyjadruje usporiadanie a poradie. Umožňuje presne určiť miesto prvku v nejakej štruktúre. V bežnom živote sa s tým stretávame často – pri číslach domov, poschodí (môžu byť aj záporné), dní v mesiaci, sedadlách v kine či linkách v cestovných poriadkoch. V matematike tento význam najvýraznejšie predstavuje číselná os. V teoretickej aritmetike hovoríme o ordinálnom čísle konečnej množiny.
3. Číslo ako **operátor** chápeme ako pokyn na zmenu: „pridaj 3“, „uber 5“, „zdvojnásob“, „vezmi polovicu“ a pod. Názorne sa tento význam prejavuje na šípkovom diagrame 6.30, kde každá šípka predstavuje príkaz zmeny. Applet diagramu je dostupný [Tu](#).

Zadaj do ľavého dolného okna také číslo, aby výsledok bol rovný tomuto číslu.



Obr. 6.30: Obor racionálnych čísel - dopĺňovačka

6.4.1 Zlomky

Obsahové a výkonové štandardy pre tematický okruh **Zlomky na ZŠ** zahŕňajú:

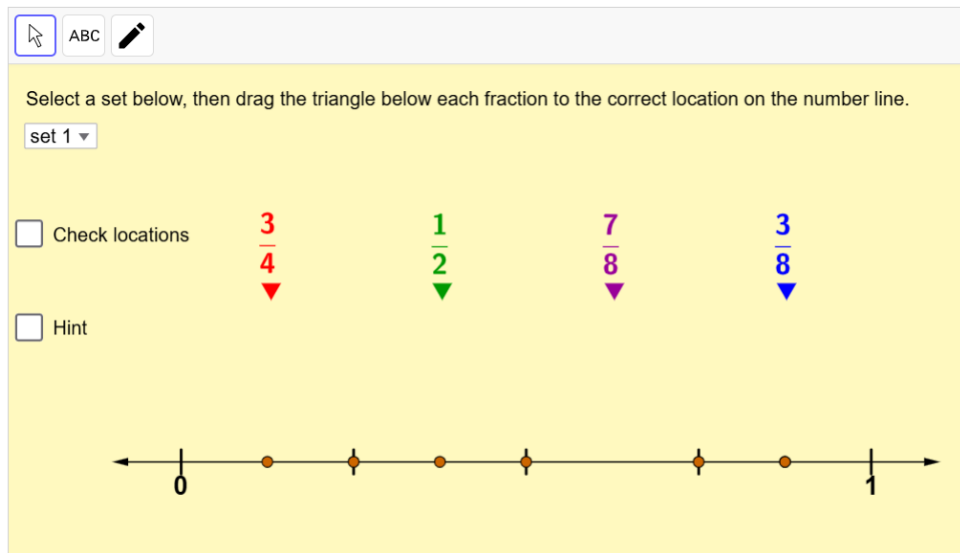
1. Zavedenie pojmu zlomok ako časť celku. Žiaci sa majú naučiť chápať, prečítať, zapísať a znázorniť diagramom zlomok ako číselnú hodnotu.
2. Vedieť umiestniť zlomok prostredníctvom čísla na číselnej osi.
3. Nulový a jednotkový, pravý a nepravý zlomok. Prevod na zmiešané číslo. Vyjadrenie desatinným číslom.
4. Porovnávanie a usporiadanie. Rovnaké zlomky v inom tvare. Základný tvar. Rozširovanie a krátenie.
5. Sčítanie a odčítanie zlomkov s rovnakým a rôznym menovateľom.
6. Násobenie a delenie zlomkov prirodzeným číslom a zlomkom. Krátenie do kríža. Úprava výsledku na základný tvar, resp. zmiešané číslo.

Moderné informačné technológie (AI, GeoGebra, ...) poskytujú rôzne prostredia, ktoré umožňujú vytvoriť dynamický a zároveň interaktívny matematický model pre prácu so zlomkami. Jednoduchšie modely si môže pripraviť učiteľ matematiky aj sám v on-line softvéroch. Existuje však aj množstvo zaujímavých (multimediálnych) produktov vhodných na zaradenie do vyučovania matematiky. Ako príklad uvádzame applet „Porovnávanie zlomkov“, ktorý je vhodný na porovnávanie zlomkov pomocou číselnej osi.

Na stránke [Fraction Book](#) nájdete desiatky appletov ku zlomkom. Na zaradenie do matematického vzdelávania na ZŠ je nutné ich anglickú verziu preložiť do slovenského jazyka.

Inšpiráciu pre učiteľov môže byť aj záverečná práca [Podmanický, 2020] s názvom „Zlomky a GeoGebra“, prípadne študentská prezentácia „Hejný, M. a kol.: 25 kapitol/Zlomky“ ktorá je dostupná [Tu](#).

Na obrázku 6.31 je ukážka appletu, ktorý umožňuje žiakom porovnávať zlomky vo funkcii operátora. Žiak má za úlohu pomocou myši správne umiestniť zlomok na číselnú os. Applet generuje celý rad nových zadaní a zároveň vyhodnocuje žiakove umiestnenia zlomkov. Takéto applety majú vysokú pridanú hodnotu z hľadiska didaktického a i vzdelávacieho.



Obr. 6.31: Locating Fractions on a Number Line

Applet z obrázka 6.31 je dostupný [Tu](#).

Vo všeobecnosti existuje v dnešnej dobe už dostatočné množstvo funkčných a odborne aj didakticky vhodných na vyučovanie matematiky. Problémom pre mnohých žiakov ZŠ je skutočnosť, že pokyny na prácu s týmito appletmi nie sú v slovenskom jazyku. Preto by didaktická príprava budúcich učiteľov matematiky mala zahŕňať aj jazykovú úpravu takýchto appletov do slovenčiny.

K tomu sú **nutné dve základné zručnosti** budúceho učiteľa matematiky:

1. Ovládať program GeoGebra na vyššej úrovni. To znamená vedieť využívať okrem konštrukčných príkazov aj príkazy algebraické resp. iné.
2. Nutné sú schopnosti programovať aj v GeoGebraScript alebo aspoň ovládať jazyk Phython.

Jazyková úprava appletu.

Stiahnite si applet *Locating Fractions on a Number Line* [Tu](#) a preložte do slovenčiny!

V predchádzajúcej časti sme uviedli, že na zlomok sa môžeme pozeráť z hľadiska mnohosti, operátora ale aj adresy. Pripomeňme si:

Rôzne významy čísla

1. **Mnohosť** odpovedá na otázku „Koľko?“
2. **Adresa** hovorí o usporiadaní, o zaradení do štruktúry, v matematike ide často o umiestnenie na číselnú os.
3. **Operátor** sa chápe ako príkaz zmeny, napr. odober z celku $3/4$.

Profesor Hejný identifikuje **kritické miesta vo vyučovaní zlomkov**.

1. Prvá predstava zlomku, s ktorou sa žiaci stretávajú už na ZŠ je vo forme operátora. Zlomok $3/4$ nechápu ako kardinálne číslo (mnohosť), ale ako operátora typu „vziať $3/4$ z niečoho“. Napríklad ako časť koláča, ktorú si odkrojím.
2. **Pochopiť zlomok ako mnohosť vyžaduje abstrakciu**. Pomôžeme si číselnou osou. Zlomok $3/4$ predstavuje primárne adresu na číselnej osi. Avšak reprezentuje aj mnohosť : dĺžku úsečky (to je kardinálne číslo) od začiatku osi v čísle 0 po číslo $3/4$. Tiež reprezentuje operátor: vyčlenenie troch štvrtín z úsečky s krajnými bodmi 0, 1.
3. **Pred zavedením súčtu a súčinu zlomkov je potrebné** postupne viesť žiaka od predstavy zlomku ako operátora ku zlomku ako mnohosti.

V školskej praxi sa zlomky často zavádzajú najskôr ako **operátory**, teda ako pokyny na zmenu nejakej hodnoty.

Chápanie zlomku ako operátora.

Výraz $1/2$ z 12 znamená príkaz: „Rozdeľ 12 na 2 rovnaké časti a vezmi jednu.“
alebo
 $3/4$ koláča znamená: Rozdeľ koláč na 4 rovnaké časti a vezmi 3 z nich.

Takéto chápanie je žiakom blízke, pretože vychádza z konkrétnych situácií – delenie pizze, časti triedy, časť dĺžky a podobne. Zlomok tu **niečo robí s celkom**. Postupne si však začíname všimnúť, že výsledky týchto operácií majú vlastný význam:

- polovica z 12 je 6
- polovica z 8 je 4
- polovica z 1 metra je 0,5 m

Chápanie zlomku ako množstva (veľkosti).

V tomto momente sa objaví dôležitá myšlienka: **polovica už nie je len pokyn, ale aj konkrétna veľkosť – číslo**. Zlomok tak prestáva byť iba činnosťou a stáva sa **číslom**, ktoré má svoje miesto na číselnej osi. Zlomok už nevyjadruje, čo máme urobiť, ale **koľko niečoho je**:

- $3/4$ hodiny = 45 minút
- $1/2$ metra = 50 cm
- $2/3$ litra = konkrétne množstvo tekutiny

Zlomok môže označovať aj **množstvo, veľkosť alebo hodnotu**. **Prechod** od operátora k množstvu **je náročný**.

Žiak je dlho zvyknutý, že zlomok je „sloveso“ – teda akcia: „vezmi polovicu“, „zober tretinu“. Neskôr však má pochopiť, že zlomok je aj „podstatné meno“ – samostatné číslo: „polovica (tretina) je číslo medzi 0 a 1“.

Prechode od operátora k množstvu

Problém teda spočíva v prechode od predstavy „urob časť z niečoho“ k predstave „táto časť je sama o sebe číslo“.

Z pohľadu vyššej matematiky (Teoretická aritmetika) zlomky predstavujú racionálne čísla, pričom dva zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ budú predstavovať to isté racionálne číslo, ak bude platiť rovnosť

$$ad = cb.$$

Je zrejmé, že množina racionálnych čísel obsahuje všetky pravé zlomky, ktorých čitateľ je celé číslo a menovateľ je kladné prirodzené číslo.

Tento fakt využijeme v školskej matematike, keď sa zameriavame na prácu so zlomkami $\frac{a}{b}$ a s desatinnými číslami. Desatinné čísla prezentujeme ako výsledok delenia čitateľa menovateľom m ($a : b$, $b \neq 0$). Názov racionálne číslo používame len zriedkavo. Pri zavádzaní operácií sčítania a násobenia racionálnych čísel v školskej matematike sa opierame o sčítanie a násobenie zlomkov. Pre ľubovoľné dva zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ definujeme:

$$\textit{stanie} : \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

$$\textit{nsobenie} : \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Je dôležité pripomenúť žiakom pravidlo: Pred vykonávaním každej operácie so zlomkami ich najprv upravíme na základný tvar a po výpočte tiež výsledný zlomok vykrátíme na základný tvar.

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Príbeh je didaktický nástroj, nie ilustrácia.
2. Učiteľ sa musí naučiť: rozpoznať polopravdu a nepodporiť ju autoritou.
3. Učiteľ by mal využívať rôzne príbehy k tematickému celku zlomky (čas, dĺžka, financie).

Reflexné otázky pre študentov

1. Kedy je algebraický postup nebezpečný?
2. Ako oddeliť správny výsledok od správneho porozumenia? Pozrite si podkapitolu „Výsledok - porozumenie“
3. Posúďte Cilkinu uvažovanie pri riešení úlohy 6.4.1.

UKÁŽKA (NE)SPRÁVNEHO POROZUMENIA CHÁPANIA FUNKCIE ZLOMKU.

Ukážka z práce Hejný, M. a kol., 25 kapitol z didaktiky matematiky , [HEJ, 2004].

Poznamenajme, že žiaci v 6. ročníku ešte nepreberali formálne vzťahy pre operácie so zlomkami typu:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}.$$

Formálne vzorce pre operácie so zlomkami by mali byť zavedené až po tom, čo žiak rozumie, aký význam má výsledok v danom kontexte.

Cilka chodí do **6. triedy** a doteraz mala samé jednotky. V druhom polroku došlo k zmene učiteľa matematiky, ktorý ku koncu prvej hodiny dal náročnú úlohu.

Úloha pre Cilku

Kolko šestín je nutné pridať k dvom tretinám, aby sme dostali štyri štvrtiny?

Riešenie. [Cilkino riešenie]

Cilka chcela od pána učiteľa vysvetliť návod na riešenie takýchto úloh. Keď sa dozvedela, že návod neexistuje, zneistela. Za pomoci pána učiteľa a množstva obrázkov, ktoré jej pán učiteľ ponúkol, Cilka nedokázala určiť správny výsledok.

Nevzdávala sa. Nakoniec však zažiarila a zvolala:

„Už to viem! Je to na odčítanie zlomkov.“

Akože $4/4$ mínus $2/3$. To som vyrátala a dostala som $4/12$. Ale to (zvýši hlas) treba ešte vykrátiť dvomi, aby sme mali šestiny. To sú dve šestiny. Takže sú to dva. Je to tak?

Záver - zhodnotenie učiteľa.

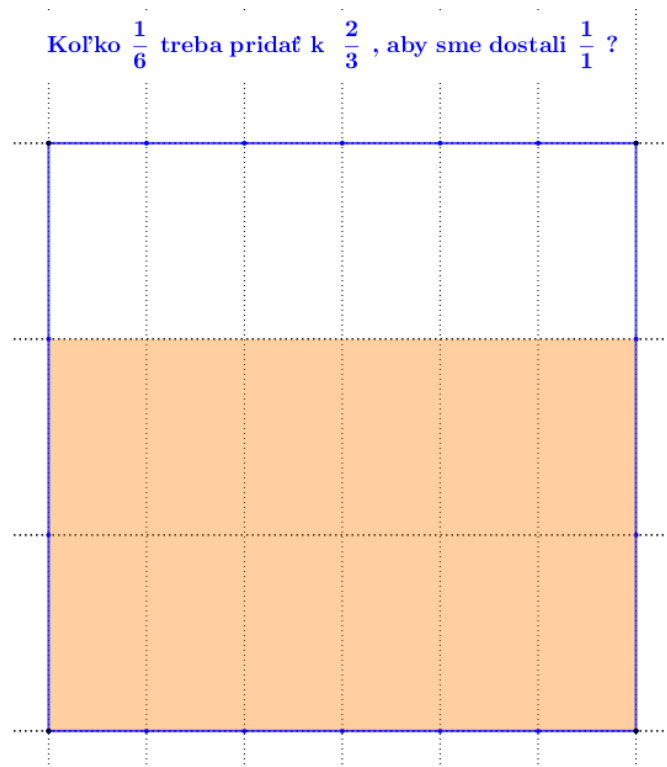
„Radosť Cilky a moja bezmocnosť spôsobili, že som túto **polopravdu** zbabelo odsúhlasil

a vzdal som sa ďalšieho vysvetľovania.“

□

Poznámky.

1. Podľa prof. Hejného: “ „Zrejme pre Cilku zlomok nie je objekt, ale len dvojica čísel oddelená vodorovnou čiarou.“ Súhlasíte s týmto názorom?
2. V čom je výnimočný Cilkin algebraický postup?
3. Pokúste sa vytvoriť vhodný separovaný model, ktorý by pomohol Cilke vyriešiť túto úlohu a argumentačne zdôvodniť riešenie. Naš návrh modelu/appletu z obrázka 6.32 si môžete stiahnuť [Tu](#).



Obr. 6.32: Cilkinovo riešenie. Model na dopĺňovanie zlomku.

4. Analyzujte situáciu keby sme pozmenili úlohu takto: Koľko tretín je nutné pridať k dvom pätinám, aby sme dostali štyri štvrtiny?
5. Ktorú z metód v takto pozmenenú úlohu je výhodnejšie aplikovať - Cilkinu, či (nezverejnenú) metódu „nového učiteľa“?
6. Nájdite univerzálny (generický) model na interpretáciu úloh typu: Koľko o $\frac{1}{p}$ treba pridať k $\frac{1}{q}$, aby sme dostali $i \frac{m}{m}$?

6.4.2 Výsledok - porozumenie

1. Základná téza:

Správny výsledok ešte neznamená správne porozumenie. Pri zlomkoch môže žiak získať správne číslo aj z nesprávnych dôvodov. Nie je to „vina“ žiaka, ale didaktické riziko, za ktoré zodpovedá učiteľ.

2. Prečo sú zlomky na to „nebezpečné“:

Zlomky majú viacero významov (mnohosť – operátor – adresa). Problém nastáva, keď úloha vyžaduje jeden význam, ale žiak použije iný a náhodou dostane správny výsledok.

- **Operátor:** „vezmi $3/4$ z niečoho“
- **Mnohosť (veľkosť):** „ $3/4$ je číslo medzi 0 a 1“
- **Adresa:** „bod $3/4$ na číselnej osi“

3. Kľúčový rozdiel:

- **Správny výsledok** = číselná zhoda s očakávaným riešením (dá sa rýchlo overiť skúškou).
- **Správne porozumenie** = zhoda medzi významom pojmu a spôsobom riešenia (odhalí sa v novom alebo pozmenenom kontexte).

Porozumenie sa netestuje jedným príkladom.

4. Cilkin príklad – prečo môže byť výsledok správny, ale porozumenie nie:

Úloha: „Koľko šestín je nutné pridať k dvom tretinám, aby sme dostali štyri štvrtiny?“

Cilka urobí: $4/4 - 2/3 = 4/12 = 2/6$.

- **Prečo je výsledok „správny“:** číselne sedí a dá sa overiť spätným dosadením.
- **Prečo porozumenie nemusí byť správne:** žiak môže manipulovať so symbolmi (ako s „dvoma číslami oddelenými čiarou“) bez porozumenia, čo znamená odčítanie a čo predstavuje výsledok v danom kontexte.

5. Jedno-vetové vysvetlenie pre študentov:

Žiak môže mať pravdu v čísle, ale myliť sa v pojme.

(Alebo: Výsledok patrí matematike, porozumenie patrí žiakovi.)

6. Praktický didaktický test porozumenia (diagnostika):

Ak žiak rozumie, zvládne aj malú zmenu úlohy. Ak nerozumie, správny výsledok sa mu „rozpadne“.

- **Pôvodná úloha:** Koľko šestín treba pridať k $2/3$, aby sme dostali $4/4$?
- **Pozmenená úloha:** Koľko tretín treba pridať k $2/5$, aby sme dostali $4/4$?

Pri zmene kontextu sa ukáže, či ide o porozumenie, alebo o mechanický postup.

7. Ako má učiteľ reagovať (čo učiť budúcich učiteľov):

- **Čo nerobiť:** nehodnotiť iba výsledok, nepovedať „je to správne, poďme ďalej“.
- **Čo robiť:** pýtať sa na význam a mentálny model žiaka, napr.:
„Čo si vlastne odčítal?“
„Čo znamená 4/4 v tejto úlohe?“
„Kde by si to ukázal na číselnej osi?“

Učiteľ nehľadá len chybu vo výpočte, ale zisťuje, ako žiak chápe pojem zlomku.

8. Vhodná didaktická formulácia:

Správne porozumenie sa prejaví schopnosťou riešiť úlohu aj po zmene kontextu, nie len dosiahnutím správneho číselného výsledku.

9. Hodnotenie Cilkinho riešenia?

Ako by ste hodnotili Cilkinho riešenie keby bola žiačkou 8. ročníka ZŠ?

Dôležité

Oddelenie správneho výsledku od správneho porozumenia znamená skúmať, či žiak pracuje s pojmom zlomku ako s matematickým objektom, alebo len manipuluje so symbolickým zápisom.

6.5 Reálne čísla

Didaktické ciele kapitoly

Po absolvovaní kapitoly by mal študent učiteľstva matematiky:

1. rozumieť archimedovskej¹ vlastnosti množiny reálnych čísel a jej významu v školskej matematike,
2. chápať reálne číslo ako reprezentanta v geometrickom modeli, bod na číselnej osi,
3. rozlišovať presnú a aproximovanú hodnotu,
4. vedieť vysvetliť, prečo sa iracionalita na ZŠ dokazuje len výnimočne.

¹Usporiadaná množina \mathbb{R} je archimedovská, ak $\forall x, y \in \mathbb{R}, 0 < x < y, \exists n \in \mathbb{N} : x(n-1) \leq y < xn$.

Metodické poznámky pre vyučujúceho

Artificial Intelligence (AI) môže významne pomáhať pri:

1. vizualizácii operácií s reálnymi číslami v separovaných modeloch,
2. vytváraní aproximácií reálnych čísel a ich porovnávaní,
3. generovaní diskusných otázok a tvorbe pracovných listov, prípadne testov.

Definícia 6.11

Reálne čísla sú čísla racionálne a čísla iracionálne. Iracionálne čísla sú čísla, ktoré sa nedajú vyjadriť v tvare zlomku ku $\frac{p}{q}$.

Termín reálne číslo zaviedol René Descartes (1637) ako spoločný názov pre racionálne a iracionálne čísla.

- Viac ako dve tisíc rokov boli známe typy iracionálnych čísel ako odmocniny niektorých prirodzených čísel $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$
- Euler (1737) dokázal, že číslo e (základ prirodzeného logaritmu) je iracionálne a Lambert ((1768) dokázal, že **Ludolfovo číslo** π iracionálne.
- Charles Hermit (1873) dokázal transcendentnosť čísla e .
- Ferdinand von Lindemann (1882) ukázal, že číslo π je transcendentné - nie je riešením algebraickej rovnice s celočíselnými koeficientami

Ak chceme na strednej škole rozvíjať abstraktné predstavy žiakov o reálnych číslach, je nevyhnutné systematicky podporovať ich prácu s modelmi reálnych čísel a vytvárať priestor na hlbšie porozumenie tejto problematiky. Takáto práca však kladie zvýšené nároky na čas, organizáciu vyučovania aj na didaktickú pripravenosť učiteľa.

V školskej praxi preto často zostávame pri základných, prevažne intuitívnych predstavách o reálnych číslach, ktoré postačujú na riešenie bežných úloh, no len zriedka vedú k hlbšiemu pochopeniu štruktúry tohto číselného oboru.

Zároveň však nemožno prehliadnúť, že časť žiakov – najmä tých, ktorí majú k matematike prirodzený vzťah – prejavuje záujem o hlbšie a presnejšie uchopenie pojmu reálneho čísla. Úlohou učiteľa je byť na takýto záujem pripravený, vedieť ho usmerniť a primerane rozvíjať, a to aj nad rámec minimálnych požiadaviek učiva.

Modely reálnych čísel

Sú dva a s obidvoma sa stretne už žiak základnej školy.

1. **Aritmetický** model - **množina** všetkých čísel.
2. **Geometrický** model - **priamka** (číselná os).

Hoci ide o dve rôzne množiny, ich vzájomný izomorfizmus dovoľuje stotožniť ich prvky a nerozlišovať medzi číslom x a bodom X so súradnicou x . Z geometrického modelu získa žiak veľmi názorne poznatok o štyroch dôležitých vlastnostiach množiny \mathbb{R} . Uvedieme geometrickú interpretáciu týchto 4 vlastností, ktoré vyzerajú prijateľne a zrozumiteľnejšie pre žiakov stredných škôl. Najskôr základná vlastnosť:

Vzťah medzi aritmetickým a geometrickým modelom

Každému reálnemu číslu odpovedá práve jeden bod na číselnej osi.

Teraz 4 dôležité vlastnosti množiny \mathbb{R} :

1. Ak sú X, Y dva rôzne body na číselnej osi o , tak pre súradnice týchto bodov nastáva práve jeden z prípadov: $x < y, x > y$ (bod X leží vľavo od Y , Y leží vľavo od X) [usporiadaná množina].
2. Medzi každými dvoma rôznymi bodmi existuje bod [hustá množina].
3. Ak bod B leží vnútri úsečky AX a ak na polpriamke \overrightarrow{AX} zostrojíme postupnosť bodov $B_1 = B, B_2, B_3, \dots$ tak, že postupne nanášame úsečku AB (t. j. $|AB_i| = i|AB|$), tak po istom počte krokov prekročíme bod X (budeme mimo úsečky AB [Archimedova axióma]).
4. Na priamke osi o nie sú diery [spojitá množina].

Interpretácia

V školskej matematike má archimedovská vlastnosť predovšetkým interpretačný význam – pomáha pochopiť, že reálne čísla nemajú „nekonečne malé“ ani „nekonečne veľké“ medzery.

Vzťah medzi aritmetickým a geometrickým modelom reálnych čísel je možné efektívne podporiť využitím dynamických modelov v prostredí GeoGebra. Tieto modely umožňujú žiakom experimentovať s číselnou osou, sledovať **aproximáciu iracionálnych čísel** a názorne pochopiť vlastnosti množiny \mathbb{R} , ako sú hustota či archimedovská vlastnosť. Ich význam spočíva najmä v tom, že sprístupňujú abstraktné pojmy bez potreby formálnych dôkazov.

Aproximácia

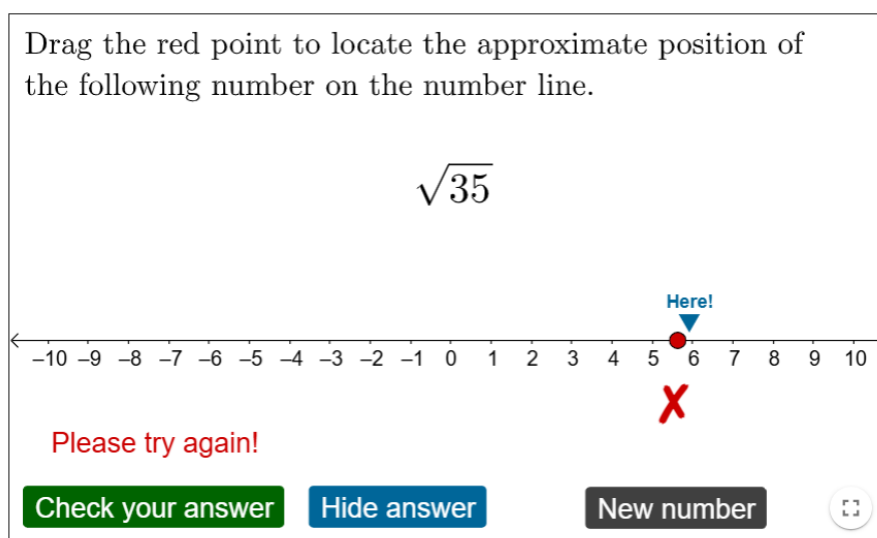
Práca s aproximáciami pripravuje žiakov na neskoršie chápanie limitných procesov bez potreby ich formálneho zavedenia.

Uvedieme dve ukážky takýchto modelov, ktoré sme prevzali z GeoGebra servera.

1. Real Numbers on the Number Line

Na obrázku 6.33 je zobrazená pozícia reálneho čísla $\sqrt{35}$ pomocou interaktívneho appletu. Applet umožňuje náhodne vygenerovať reálne číslo na číselnej osi. Žiak navrhne približnú polohu tohto reálneho čísla na číselnej osi, ktorej správnosť si môže overiť pomocou tlačidla *Check your answer*.

Applet si môžete aktivovať [Tu](#).



Obr. 6.33: Pozícia reálneho čísla na číselnej osi

2. Rational and Irrational Numbers in Decimal Form

Na obrázku 6.33 je zobrazený zápis reálneho čísla $\frac{1}{23}$ pomocou interaktívneho appletu. Applet umožňuje vypísať desatinný rozvoj reálneho čísla podľa vopred nastavených kritérií (výber možnosti - racionálne/iracionálne číslo, počet desatinných miest, formu zápisu v stĺpcoch). Žiak po zadaní čísla uvidí rozvoj reálneho čísla. Zároveň môže zistiť (ne)periodickosť zadaného čísla.

Applet si môžete aktivovať [Tu](#).

Z pohľadu školskej matematiky je dôležité, aby žiaci chápali vzájomný vzťah medzi reálnym číslom a jeho geometrickou interpretáciou. Ide o východisko k analytickej geometrii priestoru \mathbb{E}_1 . Číselná os je kľúčovým spojovacím prvkom aritmetiky a geometrie.

Rozširovanie oboru celých čísel je rozdelené na dve etapy.

1. Zavádzanie racionálnych čísel v školskej matematike. Táto etapa je zahrnutá do tematických celkov, ktoré sa vzťahujú na prácu so zlomkami a s riešením lineárnych rovníc na ZŠ.

Hippasus² ešte pre dokázaním Pytagorovej vety pravdepodobne dospel k záveru, že $u^2 = 1^2 + 1^2$. Dnes vieme, že to predstavuje kvadratickú rovnicu s celočíselnými koeficientmi $u^2 = 2$, ktorej koreňom je odmocnina z 2.

S využitím vlastností deliteľnosti ukážeme, že táto rovnica **nemá** v obore racionálnych čísel \mathbb{Q} riešenie.

Dôkaz. Dokážeme to nepriamo. (Dôkaz je určený pre študentov SŠ.)

Nech existuje racionálne číslo $r \in \mathbb{Q}$, ktoré je riešením rovnice $x^2 = 2$. Potom zrejme $r = \frac{p}{q}$, pričom celé čísla p, q sú nesúdeliteľné. Najväčší spoločný deliteľ čísel p, q je rovný číslu jedna.

Po dosadení do rovnice $x^2 = 2$ a po ekvivalentných úpravách dostaneme rovnosť $p^2 = 2 \cdot q^2$. Na pravej strane rovnosti je určite číslo párne. Z vlastností deliteľnosti celých čísel vyplýva, že číslo 2 delí číslo na pravej strane rovnosti a zároveň musí deliť aj číslo na ľavej strane rovnosti. Využijeme skutočnosť, že druhá mocnina párneho čísla je opäť párne číslo a druhá mocnina nepárneho čísla je nepárne číslo. Teda číslo p^2 je párne, preto musí byť aj číslo p párne. (Dokážte to). To znamená, že je v tvare $p = 2k$. Po dosadení do rovnosti $p^2 = 2 \cdot q^2$ dostávame $(2k)^2 = 2 \cdot q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$.

Analogickou úvahou zistíme, že číslo q je párne. Keďže aj číslo p je párne, tak najväčší spoločný deliteľ čísel p, q je väčší alebo rovný číslu 2.

To je spor s našim predpokladom, že riešením je racionálne číslo $r = \frac{p}{q}$, kde p, q sú nesúdeliteľné celé čísla. Pozrite si zápis dôkazu v [GeoGebre Tu](#). \square

Na ZŠ sa dôkaz iracionality $\sqrt{2}$ nevyžaduje – jeho cieľom je rozvoj logického myslenia, nie procedurálna zručnosť.

6.6 Seminárne zadanie

Rôzne zadania.

1. V GeoGebre vytvorte applet pre model "Teplomer". Postup konštrukcie si otvorte [Tu](#).
2. Vytvorte aspoň jednu prezentáciu s niektorou s tém:

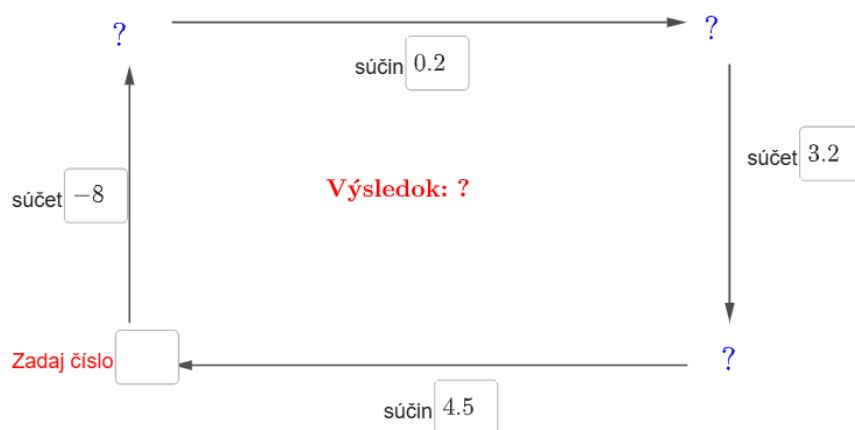
Cvičenie.

1. Nech a, b , kde a, b, c sú prirodzené čísla. Potom existujú také celé čísla s, t , že $sa + tb = \text{nsd}(a, b)$. Použite matematickú indukciu a Euklidov algoritmus. Larson, 3.1.2.
2. Rovnica $ax + by = c$, kde a, b, c sú celé čísla, má celočíselné riešenie práve vtedy, keď $d = \text{nsd}(a, b)$ delí c . Ak navyše (x_0, y_0) je nejaké celočíselné riešenie, tak pre každé celé číslo k aj čísla $x' = \frac{x_0 - bk}{d}$, $y' = \frac{y_0 - ak}{d}$ sú riešením a všetky celočíselné riešenia majú tento tvar. Larson, 3.1.4.

²Podľa povesti bol Hippasus zvrhnutý z lode do mora a utopený, aby objav iracionality zostal utajený.

- Navrhните postup ako nabrať jeden liter vody ak máme k dispozícii len 9 a 16 litrovú nádobu.
- Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je zlomok $\frac{21n+4}{14n+3}$ v základnom tvare. Larson, 3.1.5.
- Dokážte, že pre každé dve za sebou idúce Fibonacciho čísla $F_n, F_{n+1}, n > 2$ sú navzájom nesúdeliteľné v základnom tvare. Larson, 3.1.10.
- Nájdite také číslo (zadajte ho do ľavého dolného okna), aby výsledok bol rovný danému číslu. **Úlohu riešte aj algebraicky pomocou rovníc.**

Zadaj do ľavého dolného okna také číslo, aby výsledok bol rovný tomuto číslu.



Obr. 6.36: Doplnovačka, applet je dostupný [Tu](#).

Kapitola 7

Rovnice a nerovnice

Kapitola 8

Konštrukčná geometria

Kapitola 9

Analytická geometria

Kapitola 10

Funkcie

Kapitola 11

Gamifikácia v matematickom vzdelávaní

Použité zdroje

[BAL, 2005] Ball, D. L., Hill, H. C. & Bass, H. (2005, Fall). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29, 14 – 22.

Dostupné online: https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/65072/Ball_F05.pdf?sequence=4&isAllowed=y.

Upravená SK verzia https://lms.umb.sk/pluginfile.php/159047/mod_book/chapter/2771/Ball_a_kol___Vediet__matematiku_pre_vyu%C4%8Dovanie.pdf.

[BEC, 2005] Bečvár, J.: Matematika ve starém Egyptě, str 55-56.

Dostupné online: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/401853/DejinyMat_23-2003-1_6.pdf

[BEC, 2003] Bečvár J., Bečvářová M., Vymazalová H.(ed.): Matematika ve starověku Egypt a Mezopotámie. Prometheus, Praha 2003, s. 69. Dostupné Tu.

[BLU, 1991] Blum, W., Niss, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educ Stud Math* 22, 37–68 (1991).

[ERN, 1978] Erndnijev, P. M.:Prepodavanje matematiky v škole. Moskva, Prosvedčeniye 1978

[HEJ, 1989] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1989.

Dostupné online: https://lms.umb.sk/pluginfile.php/159047/mod_book/chapter/2771/Hejny-Teoria-vyucovania-matematiky-2.pdf.

[HEJ, 2004] Hejný, M. a kol.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha, 2004. ISBN 80-7290-189-3.

Dostupné online: <http://mdisk.pedf.cuni.cz/SUMA/MaterialyKeStazeni/PublikaceKnihy/25KapitolZDM.pdf>.

[HEJ, 1995] Hejný, M. (1995). Mozgování se slovními úlohami. *Pedagogika*, XLV, 386–399.

- [HEJ, 2003] Hejný, M. (2003). Anatomía slovnej úlohy o veku. *Disputationes scientificae Universitatis Catholicae in Ružomberok*, 3(3), 21–32.
- [HOF, 2019] Hofmanová, A. (2019). *Matematika – slovné úlohy a všetko ostatné*. Vydavateľstvo Hofmanová.
- [KOB, 2014] Kobza, V. (2014). Modelové riešenie problémovej úlohy.
- [KOM, 1948] Komenský, J. A.: *Velká didaktika*. Brno: Komenium, 1948.
Dostupné online: https://lms.umb.sk/pluginfile.php/159047/mod_book/chapter/2771/Komensky_Didaktika_velka.pdf.
- [JOY, 1994] Joyce, D. E.: *Euclid's Elements*. Clark University, 1994.
Dostupné online: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>.
- [KUR, 2016] Kuřina, F.: Matematika jako pedagogický problém. Gaudeamus. Univerzita Hradec Králové 2016.
- [LAR, 1983] Larson, L. C.: *Problem-Solving Through Problems*. Springer-Verlag, New York, 1983. ISBN 978-0387961712.
Dostupné online: <https://math.la.asu.edu/~ifulman/spring13/mat194/problem-solving.pdf>.
- [POL, 2010] Pavlovičová, G., Švecová, V., Záhorská, J. (2010). *Metódy riešenia matematických úloh pre štúdium učiteľstva pre primárne vzdelávanie*. Nitra: UKF.
- [POL, 1945] Pólya, G.: *How to Solve It*. Princeton University Press, Princeton, 1945.
- [POD, 2020] Podmanický, M.: Zlomky a GeoGebra, Práca DPŠ, FPV UMB 2020.
Dostupné online: https://lms.umb.sk/pluginfile.php/159047/mod_book/chapter/5698/Podmanicky_Zlomky_ZaverPracaDPS.docxTu.
- [REN, 2013] Rendl, M., Vondrová, N. a kol.: Kritická místa matematiky na základní škole očima učitele. UK Praha 2013.
- [SCH, 1985] Schoenfeld, A. H.: *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Orlando, 1985. ISBN 978-0126288704.
- [SED, 2013] Šedivý, O. a kol. (2013). *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky*. FPV UKF Nitra.
- [SER, 1907] Servít, F.: *Eukleidovy Základy (Elementa)*. Jednota českých matematiků, Praha, 1907.
Dostupné online: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Eukleides.pdf>.

[STU, 1877] F. J. Studnička, *Algebra pro vyšší třídy středních škol*. Praha: Jednota českých matematiků, 1877.

Dostupné online: Česká digitální matematická knihovna (DML-CZ).

[UCE, 2000] [UCE, 2000] Učebnice matematiky