Afinné zobrazenia interaktívne

Portál:	Virtuálna Univerzita Mateja Bela	Vytlačil(a):	Pavol Hanzel
Kurz:	Vybrané kapitoly z aritmetiky a analytickej geometrie	Dátum:	štvrtok, 24 apríla 2025, 06:49
Kniha:	Afinné zobrazenia interaktívne		

Obsah

Úvod

Historické poznámky
- Informačné listy

Vektorový priestor
- Lineárna závislosť vektorov
- Dimenzia a báza
- Súradnice v báze
- Skalárny súčin vektorov
- Vonkajší a vektorový súčin
- Cauchy-Schwarz nerov.
- Schmidt ortogon. proces

Afinný n-rozmerný priestor
- Lineárna súradnicová sústava
- Veta o súradniciach
- Afinný podpriestor
- Vzájomná poloha útvarov

Euklidovský priestor
- Príklad
- Lineárna kombinácia bodov
- Deliaci pomer

Afinné zobrazenie
- Príklad - tri body
- Rôzne dimenzie
- Všeobecne dim
- Jednoznačnosť AZ

Analytické vyjadrenie
- Rozšírené matice
- Rovnoľahlosť
- Obraz troch bodov
- Obraz repéra
- Samodružnosť

Zhodnostné zobrazenia
- Posunutie
- Osová súmernosť
- Stredová súmernosť
- Otáčanie
- Vzor a obraz

Cvičenie

Záver

Literatúra

Doplňujúce poznámky

Úvod

> **Analytická geometria** je oblasť matematiky, v ktorej sa **geometrické útvary študujú pomocou súradnicovej sústavy** (pomocou analytických vyjadrení - rovníc).

Afinná geometria patrí medzi kľúčové disciplíny modernej matematiky, pričom zohráva zásadnú úlohu nielen v čisto teoretickej rovine, ale aj v aplikáciách v prírodných vedách, inžinierstve či informatike. Jej **základom je štúdium geometrických útvarov a ich transformácií**, ktoré zachovávajú vzájomnú polohu bodov a ich lineárne vlastnosti. Tento prístup umožňuje popisovať a analyzovať komplexné geometrické štruktúry prostredníctvom vektorových a maticových metód. Ukážka Tu.

Cieľom tejto učebnice je poskytnúť študentom prehľad základných princípov afinného priestoru a zobrazení. Prezentované učivo postupne prechádza od fundamentálnych konceptov vektorového priestoru cez základy afinných transformácií až po ich aplikácie. Učebnica je štruktúrovaná tak, aby nadväzovala na znalosti z lineárnej algebry, čím poskytuje čitateľom pevný teoretický základ a zároveň ich pripravuje na pokročilejšie štúdium geometrie a príbuzných oblastí.

Prvá časť sa venuje základom vektorových priestorov, čo zahŕňa lineárnu závislosť, dimenziu, bázu a skalárny súčin. Táto sekcia slúži ako vstupná brána pre pochopenie štruktúry afinného priestoru, kde sú predstavené jeho základné vlastnosti vrátane vzájomnej polohy podpriestorov.

Nasledujúca časť sa sústreďuje na afinné zobrazenia, ktoré sú kľúčovým nástrojom na pochopenie transformácií geometrických útvarov, ako sú posunutia, rovnoľahlosti a osové súmernosti. Záver učebnice zahŕňa aj konkrétne príklady a úlohy, ktoré pomáhajú študentom upevniť teoretické poznatky prostredníctvom praktických aplikácií.

Dnes existujú vedľa seba dva spôsoby budovania geometrie:

1. **Syntetický** - bez súradníc
    - názorná, v ktorej sa konštrukcie geometrických útvarov uskutočňujú v súlade s axiomatickým systémom; dôkazy tvrdení sa robia prevažne konštrukčne;
    - vychádzame z euklidovského priestoru podľa (Euklidove Základy);
    - potom zavádzame pojem vektora a následne vektorového priestoru;
    - syntetická metóda neformuluje explicitne vzťah geometrie k základnému poľu priestoru (Čižmár, J., 2007);
    - základná schéma budovania: **najprv vybudujeme euklidovský priestor a potom skonštruujeme vektorový priestor nad daným poľom**;
    - s algebraickým pohľadom na štruktúru vektorových priestoroch ste sa oboznámili v kurze Lineárna algebra.
2. **Analytický** – so súradnicami
    - do hry vstupuje algebraické pole – najčastejšie ide pole reálnych čísel;
    - v 19. storočí sa v analytickej metóde začali využívať vektory a začali sa **skúmať afinné (polohové) vlastnosti vektorov** – operácie s vektormi;

- pri tejto metóde sa v geometrii pracuje ľahšie, v súčasnosti významne pomáhajú aj počítače;
- viac príležitostí skĺznuť k mechanickému počítaniu namiesto porozumenia geometrickej podstate daného problému;
- základná schéma budovania: **najprv skonštruujeme vektorový priestor nad daným poľom a potom afinný priestor resp. euklidovský priestor**.

> V tejto učebnici sa zameriame na druhý spôsob budovania geometrie. Budeme sa venovať základným pojmom, ktoré sa viažu na:
>
> 1. vektorový priestor;
> 2. afinný priestor;
> 3. afinné transformácie - ukážka Tu;
> 4. zhodnostné transformácie euklidovskej roviny.

Táto učebnica je určená pre študentov vysokých škôl, najmä tým, ktorí sa zaoberajú matematikou, fyzikou či informatickými disciplínami. Autori veria, že poskytnutý obsah im pomôže nielen pri riešení úloh v rámci štúdia, ale aj pri praktickom využití geometrických metód v ich budúcej kariére.

Historické poznámky

Historický vývoj analytickej (afinnej) geometrie.

Analytická geometria, známa aj ako kartézska geometria, je základnou disciplínou matematiky, ktorá spája algebru s geometriou. Tento vývojový proces však nebol okamžitý; jeho korene siahajú až do staroveku, pričom jeho postupné zdokonaľovanie pokračovalo až do 20. storočia.

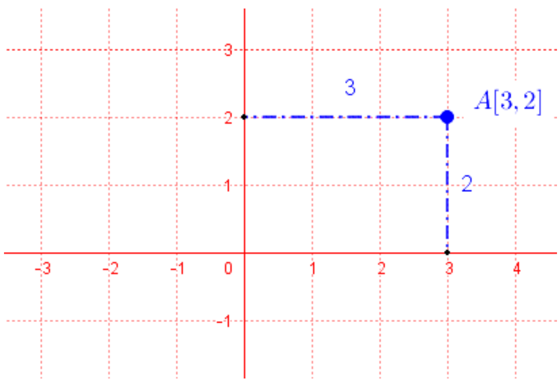
1. **Od Euklida k moderným priestorom.**

Už v 3. storočí pred naším letopočtom Euklides vo svojom diele Základy (**Elements**) položil základy geometrie, ktorú dnes označujeme ako euklidovskú. **Euklidovská geometria** opisuje priestor pomocou základných geometrických prvkov: bodov, priamok a rovín. Euklidov prístup sa sústredil na primitívne pojmy (elementy) bod, priamka a rovina a na primitívne vzťahy medzi týmito pojmami, Základné elementy opisoval pomocou logických axióm a deduktívnych dôkazov, pričom na konštrukciu väčšiny základných geometrických útvarov používal len pravítko a kružidlo. Takéto konštrukcie dodnes nesú pomenovanie po Euklidovi – euklidovské konštrukcie. Euklidovská geometria fungovala výhradne na konštrukčných geometrických princípoch. Tento systém bol čisto geometrický, bez použitia čísel a algebrických rovníc popisoval geometrické objekty a vzťahy medi nimi.
V roku 1635 nastala zásadná revolúcia. Francúzski matematici René Descartes a Pierre de Fermat zaviedli **súradnicový systém**, ktorý umožnil prepojenie geometrických útvarov s algebrickými rovnicami. Tento nový spôsob uvažovania, publikovaný Descartesom v diele La Géométrie, umožnil riešiť geometrické problémy algebrickými metódami.
Francúzski matematici René Descartes a Pierre de Fermat zohrali zásadnú úlohu vo vzniku analytickej geometrie tým, že zaviedli súradnicový systém, ktorý umožnil prepojenie geometrických a algebrických princípov. Ich práca vznikala na pozadí veľkých spoločenských a vedeckých zmien 17. storočia, keď sa renesancia a skoré novoveké myslenie zameriavali na racionalitu, dôkazy a systematické skúmanie prírody.

2. **René Descartes a jeho dielo "La Géométrie" (1637)**.

René Descartes (1596–1650), považovaný za otca moderného filozofického racionalizmu, predstavil svoju metódu spojenia geometrie a algebry vo svojom diele La Géométrie, ktoré bolo súčasťou širšej publikácie *Diskurz o metóde*. Dielo je dostupné v PDF formáte, pozri prácu [DEC, 1954]. Francúzsky originál sa nachádza na stránke Univerzity v Nantes a je dostupný Tu. Pozrite si na prvej strane posledný odsek, ktorý hovorí o násobení úsečiek. Formát PDF Tu. V tomto diele opísal princípy karteziánskej súradnicovej sústavy, v ktorej každý bod $A \in \pi$ z roviny π je reprezentovaný dvojicou reálnych čísel.

$$A = [x, y]; x, y \in \mathbb{R}$$



Otvorte si dynamický obrázok Tu.

Historický význam Descartovho prístupu:

Prepojenie geometrie s algebrou: Descartes ukázal, že geometrické problémy, ako sú umiestnenie bodov, kreslenie priamok či riešenie úloh s kružnicami, možno riešiť pomocou algebrických rovníc. Napríklad algebrická rovnica $y = ax + b$ predstavuje priamku, čo bolo revolučné v porovnaní s tradičným čistým geometrickým prístupom.

Vedecký kontext:

Descartesovo dielo vzniklo v čase, keď sa začínali systematicky rozvíjať fyzika a matematika. Jeho prístup poskytol nástroj na popis pohybu a zmien v priestore, čím významne prispel k vývoju mechaniky a neskôr k Newtonovým zákonom pohybu.

Karteziánska sústava:

Karteziánska súradnicová sústava, pomenovaná podľa Descartesovho latinského mena Cartesius, položila pevné základy pre modernú analytickú geometriu. Descartes ukázal, že ak si zvolíme pevný referenčný bod (počiatok) a súradnicové osi, môžeme popísať celý priestor pomocou čísel.

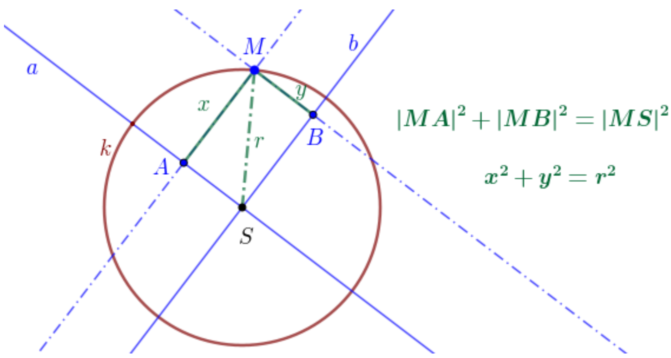
3. **Pierre de Fermat a jeho prínos**.

Pierre de Fermat (1601–1665), známy aj ako zakladateľ modernej teórie čísel, sa nezávisle od Descarta venoval aj geometrii. Aj keď Fermat svoje práce nezverejnil systematicky počas svojho života, jeho korešpondencia a rukopisy dokazujú, že už pred Descartesom používal algebraické metódy na riešenie geometrických problémov. Fermat skúmal **vlastnosti kriviek a priamok pomocou algebrických rovníc**, čím podobne ako Descartes položil základy analytickej geometrie. Fermatove myšlienky o krivkách a algebrických rovniciach mali významný vplyv na neskorší vývoj matematiky, vrátane diferenciálneho a integrálneho počtu. Pierre de Fermat síce nepoužíval súradnicovú sústavu tak, ako ju poznáme dnes. Jeho prístup k algebraickému popisu geometrických útvarov bol založený na konceptoch, ktoré predchádzali karteziánsku súradnicovú sústavu Reného Descarta.

Príklad.

Fermat kružnicu definoval ako množinu bodov, ktoré majú konštantnú vzdialenosť r^2 od stredu, pričom túto vzdialenosť opisoval algebraicky. Fermat používal písmená na označenie ***premenných***/vzdialeností, ktoré zodpovedali dĺžkam úsekov. V modernej notácii môžeme jeho prístup chápať nasledovne:

- Predstavme si, že x, y označujú vzdialenosti bodu M od dvoch pevných referenčných priamok a, b , ktoré sú na seba kolmé.



Dynamickú konštrukciu s pohyblivým bodom M si otvoríte Tu.

- Kružnica je potom definovaná ako súčet druhých mocnín týchto vzdialeností a tento súčet je rovný štvorcu polomeru: $x^2 + y^2 = r^2$. To vyplýva z Pytagorovej vety, z euklidovskej geometrie.

Z uvedeného príkladu vidieť, že "zatiaľ" ***Fermat nepotreboval súradnicové osi***. Až Descartes si uvedomil, že priamky a, b možno generalizovať, a tak vznikla karteziánska sústava.

4. **Dedičstvo Descarta a Fermata**

Zavedenie súradnicového systému znamenalo začiatok novej éry v matematike. Predstavovalo *revolúciu* v geometrii. Umožnilo analyzovať geometrické útvary algebrickými metódami, čím prepojil dve dovtedy samostatné oblasti matematiky.

Inšpirácia pre ďalších vedcov

Ich práca bola kľúčová pre vývoj diferenciálneho a integrálneho počtu (Newton, Leibniz), lineárnej algebry a fyziky.

Praktické aplikácie

Dnes je karteziánska geometria základom všetkých moderných matematických a technických disciplín, od počítačovej grafiky až po kvantovú mechaniku.

Práca Descarta a Fermata nebola len matematickou inováciou, ale aj súčasťou širšieho intelektuálneho hnutia, ktoré formovalo moderný vedecký pohľad na svet. Analytická geometria tak ukazuje, ako interdisciplinárne myslenie a prepojenie filozofie, matematiky a prírodných vied môžu viesť k revolučným objavom.

Analytická geometria, ktorá vznikla spojením geometrie a algebry v 17. storočí, sa v nasledujúcich storočiach neustále vyvíjala a rozširovala o nové koncepty. Kým Descartes a Fermat položili základy tým, že zaviedli súradnicový systém, ďalšie pokroky smerovali k formalizácii a zovšeobecneniu geometrických a algebrických princípov. Jedným z dôležitých krokov v tomto vývoji bola práca Bernharda Bolzana a Hermanna Grassmanna, ktorí prispeli k rozvoju konceptu vektorového priestoru.

5. **Bernhard Bolzano a operácie s bodmi a priamkami**.

Bernhard Bolzano (1781–1848), český matematik a filozof, sa vo svojej práci venoval množstvu otázok spojených s matematikou, logikou a filozofiou. V oblasti geometrie skúmal operácie s bodmi a priamkami, pričom jeho metódy vykazovali základné prvky konceptu, ktorý dnes označujeme ako vektor. Bolzanove myšlienky:

- **Operácie medzi bodmi**: Bolzano naznačil, že body a priamky môžu byť manipulované algebraickými spôsobmi, hoci tieto operácie ešte neboli presne formalizované. Pozrite si prezentáciu Tu.
- Geometrický význam: V jeho práci sa objavujú náznaky toho, že priamky možno považovať za výsledky operácií medzi bodmi, čím vytvoril predobraz vektorových operácií.

Predstava "smeru a veľkosti": Hoci Bolzano explicitne nepracoval s pojmom vektor, jeho opis geometrických objektov naznačuje chápanie smeru a veľkosti ako základných charakteristík geometrických entít. Bolzano tak pripravil pôdu pre neskoršie formalizované koncepty, ktoré umožnili jasnejšie definovať vzťahy medzi bodmi a priamkami v priestore. Ďalšie informácie o Bolzanovom vplyve na afinnú geometriu si prečítajte Tu.

6. **Hermann Grassmann a jeho dielo "Die Lineale Ausdehnungslehre"**.

Hermann Grassmann (1809–1877), nemecký matematik a filológ, je dnes považovaný za jedného z najvýznamnejších priekopníkov modernej lineárnej algebry. Vo svojej knihe Die Lineale Ausdehnungslehre, 1844 (Lineárna teória rozšírení) **predstavil koncept, ktorý dnes poznáme ako vektorový priestor**. Kniha Hermanna Grassmanna "Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik" z roku 1844 je dostupná online Tu. Táto kniha bola revolučná nielen pre geometriu, ale aj pre algebru a matematickú analýzu. Grassmannove inovácie:

- ***Definícia vektora***:

  Grassmann po prvýkrát presne formalizoval pojem vektora ako matematického objektu, ktorý má nielen veľkosť, ale aj smer. Vektory už neboli viazané len na konkrétne geometrické objekty, ale mohli existovať v abstraktnom priestore.
- ***Operácie s vektormi***:

  Zaviedol sčítanie vektorov, ktoré umožňuje kombinovať dva vektory tak, že výsledkom je nový vektor. Definoval násobenie vektora skalárom, čo mení jeho veľkosť bez zmeny smeru.
- ***Vektorový priestor***:

  Grassmann opísal priestory, v ktorých tieto operácie platia, čím položil základy pre koncept vektorového priestoru. Tento priestor bol zovšeobecnením karteziánskej geometrie, pretože umožňoval pracovať s n-dimenzionálnymi priestormi.
- ***Lineárna závislosť a nezávislosť***:

  Zaviedol pojmy, ktoré dnes označujeme ako lineárna závislosť a nezávislosť vektorov, čo je kľúčové pre štúdium dimenzií a bázy vektorového priestoru

Grassmannovo dielo bolo revolučné, no vo svojej dobe nebolo okamžite pochopené ani ocenené. Až s rozvojom modernej matematiky v druhej polovici 19. storočia sa jeho práca ukázala ako mimoriadne dôležitá. Grassmannove myšlienky našli široké uplatnenie v lineárnej algebre, analytickej geometrii a neskôr aj v kvantovej fyzike.

Pozrite si tiež poznámky Tu.

> **Poznámky**.
>
> 1. Prechod od Bolzana ku Grassmannovi:
>
>   Zmena myslenia. Kým Bolzano ešte stále pracoval v rámci tradičnej geometrie, Grassmann urobil zásadný krok smerom k abstrakcii. Táto zmena myslenia znamenala prechod od vizuálneho a geometrického uvažovania k algebrickému formalizmu. Tento posun umožnil rozšírenie geometrických konceptov do vyšších dimenzií a položil základy modernej matematiky.
> 2. Dedičstvo v modernej matematike
>
>   Práca Bolzana a Grassmanna predstavuje kľúčové míľniky vo vývoji analytickej geometrie a lineárnej algebry. Grassmannove vektorové priestory sa stali základom pre vývoj mnohých oblastí matematiky, od diferenciálnej geometrie cez funkcionálnu analýzu až po teóriu relativity. Tieto koncepty ukazujú, ako sa matematické myslenie dokáže vyvíjať od konkrétnych geometrických pozorovaní k abstraktným a univerzálnym princípom.
> 3. Pozrite si prácu o zrode n- rozmernej geometrie: Čižmár, J. Začiatky a formovanie základov n - rozmernej geometrie. Dostupné Tu.

7. **William Rowan Hamilton**

William Rowan Hamilton (1805–1865), írsky matematik, fyzik a astronóm, zohral kľúčovú úlohu vo vývoji matematiky a rozšírení geometrických konceptov zavedením kvaterniónov v roku 1843. Kvaternióny, ktoré sú štvordimenzionálne entity, predstavujú prelomový krok v algebrizácii geometrie a analýze priestoru. Hamiltonova práca poskytla matematický základ pre manipuláciu s bodmi a vektormi v trojrozmernom priestore a neskôr aj vo fyzike a informatike.

Zrod kvaterniónov

Hamiltonova práca na kvaterniónoch bola motivovaná jeho snahou rozšíriť koncept komplexných čísel do troch alebo viacerých dimenzií. Komplexné čísla, ktoré sa vyjadrujú v tvare $a+bi$, kde i je imaginárna jednotka ($i^2=-1$), boli už v jeho čase dobre pochopené a používané na reprezentáciu dvojrozmerných rotácií a transformácií. Hamilton sa však snažil vytvoriť podobnú algebru pre trojrozmerný priestor.

Po rokoch neúspechov si Hamilton uvedomil, že trojdimenzionálny systém nezachováva kľúčové vlastnosti komplexných čísel, ale štvordimenzionálny systém áno. Tento prelomový objav nastal 16. októbra 1843, keď si Hamilton počas prechádzky v Dubline uvedomil rovnice pre kvaternióny a vyryl ich na most Broom Bridge.

Čo sú kvaternióny?

Kvaternióny sú rozšírením komplexných čísel, ktoré majú tvar:

$$q=a+bi+cj+dk,$$

kde a, b, c, d sú reálne čísla a i, j, k sú imaginárne jednotky, ktoré spĺňajú nasledovné pravidlá:

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1.$$

Tieto pravidlá vedú k nekomutatívnej algebre, čo znamená, že násobenie kvaterniónov nie je komutatívne ($ab \neq ba$). Tento nekomutatívny charakter bol novinkou a odklonom od tradičných matematických systémov.

Použitie kvaterniónov v geometrii

Kvaternióny umožnili opisovať rotácie a transformácie v trojrozmernom priestore, pričom nahradili komplikovanejší systém založený na maticiach alebo eulerovských uhloch. Hlavné aplikácie zahŕňajú:

Reprezentácia bodov a vektorov:

- Kvaternióny môžu reprezentovať body a vektory v trojrozmernom priestore ako čisté kvaternióny ($0+bi+cj+dk$).

Rotácie:

- Rotácie okolo akejkoľvek osi v trojrozmernom priestore môžu byť efektívne reprezentované pomocou kvaterniónov. To je mimoriadne užitočné v grafike, robotike a leteckom inžinierstve, pretože kvaternióny eliminujú problém gimbal lock (straty stupňov voľnosti pri rotáciách).

Transformácie:

- Kvaternióny zjednodušujú výpočty spojené s transformáciami objektov v priestore, čo sa stalo základom pre moderné 3D modelovanie a počítačové simulácie.

Historický význam a vplyv kvaterniónov

Hamiltonove kvaternióny mali zásadný význam pre rozvoj matematiky a fyziky. Ich vplyv možno pozorovať v niekoľkých oblastiach.

Vektorová analýza:

- Kvaternióny inšpirovali neskorší vývoj vektorovej analýzy. William Thomson (Lord Kelvin) a Peter Guthrie Tait, ktorí pracovali s kvaterniónmi, položili základy modernej vektorovej matematiky.

Fyzika:

- Kvaternióny našli uplatnenie vo fyzike, najmä v kvantovej mechanike a teórii relativity, kde sa používajú na opis rotácií a symetrií.

Informatika a počítačová grafika:

- V modernej dobe sú kvaternióny neoddeliteľnou súčasťou 3D počítačovej grafiky, kde slúžia na manipuláciu a animáciu objektov v trojrozmernom priestore.

Hamiltonov odkaz

William Rowan Hamilton svojím objavom kvaterniónov nielenže rozšíril hranice geometrie, ale tiež položil základy pre moderné chápanie algebrických štruktúr a ich aplikácií. Kvaternióny sa stali jedným z prvých príkladov nekomutatívnej algebry a ukázali, že abstraktné matematické systémy môžu mať praktické a revolučné aplikácie. Hamiltonova práca tak symbolizuje spojenie čistého matematického myslenia s praktickými inováciami.

8. **Giuseppe Peano a axiomatizácia vektorového priestoru**.

Moderná definícia vektorového priestoru sa zrodila v roku 1888 vďaka talianskemu matematikovi Giuseppemu Peanovi. Jeho práca znamenala významný krok vo formalizácii matematiky a položila pevné základy pre ďalší rozvoj geometrie a algebry. Peano bol priekopníkom axiomatického prístupu, ktorý matematiku zbavil závislosti na intuitívnych predstavách a priniesol dôslednú logickú štruktúru.

Peanov prínos spočíval v tom, že definoval vektorový priestor prostredníctvom systému axióm, ktoré presne špecifikovali, ako majú vektory a operácie medzi nimi fungovať. Tento formálny prístup sa stal základom modernej matematiky.

Peanove axiomatické pravidlá:

- Operácie medzi vektormi:
  Zaviedol sčítanie vektorov, ktoré musí byť komutatívne a asociatívne.
  Určil existenciu nulového vektora, ktorý nemá žiadny smer ani veľkosť.
  Definoval opačný vektor, ktorý v kombinácii s pôvodným dáva nulový vektor.
- Násobenie skalárom:
  Peano formalizoval násobenie vektora skalárnou hodnotou, ktoré mení veľkosť (a prípadne smer) vektora.
- Axiomatické vlastnosti:
  Operácie musia byť kompatibilné so skalármi, pričom skaláre patria k číselnému poľu, zvyčajne k reálnym alebo komplexným číslam.

Peanov prístup bol revolučný, pretože umožnil abstrahovať vektorové priestory od ich geometrickej intuície a rozšíriť ich na ľubovoľné dimenzie a aplikácie.

Rozšírenie vektorového priestoru v 20. storočí.

Na prelome 19. a 20. storočia Peanove axiomatické základy rozvíjali ďalší významní matematici, ako Stefan Banach a David Hilbert. Títo vedci priniesli nové typy priestorov, ktoré významne obohatili matematickú analýzu a funkcionálnu analýzu.

Stefan Banach a Banachove priestory

Stefan Banach (1892–1945) bol poľský matematik, ktorý zaviedol pojem Banachovho priestoru, čo je kompletný normovaný vektorový priestor. Tento koncept sa stal základom funkcionálnej analýzy a našiel široké uplatnenie v rôznych oblastiach matematiky.

Charakteristika Banachových priestorov:

- Banachov priestor je vektorový priestor vybavený normou, ktorá umožňuje merať "veľkosť" vektorov.
- Má vlastnosť úplnosti, čo znamená, že každá Cauchyho postupnosť vektorov v tomto priestore má limit, ktorý patrí do priestoru.

Aplikácie Banachových priestorov:

- Teória diferenciálnych rovníc.
- Kvantová mechanika a teória distribúcií.
- Numerická matematika a optimalizácia.

David Hilbert a Hilbertove priestory

David Hilbert (1862–1943), nemecký matematik, zaviedol koncept Hilbertovho priestoru, ktorý je špeciálnym prípadom Banachovho priestoru, kde norma vychádza zo skalárneho súčinu.

Charakteristika Hilbertových priestorov:

- Tieto priestory majú skalárny súčin, ktorý umožňuje definovať ortogonalitu a uhol medzi vektormi.
- Sú mimoriadne dôležité v kvantovej fyzike, kde reprezentujú stavový priestor kvantových systémov.

Aplikácie Hilbertových priestorov:

- Kvantová mechanika, kde opisujú vlnové funkcie.
- Štatistická analýza a strojové učenie.
- Teória signálov a Fourierova analýza.

> **Vývoj od Euklida po moderné priestory**.
> Celkový vývoj analytickej geometrie ilustruje fascinujúcu transformáciu geometrických intuící na abstraktné algebraické štruktúry. Celý vývoj môžeme zhrnúť do 5 bodov:
> 1. **Euklidova geometria**: Geometria založená na axiómach a vizuálnej intuícii.
> 2. **Descartov súradnicový systém**: Spojenie geometrie a algebry, ktoré umožnilo analyzovať geometrické problémy pomocou rovníc.
> 3. **Grassmannove vektorové priestory**: Zavedenie vektorov ako základných stavebných kameňov priestoru.
> 4. **Peanove axiomatické pravidlá**: Formalizácia vektorových priestorov a oslobodenie od geometrickej intuície.
> 5. **Banachove a Hilbertove priestory**: Zovšeobecnenie vektorových priestorov a ich aplikácia v modernej matematike a fyzike.

Niektoré časti tejto kapitoly boli upravené v súčinnosti s umelou inteligenciou.

Analytická geometria 1.

Stručná osnova predmetu

1. **Vektorový priestor**. Skalárny súčin vektorov a jeho vlastnosti. Norma vektora, normovaný vektor. Schwartzova nerovnosť.
2. Uhol dvoch vektorov. Ortogonálne a ortonormálne vektory. Schmidtov ortogonalizačný proces. Totálne kolmé a kolmé podpriestory.
3. Vonkajší súčin v n-rozmernom vektorovom priestore. Vektorový súčin v 3-rozmernom vektorovom priestore. Ortogonálny doplnok vektorov.
4. **Afinný priestor** a jeho vlastnosti. Lineárna sústava súradníc. Transformácia lineárnej sústavy súradníc. Deliaci pomer, stred dvojice bodov.
5. Podpriestory afinného priestoru, parametrické vyjadrenie afinného podpriestoru, vzájomná poloha afinných podpriestorov.
6. Priečka mimobežiek, určenie priečky daným bodom a daným smerom.
7. Spojenie afinných podpriestorov. Všeobecná rovnica nadroviny. Zväzok priamok a zväzok rovín.
8. **Euklidovský priestor**. Karteziánska súradnicová sústava. Normálový vektor nadroviny. Vzdialenosť dvoch bodov (bodu od podpriestoru).
9. Vzájomná poloha podpriestorov v n-rozmernom euklidovskom priestore. Vzdialenosť dvoch mimobežných podpriestorov. Odchýlka dvoch podpriestorov.
10. **Afinné zobrazenie** a jeho anylytické vyjadrenie.

Analytická geometria 2.

Stručná osnova predmetu

1. Analytické vyjadrenie zhodného zobrazenia. Samodružné prvky zhodnosti. Grupa zhodností.
2. **Posunutie a rovnoľahlosť** ako afinné zobrazenie.
3. Zhodné zobrazenia v rovine, ich analytické vyjadrenie. **Stredová súmernosť. Otočenie**.
4. **Osová súmernosť**, jej analytické vyjadrenie.
5. Klasifikácia zhodností euklidovskej roviny a v euklidovskom priestore. Skladanie zhodných zobrazení.
6. **Podobné zobrazenie**. Samodružné prvky podobnosti. Analytické vyjadrenie podobnosti euklidovskej roviny.
7. Úlohy riešené s využitím programu GeoGebra.
8. Zhodné a podobné **zobrazenia v rovine a v priestore v učive ZŠ a** SŠ.
9. Rovnoľahlosť v školskej matematike. Rovnoľahlosť kružníc. Využitie rovnoľahlosti.

Vektorový priestor

Syntetický (geometrický) prístup

1. **Orientovaná úsečka** je úsečka, ktorej krajné body majú určené poradie (pripúšťame aj nulovú orientovanú úsečku). Ak $\overrightarrow{AB}$ je orientovaná úsečka, bod A sa nazýva jej začiatočný bod, bod B jej koncový bod.
2. Hovoríme, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ sú **súhlasne orientované** (rovnobežné, majú ten istý smer), ak polpriamky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ incidujú s priamkami tej istej osnovy a zároveň:
   - jedna z polpriamok je časťou druhej alebo
   - obe polpriamky ležia v tej istej polrovine určenej priamkou AB .
   - V opačnom prípade sa orientované úsečky nazývajú nesúhlasne orientované. Symbolický zápis pre súhlasne orientované úsečky $AB \uparrow\uparrow CD$ a nesúhlasne orientované $AB \uparrow\downarrow CD$.
3. Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ sú **ekvivalentné** ak stredy úsečiek AD, BC sú totožné.
   - Množina všetkých orientovaných úsečiek ekvivalentných s $\overrightarrow{AB}, A \neq B$ sa nazýva **geometrický vektor**.
   - Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ sa nazýva **reprezentant** (umiestnenie) vektora $\vec{u}$, zapisujeme $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
   - Geometrický vektor sa nazýva aj **voľný vektor** (množina všetkých orientovaných úsečiek) a konkrétna orientovaná úsečka sa nazýva **viazaný vektor**.
4. Orientovaná úsečka $\overrightarrow{BA}$ je reprezentuje **opačný vektor** k vektoru $\vec{u}$ a označujeme ho $-\vec{u}$.

Otvorte si applet Tu.

Cvičenie - [MOZ, 1.1.16]. (Nezabudnite na nulové vektory.) Riešenie (pozrite si prvú časť súboru) Tu.

Východiskové definície

Vo všeobecnosti **vektor je množina** všetkých navzájom zhodných, súhlasne orientovaných úsečiek.

Umiestnením vektora sa nazýva každá orientovaná úsečka, ktorá tento vektor určuje. Umiestnením vektora do bodu sa nazýva také jeho umiestnenie, ktorého začiatočným bodom je daný bod.

Vektor určený orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ označíme tiež ako rozdiel bodov: $B - A$. Otvorte si applet Tu.

"Slovo vektor je prevzaté z latinského slova vector („nositel", ...). Vektor vznikol z potrieb fyziky (kde napr. vektor interpretujeme ako silu), do matematiky zaviedol vektory v r. 1853 írsky matematik a fyzik W. R. Hamilton (1805 – 1865). Takmer súčasnú podobu dal „vektorovému počtu" na konci 19. storočia americký fyzik J. W. Gibbs (1839 – 1903)." Prevzaté z práce (Vranková).

Okruh $(O, +, \cdot)$ s jednotkou $1 \in O \quad (1 \neq 0 \in O)$, v ktorom každý nenulový prvok má vzhľadom na násobenie inverzný prvok, nazývame telesom. **Komutatívne teleso**, v ktorom násobenie je komutatívna operácia, nazývame **pole**.

Nech sú dané

- neprázdna množina V, ktorej prvky nazývame vektory,
- pole P, ktorého prvky nazývame skaláry,
- zobrazenie $+ : \ V \times V \to V$, ktoré nazývame **sčítanie vektorov**,
- zobrazenie $\cdot : \ P \times \to V$, ktoré nazývame **násobenie vektora skalárom** (prvkom z telesa P).

Definícia (Vektorový priestor).

Vektorový priestor nad poľom[1)] P je množina V spolu s dvoma binárnymi operáciami ($+, \cdot$) práve vtedy, keď súčasne platia vzťahy:

1. $(V, +)$ je **abelovská grupa**.

   Vektorové axiómy

2. **asociatívnosť** pre násobenie vektora skalárom: $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (ab) \cdot \vec{v}$
3. **invariancia** vektora pri vynásobení jednotkovým prvkom poľa: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$,

   kde 1 označuje multiplikatívnu identitu vo P
4. **distributívnosť** (skalárneho) násobenia k sčítaniu vektorov: $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$
5. distributívnosť násobenia vektora $\vec{v}$, ku sčítaniu skalárov a, b: $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

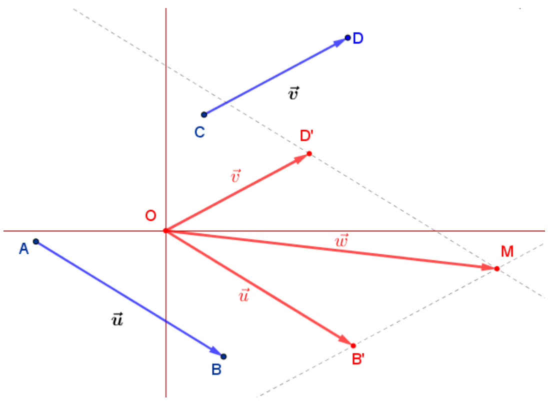
Na zopakovanie základných pojmov a vlastností algebraickej štruktúry "Vektorový priestor" odporúčame okrem práce od profesora Haviara aj e-knihu venovanú vektorovým priestorom od RNDr. Edity Vrankovej z Trnavskej univerzity v Trnave. Tiež na zopakovanie operácií s vektormi odporúčame prácu "Vektory v geometrii" od PaedDr. Miroslava Tisoňa, PhD., ktorá je dostupná Tu.

Interpretujte vzťahy uvedené v definícii vektorového priestoru v prostredí GeoGebra!

Analytický (algebraický) prístup

Príklady vektorového priestoru.

1. **Vektory v rovine** so sčitovaním a násobením ako ho poznáte zo strednej školy, tvoria vektorový priestor nad telesom reálnych čísel $\mathbb{R}$.



Otvorte si applet Tu.

2. **Usporiadané n-tice** reálnych čísel s operáciami $+, \cdot$ definovanými po súradniciach tvoria vektorový priestor nad telesom reálnych čísel $\mathbb{R}$.

   $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2 \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 \ldots, x_n + y_n)$

   $c \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n)$

   V ďalších častiach budeme prevažne pracovať s vektormi, ktoré tvoria usporiadané n-tice reálnych čísel a to len pre rovinu $n = 2$ resp. priestor $n = 3$.

Ďalšie príklady vektorových priestorov sú množiny (všetkých)

1. polynómov v jednej neurčitej nad poľom reálnych čísel, operácia - sčítanie polynómov "podľa rovnakých mocnín",

2. reálnych funkcií, operácia - bežný súčet funkčných hodnôt,
3. matíc typu $m \times n$, operácia sčítania matíc - sčítanie v rovnakom riadku a stĺpci.

Pozrite si prácu [HAV, 2000], str. 40,41, dostupné Tu.

Cvičenie. Riešenie (pozrite si druhú časť súboru, príklady 1 až 4) Tu.

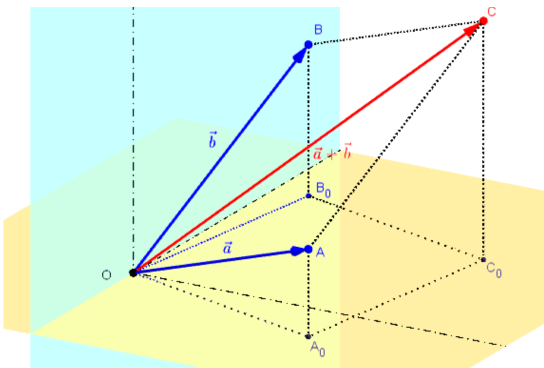
Nech je daná množina V usporiadaných trojíc resp. dvojíc s obvyklým sčitovaním "po zložkách". Zistite, či množina V je vektorovým priestorom nad poľom P.

1. $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$; $P = \mathbb{R}$.
2. $V = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; x - 3y = 0\}$; Riešte pre $P = \mathbb{Z}$ a pre $P = \mathbb{R}$.
3. $V = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; x + 3y = 1\}$; $P = \mathbb{R}$.
4. Rozhodnite, či množina $V = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; p(x); 8p(0) + 6p(1) = 0\}$ je vektorovým priestorom nad telesom $\mathbb{R}$. (Množina je tvorená polynómami, pre ktoré je súčet osemnásobku hodnoty v nule a šesťnásobku hodnoty v jednotke rovný nule.)

Riešenia.

1. Uzavretosť operácie sčítania.
   Pre ľubovoľné dva vektory $\vec{a} = \left(a_1, a_2, \frac{a_1+a_2}{2}\right), \vec{b} = \left(b_1, b_2, \frac{b_1+b_2}{2}\right) \in V$ pre ich súčet platí

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \frac{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)}{2}\right) =$$
$$= \left(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \frac{(a_1+b_1)+(a_2+b_2)}{2}\right) \in V$$



Otvorte si applet Tu.

   odkiaľ dostávame, že operácia + je uzavretá.
2. Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom prípade.
3. Operácia sčítania zrejme nie je uzavretá, lebo pre ľubovoľné dva vektory $\vec{a} = (1 - 3a, a), \vec{b} = (1 - 3b, b) \in V$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2 - 3(a + b), a + b) \notin V.$$

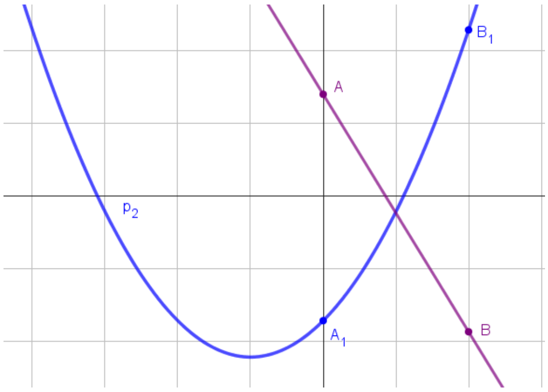
4. Uvažujme dva ľubovoľné polynómy $p_1(x), p_2(x)$, ktoré sú prvkami množiny V. Ďalej majme polynóm $p_{12}(x) = p_1(x) + p_2(x)$, ktorý je ich súčtom. Pre polynómy $p_1(x), p_2(x)$ platí

$$8p_1(0) + 6p_1(1) = 0,$$
$$8p_2(0) + 6p_2(1) = 0.$$

   Sčítaním oboch rovníc získame $8[p_1(0) + p_2(0)] + 6[p_1(1) + p_2(1)] = 0$. Odkiaľ dostávame

$$8p_{12}(0) + 6p_{12}(1) = 0,$$

   teda že polynóm $p_{12}(x)$, čo je súčet ľubovoľných dvoch polynómov množiny V, je opäť prvkom tejto množiny. Tým sme dokázali uzavretosť sčítania vektorov.



Polynómy 1. a 2. stupňa, dynamický obrázok Tu.

Pokúste sa o grafickú interpretáciu vektorov, ak budeme brať do úvahy iba polynómy 1. stupňa alebo len polynómy 2. stupňa. Viete určiť počiatočné a koncové body týchto vektorov? Otvorte so applet Tu.

Poznámka.

V nasledujúcom texte budeme vektor $\vec{u}$ označovať aj symbolom $\boldsymbol{u}$.

---

[1] Pole je teleso s komutatívnou multiplikatívnou operáciou $\cdot$.

[2] Pozrite si prácu [SBI] na stránke https://reseneulohy.cz/1356/vektorovy-prostor-ii

Lineárna závislosť vektorov

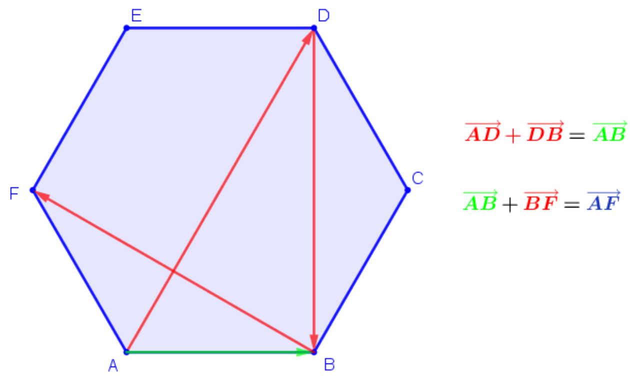
V predchádzajúcej kapitole sme pri definícii vektorového priestoru uviedli, že dvojica $(V,+)$ je Abelova komutatívna grupa. To znamená, že binárna operácia "+" je komutatívna a asociatívna. Zároveň sme definovali násobenie skalárom. Pomocou týchto dvoch operácií pripomenieme pojmy: lineárna kombinácia, závislosť a nezávislosť vektorov, ktoré sú dôležité a potrebné pri geometrickej manipulácii s vektormi.

Definícia (Lineárna kombinácia vektorov.)

Nech je daných n vektorov $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$. Každý vektor $\boldsymbol{v}$ vyjadrený v tvare $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n$, kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sú reálne čísla, sa nazýva lineárna kombinácia vektorov $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$.

Príklady.

1. V rovine je daný pravidelný 6-uholník $ABCDEF$. Nech $\boldsymbol{u} = D - A, \boldsymbol{v} = B - D, \boldsymbol{w} = F - B$. Určte lineárnu kombináciu (vektor) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ pomocou vrcholov 6-uholníka.



Riešenie Tu.

2. V rovine je daný šesťuholník, ktorého vrcholy sú určené vzťahmi:

   $A,\ A + \boldsymbol{u},\ A + 2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v},\ A + 2\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v},\ A + \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v},\ A + \boldsymbol{v}$.

   Dokážte, že tento šesťuholník je súmerný podľa stredu $S = A + u + v$. Zadanie Tu. Riešenie Tu.

Definícia (Lineárna závislosť vektorov).

Vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n; n \geq 1$ voláme lineárne závislé, ak rovnica

$$\vec{0} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

je splnená tak, že aspoň jedno z čísel $c_1, c_2, \ldots, c_n$ je rôzne od nuly.

Veta.

Ak sú vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ lineárne závislé, tak aspoň jeden z nich je lineárnou kombináciou ostatných.

Definícia (Lineárna nezávislosť vektorov).

Vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n; n \geq 1$ voláme lineárne nezávislé, ak rovnica

$$\vec{0} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

je splnená len pre $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Príklady.

1. Nech vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, , \boldsymbol{v}_3$ sú lineárne nezávislé, potom aj vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$ sú nezávislé. Dokážte to. **Riešenie** Tu.
2. Je daný pravidelný 6-uholník. Určte vektor: $\boldsymbol{w} = 3 \cdot \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$. **Riešenie** Tu.
3. Zistite lineárnu (ne)závislosť vektorov, ak
   - $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{v}_2 = (1,1,0), \boldsymbol{v}_3 = (1,0,0)$,
   - $\boldsymbol{v}_1 = (-1,2,1), \boldsymbol{v}_2 = (1,0,-1), \boldsymbol{v}_3 = (1,1,-1)$. **Riešenie** (str. 178) Tu .

   Využite Matrix calculator Tu.

Po zavedení pojmov lineárna závislosť a lineárna nezávislosť môžeme pristúpiť k pojmom **dimenzia** a **báza** vektorového priestoru. Predtým musíme zadefinovať lineárny obal r vektorov a pridať niektoré vektorové axiómy. V ďalšom budeme uvažovať vektorový priestor V nad telesom T .

Definícia (Lineárny obal).

Nech V je vektorový priestor nad telesom T a nech sú dané vektory $\boldsymbol{v_1}, \cdot\boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_r} \in V$. Potom množinu všetkých vektorov

$$M = \{a_1 \cdot \boldsymbol{v_1} + a_2 \cdot \boldsymbol{v_2} + \cdots + a_r \cdot \boldsymbol{v_r};\ a_i \in T,\ v_i \in V\}$$

nazývame **lineárny obal** vektorov $\boldsymbol{v_1}, \cdot\boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_r}$ alebo podpriestor generovaný vektormi $\boldsymbol{v_1}, \cdot\boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_r}$. Označujeme ho

$$M =: [\boldsymbol{v_1}, \cdot\boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_r}].$$

Ak platí $[\boldsymbol{v_1}, \cdot\boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_r}] = V$, hovoríme, že vektory $\boldsymbol{v_1}, \cdot\boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_r}$ generujú vektorový priestor V.

Cvičenie.

1. Zistite, či vektor $\boldsymbol{u} = (1,1,-1)$ patrí do lineárneho obalu množiny $M = \{\boldsymbol{x} = (1;2;3), \boldsymbol{y} = (1;0;2), \boldsymbol{z} = (-2;1;0)\}$.

   Dokážte, že ľubovoľný vektor $\boldsymbol{u} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ leží v lineárnom obale množiny M pre ľubovoľnú trojicu (a,b,c) reálnych čísel.
2. Je daná množina $M = \{(2,0,3),(4,1,4),(3,2,2) \subset \mathbb{Z}_5^3\}$. Rozhodnite, či je vektor $\boldsymbol{u} = (1,2,3)$ prvkom lineárneho obalu množiny M.

   Množina obsahuje trojice prvkov telesa $\mathbb{Z}_5$ zvyškových tried modulo 5.
3. Zistite, či vektor $\boldsymbol{u} = (7,2,-2)$ patrí do lineárneho obalu množiny $M = \{(1;0;-1),(2;1;0),(0;1;2),(5;2;-1)\}$. Ďalšie úlohy na Tu. Príklad riešenia Tu.

Riešenie.

Cvičenie 1

Hľadajme koeficienty α, β, γ, pre ktoré platí rovnosť

$$(a,b,c) = \alpha(1,2,3) + \beta(1,0,2) + \gamma(-2,1,0).$$

Po úprave a porovnaní jednotlivých zložiek dostávame sústavu

$$\begin{array}{ll} \alpha + \beta \ - 2\,\gamma & = a \\ 2\alpha + \qquad\ \ \gamma & = b \\ 3\alpha + 2\beta & = c \end{array}$$

Napríklad Gaussovou eliminačnou metódou (Otvor Tu) zistíme, že sústava má riešenie pre ľubovoľné $a, b, c \in R$.

$$\alpha = \frac{2a + 4b - c}{7}$$
$$\beta = \frac{-3a - 6b + 5c}{7}$$
$$\gamma = \frac{-4a - b + 2c}{7}$$

Medzi týmito riešeniami je jedno triviálne pre $a = b = c = 0$. Všetky ostatné sú netriviálne. Príkladom netriviálneho riešenia pre trojicu $a = 7; b = c = 0$ je $\alpha = 2, \beta = -3, \gamma = -4$. Potom platí

2 (1, 2, 3) − 3 (1, 0, 2) − 4 (−2, 1, 0) = (7, 0, 0).

Existuje teda netriviálna lineárna kombinácia vektorov $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$, ktorá je rovná nulovému vektoru. Teda vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ sú lineárne závislé. Pozrite si prácu [Olšák, str. 24].

Cvičenie 2

- Lineárny obal množiny M priestoru V je množina všetkých lineárnych kombinácií vektorov množiny M s koeficientmi z poľa. Teda stačí zistiť, či je možné vektor $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ zapísať ako lineárnu kombináciu vektorov množiny M.
- Vektor $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ patrí do lineárneho obalu množiny M ak existujú prvky $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$ tak, aby

  $$a \cdot (2, 0, 3) + b \cdot (4, 1, 4) + c \cdot (3, 2, 2) = (1, 2, 3).$$

  Pre každú vektorovú zložku získame rovnicu. Trojica nasledujúcich rovníc tvorí sústavu, ktorú vyriešime. Pozor – sústavu riešime nad $\mathbb{Z}_5$!

  $$\begin{aligned} 2a + 4b + 3c &= 1 \\ b + 2c &= 2 \\ 3a + 4b + 2c &= 1. \end{aligned}$$

  Sčítaním prvej a druhej rovnice dostaneme

  $$2a = 3,$$

  lebo $4b + 1b = 0(mod\ 5), 3c + 2c = 0(mod\ 5)$. Úpravou (mod 5) dostaneme $a = 4$. Sčítaním 3.r.+2.r. dostaneme

  $$3a + 4c = 0$$

  odkiaľ $a = 4, c = 3a = 2, b = 2 + 3c = 3$. Sústava má v poli $\mathbb{Z}_5$ riešenie. Vektor $\boldsymbol{u} = (1, 3, 2)$ je lineárnou kombináciou vektorov množiny M. Preto $\boldsymbol{u} \in [M]$.

Dimenzia a báza

Nech V je vektorový priestor nad telesom T. Po zavedení pojmov lineárna závislosť a lineárna nezávislosť sme zadefinovali lineárny obal ako množinu všetkých lineárnych kombinácií

$$M = \{a_1 \cdot \boldsymbol{v_1} + a_2 \cdot \boldsymbol{v_2} + \cdots + a_r \cdot \boldsymbol{v_r};\ a_i \in T,\ v_i \in V\},$$

kde $\boldsymbol{v_1}, \cdot\boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_r}$ sú vopred dané vektory priestoru V.
Teraz môžeme pristúpiť k pojmom **dimenzia** a **báza** vektorového priestoru. Predtým musíme a pridať niektoré vektorové axiómy.

Axiómy dimenzie - rozmeru

1. Nech vo vektorovom priestore V existuje **maximálne** n **lineárne nezávislých vektorov**, kde n je prirodzené číslo. Číslo n nazývame **dimenzia** vektorového priestoru.
2. Každá $(n+1)$ - tica vektorov je už lineárne závislá.
3. Podmnožina M vektorového priestoru V je jeho **báza** práve vtedy, keď každý vektor $\boldsymbol{v} \in V$ možno práve jediným spôsobom vyjadriť ako lineárnu kombináciu $a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n}$ navzájom rôznych vektorov množiny M.
4. Koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ nazývame **súradnice vektora v vzhľadom na bázu** M. Označujeme $\langle v \rangle_M$ a čítame „súradnice vektora $\boldsymbol{v}$ vzhľadom na bázu M.

Definícia (Báza vektorového priestoru).
Vektorový priestor V nad telesom T je **konečno-rozmerný,** ak existuje taká konečná množina vektorov $\boldsymbol{v_1}, \cdot\boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n} \in V$, že platí

$$V =: [\boldsymbol{v_1}, \cdot\boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}].$$

Báza je množina $\{\boldsymbol{v_1}, \cdot\boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\}$ lineárne nezávislých vektorov, ktorá generuje celý priestor V.

1. Vektorový priestor V o dimenzii n nad telesom T budeme označovať symbolom $V_n(T)$.
2. Vektorový priestor, ktorý sa skladá z práve jedného vektora (obsahuje len nulový vektor) označíme V_0

Príklad.
Majme množinu $V_2(\mathbb{R})$ všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel a operácie:

$\oplus:\ (a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ - sčítanie po zložkách.

$\odot:\ k \odot (a_1, a_2) = (k.\,a_1, k.\,a_2)$ - násobenie skalárom $k \in \mathbb{R}$,

kde $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in V_2(\mathbb{R})$ sú ľubovoľné usporiadané dvojice reálnych čísel. Ukážte, že množina $V_2(\mathbb{R})$ spolu s operáciami $\oplus, \odot$ je 2-rozmerný vektorový priestor. Nájdite aspoň jednu jeho bázu.

Pozrite si **riešenie** v samostatnom $\TeX$ súbore Tu.

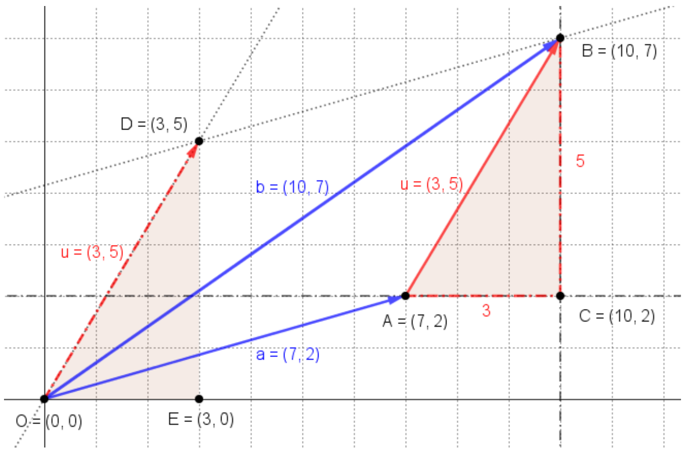
Poznámky.

1. Vektorový priestor $V_2(\mathbb{R}) = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$ je reprezentovaný množinou všetkých orientovaných úsečiek, ktoré sú určené ľubovoľnou usporiadanou dvojicou bodov v klasickej euklidovskej rovine.
2. Ak využijeme pravouhlý súradnicový systém s osami o_x, o_y a počiatkom O, tak jedno z umiestnení vektora $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ môžeme znázorniť ako orientovanú úsečku $\overrightarrow{OA}$, kde bod A má súradnice $[a_1, a_2]$. Všimnite si, že budeme rozlišovať zápis usporiadanej dvojice (okrúhle zátvorky) a súradnice bodu v rovine (hranaté zátvorky).
3. V stredoškolskej matematike sa vektor priamo definuje ako orientovaná úsečka so šípkou smerujúcou od počiatku $[0, 0]$ súradnicového systému k bodu $[a_1, a_2]$. Šípkou sa označuje "**orientácia**" vektora $\boldsymbol{a}$.
4. V písomnom texte budeme vektor $\boldsymbol{a}$ označovať symbolom $\vec{a}$.

Nech sú dané dva vektory $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in V_2(\mathbb{R})$. V pravouhlom súradnicovom systéme usporiadané dvojice $[a_1, a_2], [b_1, b_2]$ reprezentujú tiež dva body A, B v euklidovskej rovine. Označme $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Zrejme vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \simeq \overrightarrow{OD}$ je súčtom vektorov $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. Uvažujme o trojuholníkoch $\triangle ABC, \triangle ODE$, ktoré prezentuje obrázok "Súčet vektorov". Tieto trojuholníky sú zhodné: $\triangle ABC \simeq \triangle ODE$. V dôsledku tejto zhodnosti ľahko určíme súradnice súčtu vektorov.

Pre súradnice vektora $\boldsymbol{u}$, ktorý je súčtom vektorov $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ platí:

- $x(\vec{u}) = |OE| = |x(A) - x(B)|$,
- $y(\vec{u}) = |ED| = |y(A) - y(B)|$.



Otvorte si dynamický obrázok Tu.

Súradnice vektora $\vec{u}$ určeného orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB} \simeq \overrightarrow{OD}$, kde $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$ určíme ako rozdiely súradníc bodov B, A tj. $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Vytvorili sme operáciu: odčítavanie bodov, pričom:

Rozdielom dvoch bodov je vektor.

Vektor určený orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ môžeme zapísať aj ako $B - A$.

Cvičenie.

Daný je vektorový priestor

$$W = [(6, 1, 0, 2), (2, 3, 4, 1), (5, 1, 2, 3), (3, 0, 1, 4)] \subset \mathbb{Z}_7^4.$$

1. Nájdite nejakú bázu B priestoru W a určite jeho dimenziu.
2. Určete súradnice vektora $\vec{x}$ vzhľadom k báze B, ak

$$\langle \vec{x} \rangle_{k.b.} = (1, 2, 1, 1).$$

Priestor W obsahuje štvorice prvkov telesa $\mathbb{Z}_7$ zvyškových tried modulo 7.

Poznámka k cvičeniu.

Zápis $\langle x\rangle_{k.b.} = (1,2,1,1)$ hovorí, že súradnice vektora $\boldsymbol{x}$ voči kanonickej báze sú $(1,2,1,1)$. Súradnice vektora $\boldsymbol{x}$ voči kanonickej báze sú koeficienty lineárnej kombinácie vektorov kanonickej bázy dávajúcej vektor $\boldsymbol{x}$, tj.

$$\boldsymbol{x} = 1\cdot(1,0,0,0) + 2\cdot(0,1,0,0) + 1\cdot(0,0,1,0) + 1\cdot(0,0,0,1) = (1,2,1,1).$$

Súradnice vektora voči kanonickej báze predstavujú priamo zložky $(1,2,1,1)$ vektora $\boldsymbol{x}$.

Riešenie cvičenia.

1. Máme nájsť bázu vektorového priestoru W, ktorý je daný ako lineárny obal množiny generátorov

   $$[(6,1,0,2),(2,3,4,1),(5,1,2,3),(3,0,1,4)].$$

   Aby množina vektorov bola bázou, musí byť ešte lineárne nezávislá.
2. Ak teda nájdeme bázu $B = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\rangle$ musí pre súradnice vektora $\boldsymbol{x}$ platiť

   $$\boldsymbol{x} = (1,2,1,1) = x_1\cdot\boldsymbol{b}_1 + x_2\cdot\boldsymbol{b}_2 + x_3\cdot\boldsymbol{b}_3 + x_4\cdot\boldsymbol{b}_4.$$

   Z tejto vektorovej rovnice vypočítame súradnice $x_1, x_2, \ldots$. Najskôr treba upraviť maticu

   $$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 5 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   na trojuholníkový tvar (Pozor, pracujeme nad telesom resp. poľom $\mathbb{Z}_7$ zvyškových tried modulo 7!) Po prvej iterácii $(IV.r. + 2.II.r.; III.r. + ?; II.r. + 2\cdot I.r.)$ dostanme

   $$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 5 & 4 & 5\\ 0 & 4 & 6 & 4\\ 0 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

   Urobte ešte dve iterácie tak, aby ste dostali maticu

   $$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 5 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Hodnosť matice je rovná 2, preto pre lineárny obal platí $[(6,1,0,2),(2,3,4,1),(5,1,2,3),(3,0,1,4)] = [(6,1,0,2),(0,5,4,5)]$.

   Dimenzia je rovná 2 a aspoň jedna báza je určená lineárne nezávislou množinou vektorov

   $$B = \langle(6,1,0,2),(0,5,4,5)\rangle$$
4. Určte súradnice vektora $\boldsymbol{x} = (1,2,1,1)$ v tejto báze. Výpočet súradníc nájdete Tu.

Veta (Existencia bázy).

Každý netriviálny konečno generovaný vektorový priestor **má aspoň jednu konečnú bázu**.

Z vlastností hodnosti matíc ľahko odvodíme tvrdenie. Dôkaz nájdete napríklad v práci [HASa, 2020], str. 45-46].

Súradnice v báze

Bázu vektorového priestoru $V_n(\mathbb{R})$ tvorí ľubovoľná n**-tica lineárne nezávislých vektorov** $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$.

1. Bázu $V_n(\mathbb{R})$, ktorú tvoria n-tice reálnych čísel
$$(\vec{e_1} = (1, 0, \ldots, 0), \vec{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \vec{e_n} = (0, 0, \ldots, 1)),$$
budeme nazývať **jednotková (ortonormálna) báza**. Dokážte, že vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$ sú nezávislé.
2. Ľubovoľný vektor $\vec{v} \in V_n(\mathbb{R}) : \vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$, lebo platí
$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1 \cdot (1, 0, \ldots, 0) \oplus v_2 \cdot (0, 1, 0, \ldots, 0) \oplus v_n \cdot (0, 0, \ldots, 1)$$

Definícia (Súradnice vektora v báze).
Nech $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$ je jednotková báza a $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ je iná báza vektorového priestoru $V_n(\mathbb{R})$.

- Usporiadanú n-ticu $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ reálnych čísel nazývame súradnice vektora $\vec{v}$ v jednotkovej báze $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$, pričom zrejme platí
$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1 \cdot (1, 0, \ldots, 0) \oplus v_2 \cdot (0, 1, 0, \ldots, 0) \oplus v_n \cdot (0, 0, \ldots, 1).$$
- Súradnice $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vektora $\vec{v}$ v báze $\mathcal{A} = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$ budeme zapisovať pomocou dolného indexu
$$(w_1, w_2, \ldots, w_n)_{\mathcal{A}} = w_1 \cdot \vec{a_1} \oplus w_2 \cdot \vec{a_2} \oplus \ldots \oplus w_n \cdot \vec{a_n}.$$

Príklad.

- Nech $S = (\vec{a}(1, 1, 2),\ \vec{b}(2, 3, 4),\ \vec{c}(1, 2, 3))$ je báza priestoru $V_3(\mathbb{R})$. Nájdite vektor vo $V_3(\mathbb{R})$, ktorého súradnice vzhľadom k báze S sú $(-1, 3, 2)$.
- ♥ Nájdite súradnice vektora $u = (5, -1, 9)$ vzhľadom k báze S.

Riešenie.

1. Zrejme
$$\vec{v} = (-1).\,(1, 1, 2) + 3(2, 3, 4) + 2.(1, 2, 3) = (7, 12, 16).$$
Toto sú súradnice vektora $\vec{v}$ vzhľadom k jednotkovej báze. Je dôležité dodržať poradie prvkov bázy S.

2. Určiť súradnice vzhľadom k báze S znamená vektor $\vec{u}$ vyjadriť ako lineárnu kombináciu prvkov bázy S. Opäť treba dať pozor na poradie prvkov bázy. Musíme nájsť $r, s, t \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí:
$$\vec{u} = r.\,(1, 1, 2) + s.\,(2, 3, 4) + t.\,(1, 2, 3)$$
po dosadení
(r) $$(5, -1, 9) = r.\,(1, 1, 2) + s.\,(2, 3, 4) + t.\,(1, 2, 3).$$
Úlohu môžeme riešiť ako sústavu rovníc (vyriešte úlohu týmto spôsobom).
$$\begin{aligned} 5 &= 1.r + 2.s; + 1.t \\ -1 &= 1.r + 3.s + 2.t \\ 9 &= 2.r + 4.s + 3.t \end{aligned}$$
alebo rovnosť (r) prepíšeme na **maticový tvar** (vektory bázy zapisujeme do stĺpcov! Prečo?) takto:
$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$
Vyjadriť vektor $(r, s, t)^T$ (transponovaný zápis vektora) môžeme tak, že obe strany rovnice (iv) **vynásobíme zľava** inverznou maticou

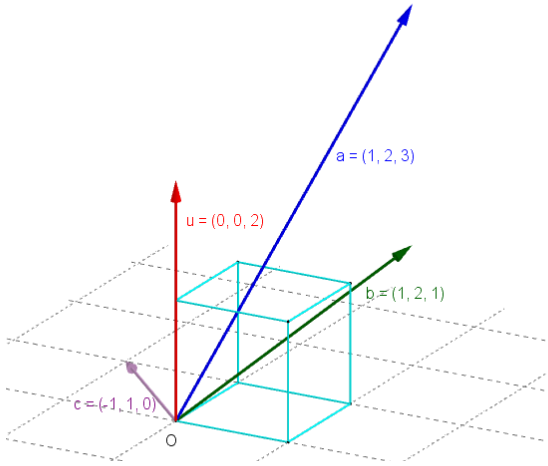
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverznú maticu určíme napríklad pomocou programu GeoGebra, otvorte si applet "inverzná matica" Tu. Po vynásobení zľava obidvoch strán rovnice (iv) dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}.$$

Riešením je vektor $(r, s, t)^T = (16, -5, -1)^T$. Otvorte si výpočty Matrix calculator a v Matrix calculator Tu a v GeoGebre Tu.

Nasledujúci applet demonštruje určenie súradníc vektora $\vec{u} = (0, 0, 2)$ v báze $(1, 2, 2); (1, 2, 1); (-1, 1, 0)$



Otvorte si applet Tu.

Riešením sú súradnice $(1, -1, 0)$. Vypočítajte ich pomocou maticového tvaru, pričom využite program Matrix calculator.

♥ **Príklad**.

Je dané lineárne zobrazenie $\varphi : V_3 \to V_3$, ktoré jednotkovú bázu $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ zobrazí na bázu

$$(\vec{a}(1, 1, 2),\ \vec{b}(2, 3, 4),\ \vec{c}(1, 2, 3))$$

priestoru $V_3(\mathbb{R})$. Nájdite obraz $\vec{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ vektora $\vec{u} = (5, -1, 9)$ v tomto zobrazení.

Poznámka.

Nech V, W sú vektorové priestory nad telesom $\mathbb{R}$. Zobrazenie $\varphi : V \to W$ sa nazýva **lineárne zobrazenie**, ak je splnené nasledovné:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}) \\ \text{(ii)} & \varphi(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u}) \end{array}$$

kde $\vec{u}, \vec{v} \in V$ a $\varphi \in \mathbb{R}$.

Riešenie.

1. Využitím vlastností lineárneho zobrazenia.

   Vektor $\vec{u} = (5, -1, 9)$ vyjadríme ako lineárnu kombináciu $\vec{u} = 5\overrightarrow{e_1} - 1\overrightarrow{e_2} + 9\overrightarrow{e_3}$ vektorov jednotkovej bázy. Keďže zobrazenie zobrazenie φ je lineárne, tak musí platiť

   $$\vec{u}' = \varphi\vec{u} = \quad = \varphi[5\overrightarrow{e_1}) - 1(\overrightarrow{e_2}) + 9(\overrightarrow{e_3})] = \varphi[5.(1, 0, 0) + (-1)(0, 1, 0) + 9.(0, 0, 1)]$$

   $$= 5\varphi(\overrightarrow{e_1}) - 1\varphi(\overrightarrow{e_2}) + 9\varphi(\overrightarrow{e_3}).$$

Po úprave dostaneme:

$$\vec{u}' = 5.(1,1,2) - 1.(2,3,4) + 9.(1,2,3).$$

Po roznásobení a postupným sčítaním po zložkách dostaneme, že riešením je vektor $\vec{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3) = (12, 20, 33)$.

2. S použitím programu Matrix calculator si môžete prezrieť Tu.

Skalárny súčin vektorov

Definícia, vlastnosti (zopakovanie z Lineárnej algebry).

Definícia (Skalárny súčin).

Nech $V_n(\mathbb{R})$ je vektorový priestor nad poľom reálnych čísel. Zobrazenie f (resp. operáciu " $\bullet$ ")

$$\bullet : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$$

nazveme skalárny súčin na $V_n(\mathbb{R})$, ak pre každé $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V, r \in \mathbb{R}$ sú splnené tieto podmienky:

i. $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{a}$

ii. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \bullet \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{c}$

iii. $(r.\, \boldsymbol{a}) \bullet \boldsymbol{b} = r(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})$

iv. pre každý vektor $\boldsymbol{a} \neq \vec{0}$ je $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{a} > 0$.

Poznámky.

1. Vlastnosti (ii) a (iii) nastavujú požiadavku na linearitu v prvej zložke. Vlastnosť (i) žiada symetriu, tj linearita prvej zložky sa prenáša do zložky druhej. Tieto vlastnosti má symetrická bilineárna forma. **Viac o bilineárnych formách nájdete** Tu.
2. Vlastnosť (iv) hovorí, že forma musí byť pozitívne definitívna.
3. Skalárny súčin na reálnom priestore je teda symetrická pozitívne definitná bilineárna forma na danom priestore.
4. Takto definovaný skalárny súčin sa často v literatúre označuje ako **vážený skalárny súčin**.
5. Pre skalárny súčin na reálnom priestoresa okrem označenia $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$ používa aj označenie ako:
   - symbol pre funkciu $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ako zobrazenie $V_n \times V_n \to \mathbb{R}$,
   - symbol pre násobenie $\boldsymbol{a}.\, \boldsymbol{b}$,
   - alebo jednoducho ako usporiadaná dvojica $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Definícia.

Definícia normy a uhla vektorov

1. **Norma vektora**

   Nech $V_n(\mathbb{R})$ je reálny vektorový priestor so skalárnym súčinom $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Normou vektora $\boldsymbol{v} \in V$ rozumieme číslo:

   $$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}.$$

   Inak povedané, norma vektora je odmocnina zo skalárneho súčinu tohto vektora samého so sebou.

   Vektor $\boldsymbol{v} \in V$ sa nazýva normovaný (jednotkový), ak platí $\|\boldsymbol{v}\| = 1$.
2. Vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ sú **ortogonálne** (na seba kolmé), ak ich skalárny súčin je rovný nule (nulovému prvku telesa $\mathbb{R}$).

3. **Uhol vektorov**

   Nech $V_n(\mathbb{R})$ je reálny vektorový priestor so skalárnym súčinom $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Uhlom nenulových vektorov $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$

rozumieme číslo φ, pre ktoré platí:

$$\cos\varphi = \frac{f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|},$$

kde $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Vážený skalárny súčin je oproti „stredoškolskému skalárnemu súčinu“ oveľa všeobecnejší. Stredoškolsky definovaný skalárny súčin (tiež nazývaný aj ako **euklidovský skalárny súčin**) na priestore $V_3(\mathbb{R})$ je zavedený nasledovne. Ak $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3], \boldsymbol{b} = [b_1, b_2, b_3]$, tak

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$$

Presvedčte sa, že stredoškolsky definovaný skalárny súčin spĺňa podmienky uvedené v definícii, že je to symetrická pozitívne definitná bilineárna forma.

Definícia skalárneho súčinu môže mať rôzne podoby. Napríklad na množine spojitých funkcií intervalu ⟨a,b⟩ možno uvažovať skalárny súčin vo forme

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Cvičenie.

1. Ukážte, že operácia f definovaná na $\mathbb{R}^3$ takto:

   $$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

   pre $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3], \boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3] \in \mathbb{R}^3$ spĺňa podmienky skalárneho súčinu.
2. Overte, či sú vektory $\boldsymbol{x} = (1, -3, 2), \boldsymbol{y} = (2, 1, -1)$ ortogonálne.
3. Určte ortogonálny doplnok podpriestoru $W = \{(1, 2, -1)\}$. Ortogonálnym doplnkom podpriestoru W priestoru V je množina všetkých vektorov z V, ktoré sú kolmé na všetky vektory z W.

Riešenie.

Dosadením súradníc vektorov $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3], \boldsymbol{b} = [b_1, b_2, b_3], \boldsymbol{c} = [c_1, c_2, c_3] \in \mathbb{R}^3$ do definície skalárneho súčinu, ľahko overíme, že jednotlivé podmienky v definícii sú splnené. Pozrite si riešenie Tu.

Veta (Ďalšie vlastnosti skalárneho súčinu).

Nech $V(\mathbb{R})$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom, nechaj $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V, c \in \mathbb{R}$. Potom

1. $\boldsymbol{w}.(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}.\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}.\boldsymbol{v}$. Dokážte toto tvrdenie.

   Dôsledok: Pre skalárny súčin platí aj zovšeobecnený distributívny zákon.
2. $\boldsymbol{u}.(r.\boldsymbol{v}) = r.(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v})$
3. $0.\boldsymbol{u} = 0$. Dokážte tieto tvrdenia.

   Dôsledok: Pre skalárny súčin platí $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Veta (Určenie euklidovského skalárneho súčinu).

Nech $B = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ je **ortonormálna báza** vektorového priestoru $V_n(\mathbb{R})$ a nech $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ sú súradnice vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ v báze B. Potom

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1.b_1 + a_2.b_2 + \dots + a_n.b_n).$$

Dôkaz.

Nech $\boldsymbol{a} = (a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2.\,\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{u}_n), \boldsymbol{b} = (b_1\boldsymbol{u}_1 + b_2.\,\boldsymbol{u}_2 + \ldots + b_n\boldsymbol{u}_n)$ sú súradnice vektorov v báze B. Definujme euklidovský skalárny súčin ako súčin mnohočlenov

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = .\\
&= a_1.\,b_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1 + a_1.\,b_2\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a_1.\,b_n\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_n +\\
&+ a_2.\,b_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_1 + a_2.\,b_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a_2.\,b_n\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_n +\\
&+ \ldots\\
&+ a_n.\,b_1\boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_1 + a_n.\,b_2\boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a_n.\,b_n\boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_n
\end{aligned}
$$

Využitím symetrie, distributívnosti a linearity skalárneho súčinu, vzťahov $\boldsymbol{u}_i.\,\boldsymbol{u}_j = 0, i \neq j;\ \ \boldsymbol{u}_i.\,\boldsymbol{u}_i = 1$ a využitím komutatívnosti, distributívnosti násobenia a sčítania reálnych čísel dostaneme požadovaný výsledok.

Vektorový priestor $V_n(\mathbb{R})$ s vyššie definovaným skalárnym súčinom nazývame **Euklidovský** (vektorový) **priestor**

Riešené príklady - $\TeX$ prezentácia Tu. ZIP súbor si stiahnite Tu. Formulár prezentácie "Beamer" nájdete Tu. Riešený príklad MON 2.1.7 Tu.

Vonkajší a vektorový súčin

Vonkajší súčin n vektorov vo V_n a Vektorový súčin dvoch vektorov vo V_3

Definícia (Vonkajší súčin).

Nech V_n je orientovaný vektorový priestor a nech $\mathcal{B}$ je jeho kladná ortonormálna báza. Pod *vonkajším súčinom* vektorov $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V_n$ rozumieme nasledujúci determinant:

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix},$$

kde v riadkoch tohto determinantu sú súradnice vektorov ; $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ vzhľadom na bázu B,

tj. $\boldsymbol{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in}), i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Vonkajší súčin vektorov $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ budeme označovať: $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]_B$.

Poznámky K orientácii bázy si pozrite výklad Tu. Ukážka transformácie bázy Tu.

1. Geometrický význam vonkajšieho súčinu vektorov od V_2 a až po V_3:
   - Nech $\mathcal{B}$ je kladná báza vektorového priestoru V_2 a nech vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ tvoria rovnobežník s orientáciou podľa $\mathcal{B}$. Potom vonkajší súčin $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ vyjadruje orientovanú plochu rovnobežníka tvoreného vektormi $\mathbf{v}, \mathbf{w}$.
   - Nech$\mathcal{B}$ je kladná báza vektorového priestoru V_3 a nech vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tvoria rovnobežnosten s orientáciou podľa $\mathcal{B}$. Potom vonkajší súčin $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ vyjadruje objem rovnobežnostena tvoreného týmito vektormi.
2. Vo vektorovom priestore V_3 okrem vonkajšieho súčinu, ktorého výsledkom je reálne číslo predstavujúce objem, môžeme definovať operáciu "**vektorový súčin**". Výsledkom tejto operácie bude **vektor.**

Definícia (Vektorový súčin).

Vektorový súčin dvoch vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_3(\mathbb{R})$ je definovaný ako vektor kolmý k vektorom $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, ktorého veľkosť je rovná ploche kosodĺžnika, ktorý oba vektory vytvárajú. Zapisujeme

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{n}.\, ||\mathbf{a}||.\, ||\mathbf{b}||.\sin\theta,$$

kde θ je uhol zvieraný vektormi $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ s vlastnosťou $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ a $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor kolmý k nim.

1. Vektorový súčin vektorov budeme symbolicky označovať $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ alebo $\vec{a} \times \vec{b}$.
2. **Vektorový súčin vektorov je definovaný len pre 3-rozmerný Euklidovský priestor!**

Existujú rôzne metódy výpočtu vektorového súčinu dvoch vektorov $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ v trojrozmernom priestore. Tu sú najbežnejšie metódy:

Determinantová metóda (priama metóda pomocou determinantov).

Vektorový súčin dvoch vektorov $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ sa vypočítame ako determinant matice so základnými vektormi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ a komponentami vektorov $\vec{a}, \vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Tento determinant sa rozvinie do:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Výsledok je:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}.$$

Konečná forma:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Veta.

Vektorový súčin možno definovať aj bez pomoci uhla, ktorý oba vektory určujú. Nech sú dané vektory $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Potom zložky vektora $\mathbf{c}$ vektorového súčinu $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ možno určiť ako

$$\begin{aligned} c_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 . \end{aligned}$$

Vektorový súčin je úzko spojený s priesečníkom dvoch priamok. Pozrite si príspevok k téme Aplikácie vektorového súčinu Tu.

V moderných programovacích jazykoch, ako Python alebo GeoGebra, MATLAB, sú k dispozícii vstavané funkcie na výpočet vektorového súčinu, ktoré umožňujú rýchly a presný výpočet.

Pomôcka na výpočet súradníc vektora $\mathbf{c}$.

Zapíšeme si súradnice vektorov do zákrytov pod seba, prvý riadok budú súradnice vektora $\mathbf{a}$ a pridáme ešte raz jeho prvú a druhú súradnicu. V druhom riadku urobím to isté s vektorom $\mathbf{b}$. Dostaneme schému

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{matrix}.$$

Teraz určíme súradnice vektora $\mathbf{c}$ - krížové násobenie: $(c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2; c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3; c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1)$.

Poznámky.

1. Pre obsah trojuholníka ABC je známy vzorec $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$, kde $a = |BC|, b = |AC|, \gamma = \angle ACB$. Porovnaním s definíciou vektorového súčinu, môžeme písať $S = \frac{1}{2} \parallel \mathbf{a} \times \mathbf{b} \|$.
2. Zrejme pre **obsah rovnobežníka** $ABCD$ bude platiť: $S = \parallel \mathbf{a} \times \mathbf{b} \|$.
3. Pomocou zmiešaného súčinu troch vektorov môžeme vypočítať objem rovnobežnostena. Zdôvodnenie nájdete Tu. Tiež odporúčame prácu Vodičková, V.: Aplikácie vektorového súčinu. Dostupné Tu.

Cvičenie.

1. Zistite, či zobrazenie (operácia) $f : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$ je skalárnym súčinom, ak
   - $f((x_1, x_2), (x_2, y_2)) = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 10 y_1 y_2$,
   - $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 10 x_2 y_2$.
2. Zistite aký uhol zvierajú jednotkové vektory $\vec{a}, \vec{b}$, ak $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}, \vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ sú na seba kolmé vektory.
3. Vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$, ak poznáte súradnice troch jeho vrcholov: $A[5; 1; 4], B[-1; -2; 6], C[2; 3; -2]$. Vytvorte si model v GeoGebre.

4. Vypočítajte veľkosť vektora $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, ak $||\vec{a}|| = 3, ||\vec{b}|| = 4, |\angle(\vec{a}, \vec{b})|| = \frac{2}{3}\pi.$

Cauchy-Schwarz nerov.

Definície - norma vektora, uhol vektorov na reálnom vektorovom priestore $V(\mathbb{R})$ so skalárnym súčinom $(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{v})$.

1. Pod **normou (veľkosťou) vektora** rozumieme druhú odmocninu skalárneho súčinu vektora $\boldsymbol{u}$ samého so sebou. Normu vektora budeme označovať $||\boldsymbol{u}||$, teda

   $$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{u}}$$

2. Uhlom nenulových vektorov $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V(\mathbb{R})$ rozumieme číslo ϕ, pre ktoré platí

   $$\cos\phi = \frac{(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|.\|\boldsymbol{v}\|}, 0 \le \phi \le \pi$$

   Ku korektnosti definície je nutné ukázať, že $-1 \le \dfrac{(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|.\|\boldsymbol{v}\|} \le 1$. Dokážte to s využitím Cauchy-Schwarzovej nerovnosti.

Tvrdenia.

1. **Cauchy-Schwarzova nerovnosť**

   Pre ľubovoľné dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V(\mathbb{R})$ platí

   $$|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \le \| \boldsymbol{u} \|.\| \boldsymbol{v}\|,$$

   pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď vektory $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ sú lineárne závislé (tj. jeden z nich je násobkom toho druhého).

2. Nulový vektor $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ je kolmý na ľubovoľný vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Vektory štandardnej bázy $\langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ sú navzájom kolmé.

Dôkaz - Cauchy-Schwarzovej nerovnosti.

1. Pre lineárne závislé vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V(\mathbb{R})$ musí existovať nenulové reálne číslo a, pre ktoré platí $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v}$. Ak sú vektory nezávislé tak, pre každé nenulové reálne číslo a vektor $\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{v}$ je nenulový. Zrejme druhá mocnina jeho normy je $\|\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{v}\|^2 > 0$ a nie je rovná nule. Podľa definície normy rozpíšeme ľavú stranu nerovnosti ako

   $$(\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{v}).\,(\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{v}) > 0$$

   Skalárny súčin je symetrický a distributívny, preto po úprave dostaneme kvadratickú nerovnicu .

   $$(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{u}) - 2a.\,(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{v}) + a^2(\boldsymbol{v}.\,\boldsymbol{v}) > 0$$

   Ľavá strana nerovnice predstavuje kvadratický trojčlen v premennej a, ktorý nemá reálne korene (pre ľubovoľnú hodnotu a je trojčlen > 0). Jej diskriminant musí byť záporný, teda platí

   $$D = [-2(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{v})]^2 - 4 \parallel \boldsymbol{u} \parallel^2 \parallel \boldsymbol{v} \parallel |^2 < 0$$

   Odtiaľ už ľahko dostaneme $[-2(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{v})]^2 < 4 \parallel \boldsymbol{u} \parallel^2 \parallel \boldsymbol{v}\|^2$ a po odmocnení $|(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{v})| < \| \boldsymbol{u} \|.\| \boldsymbol{v}\|$.

2. Dôkaz pre lineárne závislé vektory prenechávame čitateľovi. Zrejme bude platiť rovnosť strán.

Tvrdenia.

Nech $V(\mathbb{R})$ je reálny vektorový priestor so skalárnym súčinom.

1. **Trojuholníková nerovnosť**.

   $$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V(\mathbb{R}) : \| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \| \le \| \boldsymbol{u} \|\| \boldsymbol{v}\|,$$

   pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď vektory $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ sú lineárne závislé (tj. jeden z nich je násobkom toho druhého).

2. **Pytagorova veta**.

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V(\mathbb{R}) : \parallel \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \parallel^2 = \parallel \boldsymbol{u} \parallel^2 + \parallel \boldsymbol{v} \parallel^2 .$$

3. **Kosínusová veta**.

Pre ľubovoľné dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V(\mathbb{R})$, ktorých uhol je ϕ platí

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \parallel^2 = \parallel \boldsymbol{u} \parallel^2 + \parallel \boldsymbol{v} \parallel^2 -2 \parallel \boldsymbol{u} \parallel \parallel \boldsymbol{v} \parallel \cos \phi .$$

Dôkazy.

1. Na úrovni VŠ použite Cauchy-Schwarzovu nerovnosť. Podrobné dôkazy nájdete v

"Sbírce řešených úloh Katedřy didaktiky fyziky Matematicko-fyzikální fakulty UK Praha". Tu.

Vezmite normu (druhú mocninu normy) na ľavej strane nerovnosti a prepíšte ju podľa definície pomocou skalárneho súčinu. Výraz zjednodušte vďaka linearite a symetrii skalárneho súčinu.

Napr. pre trojuholníkovú nerovnosť upravte na: $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \parallel^2 = \parallel \boldsymbol{u} \parallel^2 + 2(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{v}) + \parallel \boldsymbol{v} \|^2$.

Ďalej aplikujte nerovnosť $\forall a \in \mathbb{R} : a \leq |a|$, následne použite Cauchy-Schwarzovú nerovnosť a nakoniec odmocnite.

2. Na úrovni SŠ použite Cauchy-Schwarzovu nerovnosť ale pre prípad vektorového priestoru $V_3(\mathbb{R})$ so štandardnou ortonormálnou bázou $\langle e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1) \rangle$. Pre vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2 v_3) \in V(\mathbb{R})$ je skalárny súčin definovaný ako

$$(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 .$$

Cvičenie.

1. Skalárny súčin je definovaný na $\mathbb{R}^3$ takto:

$$(\boldsymbol{x}.\,\boldsymbol{y}) = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 .$$

pre $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3], \boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3] \in \mathbb{R}^3$. Určte číslo $a \in R$ tak, aby vektory $\boldsymbol{x} = [a-1, 3, a+1], \boldsymbol{y} = [-4, -a, 3a]$ boli na seba kolmé v zmysle definície kolmosti vektorov. Aký reálny uhol zvierajú tieto vektory v euklidovskom 3-rozmernom priestore? (Ukážte, že táto operácia spĺňa podmienky skalárneho súčinu).

2. Body $A[-3,2], B[2,4]$ sú susedné vrcholy štvorca. Pomocou skalárneho súčinu určte súradnice jeho zvyšných vrcholov.

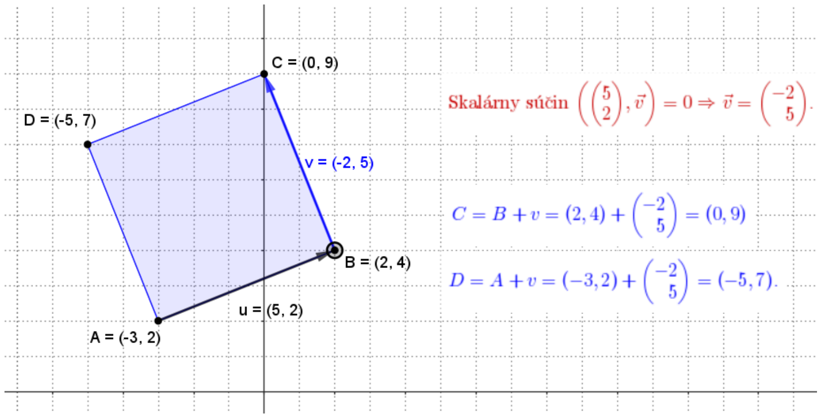
Riešenie.

1. Pomocou bilineárnych foriem ukážte, že operácia spĺňa podmienky skalárneho súčinu (použitie bilineárnych foriem na zdôvodnenie tvrdenia nájdete Tu). Ak vektory $\boldsymbol{x} = [a-1, 3, a+1], \boldsymbol{y} = [-4, -a, 3a]$ majú byť na seba kolmé, tak ich skalárny súčin sa musí rovnať nule. Po dosadení dostaneme

$$(x.\,y) = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 = 3(a-1)(-4) + 2 \cdot 3(-a) + (a+1)3a = 3a^2 - 15a + 12.$$

Riešením kvadratickej rovnice sú čísla $a \in \{1, 4\}$. Pozrite si grafické **riešenie** Tu.

2. Pre skalárny súčin platí $(\vec{u} = B - A = (5,2), \vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{v} = (2,-5), ||\vec{v}|| - 1.$



Otvorte si dynamický applet Tu.

Definícia - ortogonálne vektory.

Nech $V(\mathbb{R})$ je reálny vektorový priestor so skalárnym súčinom. Vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in V(\mathbb{R})$ nazývame navzájom **ortogonálne** resp. **ortonormálne**, ak $(\boldsymbol{u}_i . \boldsymbol{u}_j) = 0$ pre $\forall i, j \in 1, 2, \ldots, k, i \neq j$ resp. ak naviac platí $\|\boldsymbol{u}_i\| = 1$.

Schmidt ortogon. proces

Nech $V_n(\mathbb{R})$ je n - rozmerný vektorový priestor so skalárnym súčinom $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ a nech je daná množina $M_k = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \cdots, \boldsymbol{u_k}\}$ lineárne nezávislých vektorov tohto konečno rozmerného priestoru ($\boldsymbol{u_i} \in V_n; i = 1, 2, \cdots, k \leq n$).

Definícia.

Schmidtov ortogonalizačný proces je proces, ktorým z množiny n lineárne nezávislých vektorov **vytvárame ortonormálnu bázu** n - rozmerného vektorového priestoru $V_n(\mathbb{R})$.

Poznámka.

Ortonormálna báza sa vyznačuje vlastnosťou, že jej vektory majú normovanú jednotkovú dĺžku a všetky sú navzájom kolmé (ortogonálne).

Existenciu takejto ortonormálnej bázy zabezpečuje Veta - Schmidtov ortogonalizačný proces.

Celý proces vytvárania ortonormálnej bázy možno popísať algoritmicky/rekurentne takto:

1. V prvom kroku Schmidtovho ortogonalizačného procesu sa za základ stanoví prvý vektor z danej množiny vektorov M. Podľa tohto vektora sa odvíja orientácia zvyšných.
2. Ďalším i-tym krokom je samotná ortogonalizácia i-teho vektora. Nasledujúci i-ty vektor určíme ako lineárnu kombináciu i-teho vektora z danej množiny vektorov M a už $(i-1)$ vytvorených vektorov.
3. Nakoniec prevedieme normalizáciu vektorov. Pre zjednodušenie výpočtov sa vektory normalizujú až na koniec procesu.

Veta (Schmidtov ortogonalizačný proces).

Nech $V(\mathbb{R})$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom $(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v})$ a nech $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \cdots, \boldsymbol{u_k} \in V$ sú lineárne nezávislé vektory. Potom existujú ortonormálne vektory $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_k} \in V$, pre ktoré platí

$$[\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_i}] = [\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \cdots, \boldsymbol{u_i}], \forall i \in 1, 2, \ldots, k$$

Dôkaz.

A. Proces ortogonalizácie.

1. Najprv určíme prvý vektor, pričom položíme
$$\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{u_1}.$$
2. Druhý vektor určíme ako lineárnu kombináciu $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{u}_2 + k\boldsymbol{e}_1$, pričom podľa predpokladu platí $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 0$.
Po skalárnom vynásobení rovnice $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{u}_2 + k\boldsymbol{e}_1$ vektorom $\boldsymbol{e}_1$ dostaneme riešenie
$$k = -\frac{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{u}_2)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}.$$
Po dosadení dostaneme riešenie
$$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{u}_2)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}\boldsymbol{e}_1.$$
3. Pre tretí vektor bude lineárna kombinácia v tvare $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3 + l\boldsymbol{e}_2 + m\boldsymbol{e}_1$, pričom platí $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 0; (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 0$.
Po skalárnom vynásobení rovnice postupne vektormi $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ dostaneme riešenie
$$l = -\frac{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{u}_3)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}; m = -\frac{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}_3)}{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)}.$$

4. Pomocou matematickej indukcie dokážeme, že pre ďalšie vektory platia vzťahy
$$\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{u}_k - \frac{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{u}_k)}{(\boldsymbol{e}_1,; e_1)}\boldsymbol{e}_1 - \frac{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}_k)}{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)}\boldsymbol{e}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{e}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k)}{(\boldsymbol{e}_{k-1}, \boldsymbol{e}_{k-1})}\boldsymbol{e}_{k-1}.$$
5. Teraz stačí len "znormovať" tieto vektory. Dostaneme jednotkové vektory $\frac{\boldsymbol{e_1}}{||\boldsymbol{e_1}||}, \cdots, \frac{\boldsymbol{e_k}}{||\boldsymbol{e_k}||} \in V$

Cvičenie.

1. (MON 2.2.2) Vo vektorovom priestore usporiadaných trojíc reálnych čísel sú dané vektory $\boldsymbol{u}_1 = (1, -1, 1), \boldsymbol{u}_2 = (0, 1, 2), \boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 0)$. Vykonajte Schmidtov ortogonalizačný proces.
2. Určte aspoň jednu ortonormálnu bázu vektorového podpriestoru $\alpha \subset V_3(\mathbb{R})$, ktorý je určený (smerom-rovinou) $\alpha : 3x - y - z = 0$.

Riešenie.

1. Zvoľme prvý vektor ortogonálnej bázy $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 0)$ (zrejme nie je jednotkový, jeho normalizáciu urobíme v závere riešenia). Druhý vektor $\boldsymbol{b}_2$ určíme zo vzťahu

   (k) $\qquad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{u}_2 + k(1, 1, 0)$,

   kde $\boldsymbol{u}_2 = (0, 1, 2)$. Rovnicu (k) skalárne vynásobíme vektorom $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 0)$. Podľa predpokladu v Schmidtovom ortogonalizačnom procese musia byť vektory $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ na seba kolmé, teda musí pre ich skalárny súčin platiť rovnosť $((0, 1, 2), \boldsymbol{b}_2) = 0$. Zároveň platí $((1, 1, 0), (1, 1, 0)) = 2$. Po dosadení do (k) môžeme určiť/vypočítať koeficient

   $k = -\frac{1}{2}$, odkiaľ dostaneme pre vektor $\boldsymbol{b}_2$

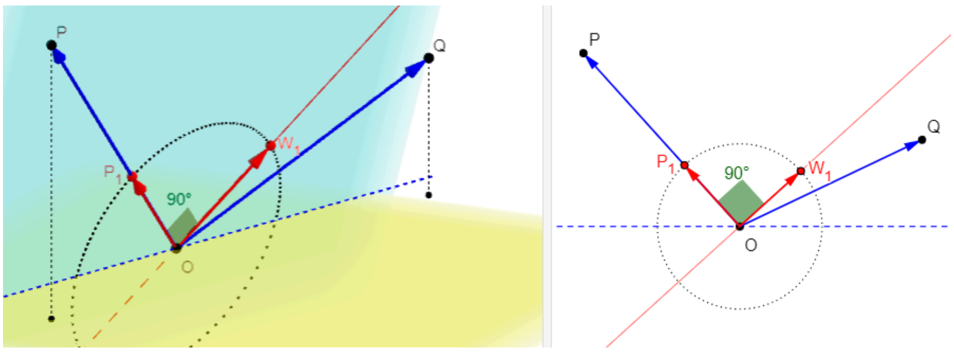
   $\boldsymbol{b}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$.

   Tretí vektor určíme zo vzťahu

   $\boldsymbol{b}_3 = (1, -1, 1) + r(1, 1, 0) + s(-1, 1, 4)$

   (zobrali sme 2-násobok druhého vektora $2\boldsymbol{b}_2$). Ľahko nahliadneme, že $r = 0, s = -\frac{1}{9}$, odkiaľ $\boldsymbol{b}_3 = (10, -10, 5)$. Zrejme vektory $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ sú na seba kolmé a stačí ich znormovať.

   V prípade, že by sme zvolili $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{u}_1 = (1, -1, 1)$ dostali by sme bázu $(1, -1, 1), (-1, 4, 5), (3, 2, -1)$, ktorá je tiež ortogonálna. Teda výsledná báza závisí od voľby poradia vektorov $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$.
2. Stačí určiť smerové vektory danej roviny, ktoré patria do vektorového priestoru určeného danou rovinou (do jej zamerania). Sú to napríklad vektory $\vec{u} = (0, -2, 2), \vec{v} = (1, 2, 1)$.



Otvorte si dynamickú konštrukciu pre ortogonalizačný proces Tu.

   Potom realizujte Schmidtov ortogonalizačný proces a utvorte ortogonálnu bázu skúmaného vektorového podpriestoru.

Preštudujte si študijný text o kolmých vektorových podpriestoroch v práci: [MONc], časť Totalne kolmé vektorové priestory, Kolmé vektorové priestory.

Afinný n-rozmerný priestor

Pri syntetickom prístupe v geometrii sme vychádzame z euklidovského priestoru podľa Euklidových Základov, v ktorom sa základné geometrické útvary (bod, priamka) nedefinovali. Vedeli sme jednoznačne rozhodnúť o pravdivosti výrokov typu: Bod patrí alebo nepatrí danému útvaru. Tento prístup z matematického hľadiska predstavuje zásadný problém: Nevieme jasne zadefinovať, čo je to (bodová) množina.

V predchádzajúcich kapitolách (podobne tomu bolo aj historicky vo vývoji geometrie) boli zavedené základné pojmy:

1. **vektor** ako prvok vektorového priestoru (štruktúry s predpísanými binárnymi operáciami)
2. štandardná **báza** $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_1, \ldots, e_n})$ vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$
3. **súradnice** vektora $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ v štandardnej báze, pričom zrejme platí

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1 \cdot (1, 0, \ldots, 0) \oplus v_2 \cdot (0, 1, 0, \ldots, 0) \oplus v_n \cdot (0, 0, \ldots, 1),$$

V tejto kapitole budeme využívať prevažne štandardnú bázu $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_1, \ldots, e_n})$, ktorej vektory sú navzájom kolmé a majú jednotkovú dĺžku. Takejto báze tiež hovoríme ortonormálová báza.

Súradnice $w_1, w_2, \ldots, w_n$ pevne zvoleného vektora $\boldsymbol{w}$ v danej báze $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}\}$ zapisujeme pomocou dolného indexu

$$(w_1, w_2, \ldots, w_n)_{\mathcal{B}} = w_1 \cdot \overrightarrow{b_1} \oplus w_2 \cdot \overrightarrow{b_2} \oplus \ldots \oplus w_n \cdot \overrightarrow{b_n}.$$

Tieto pojmy nám umožňujú zaviesť afinný priestor axiomaticky pomocou vektorového priestoru.

Definícia (Afinný priestor).

Afinný priestor $\mathbb{A}$ nad poľom $\mathbb{R}$ je trojica $(\mathcal{A}, V, f)$, kde

1. $\mathcal{A}$ je množina bodov.
2. $\mathbb{V}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.
3. $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{V}$ je zobrazenie s vlastnosťami:

   (AP1) $\quad f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$

   (AP2) $\quad \exists P \in \mathcal{A};\ f_P : \mathcal{A} \to \mathbb{V};\ X \to f(P, X)$

   je bijektívne zobrazenie. Pozrite si ukážky afinných priestorov Tu.

V definícii afinného priestoru sme použili označnie $f(X, Y)$, ktoré sa najčastejšie vyskytuje odbornej literatúre. Toto označenie často nahradíme aj označením, ktoré sme používali v teórii vektorových priestorov $\overrightarrow{XY}$. Teda $f(X, Y) := \overrightarrow{XY}$.

Pripomeňme, že vo vektorovom priestore sme tiež používali termín "bod" v súvislosti s viazaným vektorom $\boldsymbol{u} = AB$, teda len v súvislosti s vektorovým priestorom $V_n(\mathbb{R})$. V tomto vektorovom priestore voľný vektor $\boldsymbol{u}$ predstavoval usporiadanú n-ticu reálnych čísel. Začiatok voľného vektora ("bod") mal súradnice (0,0, ..., 0) a koncový "bod" voľného vektora $\boldsymbol{u}$ mal súradnice zhodné so súradnicami daného vektora v štandardnej báze. Vektor sme interpretovali ako posunutie, pohyb. Intuitívne sme používali aj **súčet**

$$A + \boldsymbol{u},$$

ktorý vo vektorovom priestore **nevieme určiť** (nie je definovaný). Avšak v afinnom priestore to už **budeme vedieť definovať**, bude predstavovať posunutý bod A o vektor $\boldsymbol{u}$.

Poznámky.

Dimenzia (alebo rozmer) afinného priestoru je číslo, ktoré je dimenziou jeho zamerania (dimenziou vektorového priestoru V).

Afinný priestor dimenzie **0, 1, 2** budeme v poradí nazývať **bod, priamka, rovina**.

Definícia.

(n-1)-rozmerný podpriestor n-rozmerného afinného priestoru $\mathbb{A}$ nazývame **nadrovina** priestoru $\mathbb{A}$.

Poznámky.

Ak X, Y, Z, A, B, sú body afinného priestoru $(\mathcal{A}, V, f)$, tak ľahko nahliadneme platnosť nasledujúcich tvrdení

1. $\overrightarrow{XX} = \vec{o}$
2. $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$
3. $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AY} \Rightarrow X = Y$
4. $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{YB} \Rightarrow X = Y$
5. $\overrightarrow{XZ} = \vec{o} \Rightarrow X = Z$.

Dôkazy (predchádzajúce tvrdenia).

1. Podľa (A1) platí $\overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XX} = \overrightarrow{YX}$, odkiaľ $\overrightarrow{XX} = \vec{o}$.
2. $\vec{o} = \overrightarrow{XX} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX}$, čiže $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$.
3. Vyplýva priamo z (A2) - bijekcia.
4. Ak $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{YB}$, potom $-\overrightarrow{XB} = -\overrightarrow{YB}$, teda $\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{BY}$ a vzhľadom na (3) $X = Y$.
5. Nech $\overrightarrow{XZ} = \vec{o}$. Pretože aj $\overrightarrow{XX} = \mathbf{o}$, tak $\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{XX}$, odkiaľ podľa (3) $X = Z$.

Tvrdenie (Rozdiel bodov).

Každými dvomi bodmi afinného priestoru je určený vektor, ktorý je daný ich rozdielom.

Dôkaz (bez súradnicového systému).

Nech $(\mathcal{A}, V, f)$ je afinný priestor nad poľom $\mathbb{R}$. V afinnom priestore je zavedená operácia f, ktorá každým dvomi bodmi $A, B \in \mathbb{A}$ priraďuje vektor $\overrightarrow{AB} \in V$. Táto operácia má nasledujúce vlastnosti:

1. Vektor medzi dvoma bodmi je dobre definovaný (AP2), teda existuje zobrazenie
$$(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB} \in V,$$
ktoré je také, že pre každý pevný bod A je zobrazenie $B \mapsto \overrightarrow{AB}$ bijektívne zobrazenie z množiny bodov $\mathbb{A}$ do vektorového priestoru V. Pozrite si nasledujúce tvrdenie (Existencia referenčného afinného bodu).
2. Afinná kombinatorika bodov (AP1). Pre každé tri body $A, B, C \in \mathbb{A}$ platí:
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$
Toto znamená, že vektor $\overrightarrow{AB}$ jednoznačne popisuje prechod z bodu A do bodu B.
3. Existencia afinného bodu ako referencie.
Nech je O ľubovoľný pevný bod v $\mathbb{A}$ (nepotrebujeme ho interpretovať ako začiatok súradnicového systému, stačí, že existuje). Potom pre každý bod $A \in \mathbb{A}$ existuje jednoznačný vektor $\overrightarrow{OA} \in V$, ktorý reprezentuje jeho afinnú polohu voči O.
4. Vyjadrenie vektora medzi bodmi pomocou rozdielu.
Pre ľubovoľné body $A, B, O \in \mathbb{A}$ platí:
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Stačí si uvedomiť, že $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}$ sú vektory, pre ktoré platia grupové operácie sčítania, inverzného (tj. opačného) prvku, ... Preto uvedený rozdiel vektorov $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ je dobre definovaný vo V. Keďže výber bodu O je ľubovoľný, vidíme, že $\overrightarrow{AB}$ závisí iba od bodov A a B, nie od voľby referenčného bodu.

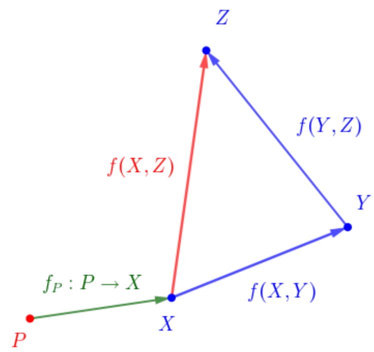
Záver

Ukázali sme, že operácia priradenia vektora dvom bodom je jednoznačne daná ich „rozdielom", ktorý je chápaný v zmysle vektorového priestoru V. Definitoricky môžeme písať $B - A := \overrightarrow{AB}$

Poznámky.

Ak usporiadaná dvojica bodov (X, Y) predstavuje umiestnenie vektora $\boldsymbol{u}$, tak vektor môžeme vyjadriť ako $\boldsymbol{u} = Y - X$, čo predstavuje zobrazenie

$$\boldsymbol{f} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V(\mathbb{R}).$$



Podmienka (AP2) sa niekedy uvádza takto:

(AP2') $\forall X \in \mathcal{A}; \forall \boldsymbol{u} \in V$ existuje práve jeden bod $P \in \mathcal{A}$ taký, že $\overrightarrow{PX} = \boldsymbol{u}$.

(AP2'') $\forall X, Y \in \mathcal{A}; \exists \boldsymbol{u} \in V$ taký, že $Y = X + \boldsymbol{u}$.

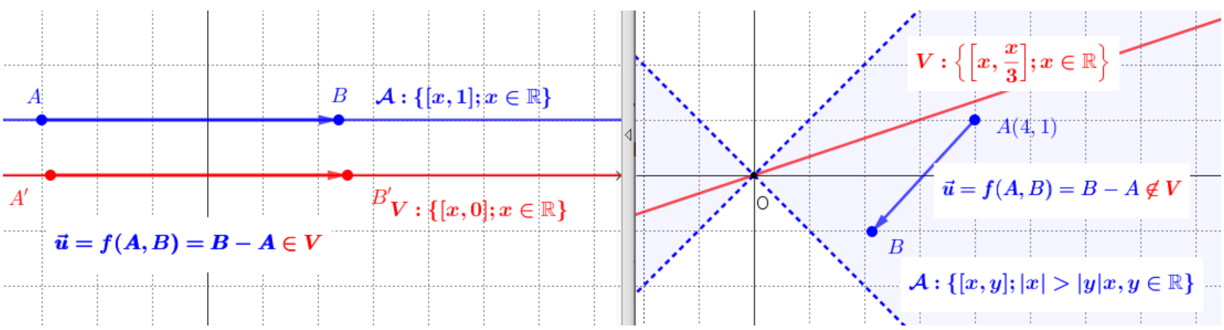
V tejto kapitole budeme pracovať len s reálnym afinným priestorom nad telesom (poľom) reálnych čísel $\mathbb{R}$. Fundamentálnou vlastnosťou afinného bodového priestoru je axiomatické tvrdenie:

Tvrdenie (Existencia referenčného afinného bodu).

V afinnom priestore $(\mathcal{A}, V, f)$ platí vlastnosť' (AP2) pre ľubovoľný pevne zvolený bod P', t.j. $\forall P' \in \mathcal{A};\ f'_P : \mathcal{A} \to \mathbb{V};\ X \to f(P', X)$ je bijektívne zobrazenie. Stačí si uvedomiť, že $f(P', X) = f(P', P) + f(P, X)$).

Cvičenie.

Zistite, či usporiadané trojice $(\mathcal{A}, V, f)$ sú afinným priestorom.



Otvorte si dynamické obrázky: **ľavý** Tu - príklad afinného priestoru; **pravý** Tu - nie je afinným priestorom.

Poznámky.

1. Afinný priestor budeme tiež jednoducho označovať A alebo ako $\mathbb{A}$. Vektorový priestor prislúchajúci afinnému priestoru $(\mathcal{A}, V, +)$ budeme označovať ako $V(\mathbb{A})$ alebo len V.
2. Vektorovému priestoru hovoríme tiež **zameranie afinného priestoru**. Afinný priestor, ktorého zameraním je vektorový priestor nad poľom reálnych čísel nazývame reálny afinný priestor alebo aj aritmetický afinný priestor.
3. **Affinis** znamená latinsky **príbuzný**. Prvý krát tento pojem použil Leonhard Euler (1707-1783) pre označenie vzťahu vzoru a obrazu v zobrazení, ktoré zachováva deliaci pomer (pozri kapitolu Deliaci pomer Tu). Afinná geometria je geometria bez vzdialenosti/miery.

Príklad.

Dané sú množiny (červená)

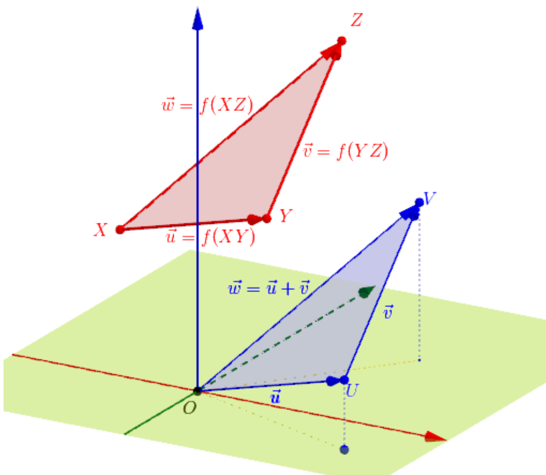
$$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = -5\},$$

množina (modrá)

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$$

a zobrazenie $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V(\mathbb{R})$ je odčitovanie trojíc reálnych čísel po zložkách.

Dokážte, že $(\mathcal{A}, V, f)$ je afinný priestor nad poľom $\mathbb{R}$. Dynamický obrázok Tu.



Riešenie.

Pre ľubovoľný bod $X[x_1, x_2, x_3] \in \mathcal{A}$ platí, že $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 5)$.

1. Podmienka (AP1): zo vzťahov

$$f(X,Y) = [x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3] = [x_1 - y_1, x_2 - y_2, \tfrac{1}{2}\{(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\}]$$
$$f(Y,Z) = [y_1 - z_1,\ y_2 - z_2, y_3 - z_3] = [y_1 - z_1,\ y_2 - z_2, \tfrac{1}{2}\{(y_1 - z_1) + (y_2 - z_2)\}]$$

   dostávame

$$f(X,Z) = [x_1 - z_1, x_2 - z_2, \tfrac{1}{2}((x_1 - z_1) + (x_2 - z_2))],$$

   čo bolo treba ukázať.

2. Podmienka (AP2): Nech $P = [p_1, p_2, \frac{1}{2}(p_1 + p_2 + 5)]$ je pevne zvolený bod a $X = [x_1, x_2, \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 5)], Y = [y_1, y_2, \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 5)]$ sú ľubovoľné dva rôzne body.
   Potom je $(x_1 \neq y_1) \vee (x_2 \neq y_2)$ a zrejme aj pre obrazy

$$f(P,X) = [p_1 - x_1, p_2 - x_2, \tfrac{1}{2}((p_1 - x_1) + (p_2 - x_2))]$$
$$f(P,Y) = [p_1 - y_1, p_2 - y_2, \tfrac{1}{2}((p_1 - y_1) + (p_2 - y_2))]$$

   platí, že sú rôzne. Teda zobrazenie je bijektívne.

Dôkaz, pre podmienku (AP2') nájdete v práci Afinné transformácie na strane 7. Pozrite tiež Príklad 2 na strane 8.

$< spanclass =" nolink "> \backslash(. \backslash)$

Lineárna súradnicová sústava

V predchádzajúcej kapitole sme uviedli, že dimenzia (rozmer) afinného priestoru sa definuje ako dimenzia jeho vektorového zamerania. Teda definitoricky

dim $\mathbb{A} :=$ dim $V(\mathbb{A})$.

Poznámky (Pripomenutie pojmov).

1. Dimenziu afinného priestoru označujeme indexom vpravo hore, napríklad n-rozmerný afinný priestor ako $\mathbb{A}^n$.
2. Afinný priestor dimenzie 1 nazývame afinná **priamka**, označujeme ho $\mathbb{A}^1$ ale aj ako obvykle $a, b, p, \ldots$
3. Afinný priestor dimenzie 2 nazývame afinná **rovina**, označujeme ho $\mathbb{A}^2$ ale aj ako obvykle $\alpha,\ \beta,\ \ldots$
4. Afinný priestor dimenzie $n-1$ nazývame afinná **nadrovina**.

Uvedieme základné definície z práce [MONa], v ktorých sa pomocou bázy vektorového priestoru zavádza repér afinného priestoru a (lineárna) afinná súradnicová sústava. Súhrnne sa pre tento systém používa označenie: afinný súradnicový systém.

Definície.

1. Nech $(\mathcal{A}, V, f)$ je afinný priestor a O je ľubovoľný bod tohto priestoru. Ďalej nech $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\}$ je báza (nie nutne ortonormálna) vektorového priestoru V. Potom $(n+1)$-tica $\langle O; \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\rangle$ sa nazýva **repér afinného priestoru** $\mathcal{A}$.

2. Nech $(\mathcal{A}, V, f)$ je afinný priestor, nech $\langle O; \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\rangle$ je repér v $\mathcal{A}$. **Lineárna súradnicová sústava** (stručne LSS) je **bijektívne** zobrazenie

   $$\mathcal{L} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n;\ \ P \to [p_1, p_2, \ldots, p_n],$$

   pričom $\overrightarrow{OP} = p_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + p_n\boldsymbol{e_n}$. Pozrite si prácu (str. 8-11) Tu.

Dôkaz korektnosti definície.

Ľubovoľný vektor (teda aj polohový) vektorového priestoru sa dá jednoznačne vyjadriť ako lineárna kombinácia vektorov bázy tohto vektorového priestoru

$$\overrightarrow{OP} = P - O = p_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + p_n\boldsymbol{e_n}.$$

Z vlastnosti (AP2) vyplýva, že pre bod O a vektor $\vec{u} = p_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + p_n\boldsymbol{e_n}$ existuje práve jeden bod $P = O + \vec{u}$. Preto aj bod P vzhľadom na danú afinnú sústavu súradníc sa dá jednoznačne vyjadriť ako kombinácia

$$P = O + x_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e_n}.$$

Rovnosť $P = O + p_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + p_n\boldsymbol{e_n}$ skrátene zapisujeme ako $P = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ a n-ticu

$$[p_1, p_2, \ldots, p_n]$$

nazývame **súradnicami bodu** P. Súradnice bodu budeme zapisovať v hranatých zátvorkách $[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}]$. Vektor, ktorý určuje lineárna kombinácia $P - O = p_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + p_n\boldsymbol{e_n}$ sa nazýva **polohový vektor** $\overrightarrow{OP} = P - O$.

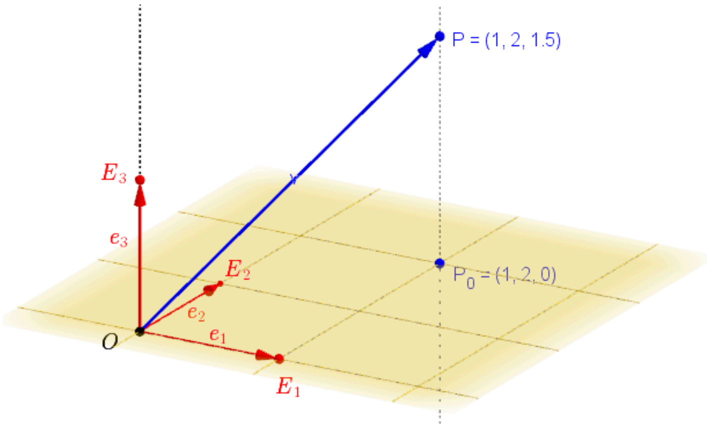
Existencia a jednoznačnosť súradníc bodu P vyplýva tiež z jednoznačného riešenia rovnice,

$$\overrightarrow{OP} = P - O = p_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + p_n\boldsymbol{e_n},$$

keďže vektory $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n}$ tvoria bázu vektorového priestoru V.

Pomenovania.

1. O – začiatok súradnicovej sústavy
2. $E_i = O + \boldsymbol{e_i}$ – jednotkové body súradnicovej sústavy
3. $\overleftrightarrow{OE_i}$ – súradnicové osi



Otvorte si applet Tu.

Cvičenie.

Ukážte, že usporiadaná trojica $(\mathcal{A}, V, f)$ je afinný priestor, ak

$$\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in R; x_2 = x_1^2\}, V = R, f([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = x_1 - y_1.$$

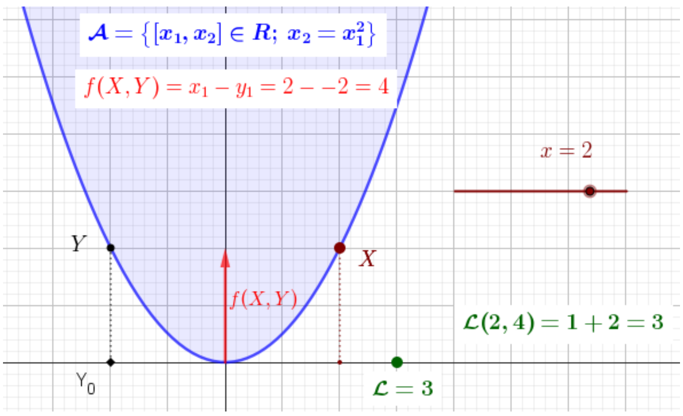
Zistite. či zobrazenie $\mathcal{L} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^1;\ \mathcal{L}([x_1, x_2]) = 1 + x_1$ je lineárna sústava súradníc.

Riešenie.

1. Ľubovoľný bod X afinného priestoru má súradnice $[x, x^2]$. Množina všetkých bodov afinného priestoru $(\mathbb{A}$ je parabola (nakreslite graf v GeoGebre).
2. Podmienka (AP1) pre body $X[x, x^2], Y[y, y^2], Z[z, z^2]$ zrejme platí, lebo

$$f(X, Y) + f(Y, Z) = (x - y) + (y - z) = x - z = f(X, Z).$$

- Podmienka (AP2): Zvoľme si ľubovoľné reálne čísla p, x a body $P[p, p^2], X[x, x^2]$, potom zobrazenie $f(P, X) = p - x$ je bijekcia.
- Zrejme aj zobrazenie $\mathcal{L} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^1;\ \mathcal{L}([x, x^2]) = 1 + x$ je bijektívne, preto je LSS.



Otvorte si dynamický obrázok Tu. Parabolická valcová plocha Tu.

Pozrite si tiež príklad 3 v práci Tu.

Veta o súradniciach

V kapitole Lineárna súradnicová sústava sme uviedli:

Súradnice bodu X afinného priestoru $\mathcal{A}$ vzhľadom na danú afinnú sústavu súradníc **sú súradnice jeho polohového vektora** $\overrightarrow{OX}$ vzhľadom na bázu súradnicových vektorov. Teda platí

$$\overrightarrow{OX} = x_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e_n}.$$

Po zavedení súradnicovej sústavy môžeme nielen vektory ale aj body "**sčitovať**". Pravidlá, ktoré musíme pritom dodržiavať stanovuje tzv. základná veta o súradniciach, ktorú poznáme z lineárnej algebry. Nech $(n+1)$-tica $\langle O; \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\rangle$ je repér afinného priestoru $\mathcal{A}$.

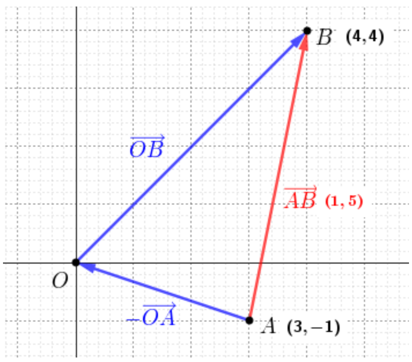
Základná veta o súradniciach.

Nech sú dané dva body a ich súradnice $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n], B = [b_1, b_2, \cdots, b_n] \in \mathcal{A}$ a vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathrm{V}$, potom

1. $B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \cdots, b_n - a_n)$
2. $A + \vec{u} = [a_1 + u_1, a_2 + u_2, \cdots, a_n + u_n]$

sú body afinného priestoru $\mathcal{A}$.

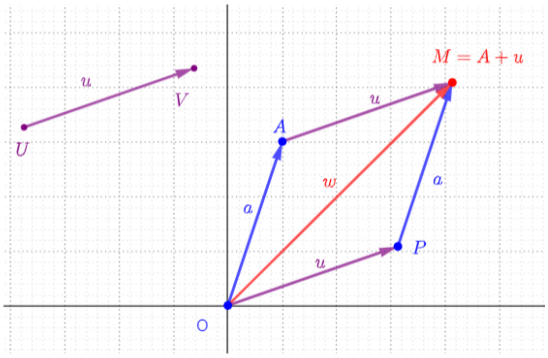
Dôkaz.

1. Zrejme z vlastnosti (AP1) afinného priestoru vyplýva, že $\forall A, B \in \mathcal{A}$ a pre začiatok súradnej sústavy O bude platiť $f(A,B) = f(A,O) + f(O,B)$ tj. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ odkiaľ s využitím Tvrdenia (Rozdiel bodov) dostaneme
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \stackrel{\text{def}}{=} B - A.$$
Z bijektívnosti LSS a z vlastnosti $\overrightarrow{OP} = p_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + p_n\boldsymbol{e_n}$ vyplýva, že
$$\overrightarrow{OB} = b_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + b_n\boldsymbol{e_n}$$
$$\overrightarrow{OA} = a_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{e_n}.$$
Z definície sčítania (rozdielu) vektorov v báze $\langle \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\rangle$ dostaneme
$$B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \cdots, b_n - a_n)$$


Otvorte si dynamický obrázok Tu. Interpretujte to na AP - hyperbola.
2. Z vlastnosti (AP2') afinného priestoru vyplýva, že $\forall A \in \mathcal{A}; \forall \vec{u} \in V$ existuje práve jeden bod $M \in \mathcal{A}$ taký, že $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$. Keďže aj pre bod $O \in \mathcal{A}$ platí, že existuje práve jeden bod $P \in \mathcal{A}$ taký, že $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$ je polohový vektor v danom repéri. Pre polohové vektory platí
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$
ale $\vec{u} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AM}$. Po úprave dostaneme
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = (A - O) + (P - O) = (a_1, a_2, \cdots, a_n) + (u_1, u_2, \cdots, u_n)$$
$$= (a_1 + u_1, \cdots, a_n + u_n)$$
.

Záver

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = A + \vec{u}.$$



Applet Tu.

Zmena repéru

Pri závádzaní lineárnej súradnicovej sústavy sa v definícii nekládla požiadavka ortonormálnosti na repér $\langle O; \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n} \rangle$ afinného priestoru $\mathcal{A}$. To znamená, že súradnice nejakého bodu $Q \in \mathcal{A}$ môžeme vyjadriť aj vzhľadom na ľubovoľný iný repér. Ako určiť súradnice bodu pri zmene repéru popisuje nasledujúci príklad.

Príklad.

- Nech $S = \left\langle Q[1,-2,1], \vec{a}(1,1,2),\ \vec{b}(-3,2,1),\ \vec{c}(-2,1,0) \right\rangle$ je súradnicová sústava afinného priestoru $(\mathcal{A}, V_3(\mathbb{R}), f)$, kde zobrazenie f je definované ako rozdiel súradníc bodov po zložkách. Nájdite bod $R \in \mathcal{A}$, ktorého súradnice vzhľadom k repéru S sú $[-2,1,2]$.
- Nájdite súradnice bodu $P = [4,-3,1]$ vzhľadom k báze S.

Riešenie.

1. Zrejme

   $$R = [1,-2,1] + (-2).(1,1,2) + 1(-3,2,1) + 2.(-2,1,0) = (-8,0,-2).$$

   Toto sú súradnice bodu$R$ vzhľadom k ortonormálnemu repéru - kanonické súradnice. Je dôležité dodržať poradie prvkov repéru S. Urobte geometrickú interpretáciu.

2. Určiť súradnice vzhľadom k repéru S znamená bod P vyjadriť ako lineárnu kombináciu prvkov repéru S. Opäť treba dať pozor na poradie prvkov bázy. Musíme nájsť $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí:

   $P = Q + q_1.(1,1,2) + q_2.(-3,2,1) + q_3.(-2,1,0)$ resp.

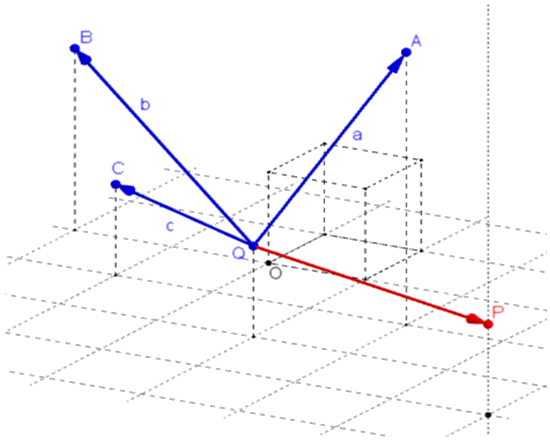
   $(3,-1,0) = q_1.(1,1,2) + q_2.(-3,2,1) + q_3.(-2,1,0).$

   Úlohu môžeme riešiť ako sústavu rovníc (vyriešte úlohu týmto spôsobom).

   $$\begin{aligned} 3 &= 1.q_1 \ - 3.q_2 \ - 2.q_3 \\ -1 &= 1.q_1 \ + 2.q_2 \ + 1.q_3 \\ 0 &= 2.q_1 \ + 1.q_2 \ + 0.q_3 \end{aligned}$$

   Poslednú rovnosť môžeme vyjadriť v maticovom tvare (vektory repéru zapisujeme do stĺpcov!):

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$



Otvorte si dynamickú konštrukciu Tu.

Riešením je bod $= (1, -2, 2)$.

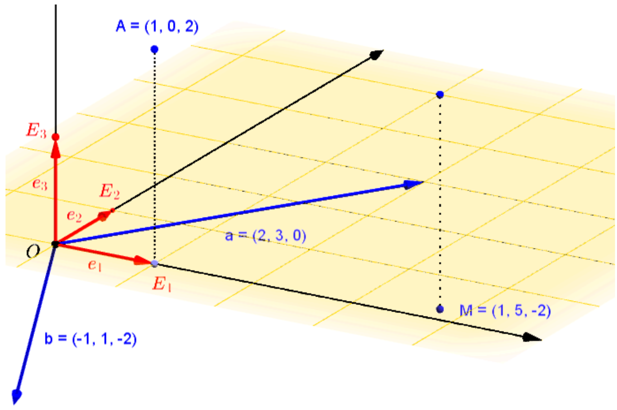
Cvičenie.

Zistite, aké súradnice má bod $M = A + (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) \in A^3$ v afinnej súradnicovej sústave $[O; \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}]$, ak

$A = O + (\boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_3})$;

$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e_1} + 3\boldsymbol{e_2}$;

$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} - 2\boldsymbol{e_3}$.



Riešenie.

1. Algebraické riešenie: Dosaďte do výrazu $M = A + (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$ hodnoty za $A, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ a dostanete súradnice $[1, 5, -2]$.
2. Grafické riešenie: V GeoGebre aktivujte si repér $\langle O; \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3} \rangle$. Do vstupného poľa postupne zadajte $A = O + (\boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_3})$, $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e_1} + 3\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} - 2\boldsymbol{e_3}$ a $M = A + (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$.

Afinný podpriestor

Zvoľme si v afinnom priestore $(\mathcal{A}, V, +)$ jeden pevný bod P a nejaké zameranie V', ktoré je podmnožinou vektorového zamerania V. Dostaneme podmnožinu bodov afinného priestoru, ktorá bude spĺňať axiómy afinného priestoru. Takouto množinou je napríklad priamka v euklidovskej rovine alebo rovina v euklidovskom priestore.

Definícia (Afinný podpriestor).

Nech $(\mathcal{A}, V, +)$ je afinný priestor nad poľom $\mathbb{R}$. Neprázdnu podmnožinu $\mathcal{A}' : \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ nazývame **afinný podpriestor** resp. lineárna varieta afinného priestoru $\mathbb{A}$, ak existuje vektorový podpriestor $\mathrm{V}' \subset \mathrm{V}$, pričom platí

- $\forall X, Y \in \mathcal{A}' : \overrightarrow{XY} = (Y - X) \in \mathrm{V}'$
- $\forall X \in \mathcal{A}', \forall u \in \mathrm{V}' : (X + u) \in \mathcal{A}'$

Dokážte, že $\mathcal{A}' = \{(0, x, 0, 1), x \in \mathbb{R}\}$ je afinný podpriestor priestoru $\mathbb{A}_3 = (\mathcal{A}, V, f)$,

$$\mathcal{A} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4), x \in \mathbb{R}^4; x_4 = 1\right\}$$

$$\mathrm{V} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4), x \in \mathbb{R}^4; x_4 = 0\right\}$$

f je odčítanie po zložkách. [MON 1.4.1]

Tvrdenie.

Nech $X = [x_1, x_2, \cdots x_n]$ je ľubovoľný bod z afinného priestoru $\mathbb{A}^n$. Potom bod X leží v podpriestore $\mathbb{A}^k$, práve vtedy, keď platí rovnosť

$$X = A + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_k\vec{a}_k,$$

kde $A = [a_1, a_2, \cdots a_n] \in \mathcal{A}^k$; $t_1, t_2, \cdots, t_k$ sú reálne čísla a $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_k$ je k lineárne nezávislých vektorov podpriestoru $\mathcal{A}^k (\mathcal{A}^k \subset \mathcal{A})$. Uvedená rovnosť sa nazýva **parametrické vyjadrenie podpriestoru** $\mathbb{A}^k$. Čísla $t_1, t_2, \cdots, t_k$ sa nazývajú **parametre bodu** X.

Poznámky.

Pre rovnosť $X = A + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_k\vec{a}_k$ sa tradične používa nie úplne presný názov parametrické rovnice podpriestoru. Parametrické rovnice podpriestoru $\mathbb{A}^k$ majú známy tvar

$$x_1 = a_1 + a_{11}t_1 + \cdots + a_{1k}t_k$$

$$x_2 = a_2 + a_{21}t_1 + \cdots + a_{2k}t_k$$

...

$$x_n = a_n + a_{n1}t_1 + \cdots + a_{nk}t_k,$$

kde $X = [x_1, x_2, \cdots x_n]$ sú súradnice bodu X a $(a_{i0}, a_{i1}, \cdots, a_{ik})$ sú súradnice vektora $\vec{a}_i$ v kanonickej báze $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n \rangle$. Túto sústavu rovníc môžeme zapísať pomocou matíc. Maticový tvar parametrických rovníc vyzerá takto

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & & & \\ a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdot \\ t_k \end{pmatrix}$$

Maticu sústavy $\boldsymbol{a}_{ij}$ z predchádzajúceho vyjadrenia nazývame matica prechodu od afinnej súradnicovej sústavy $\langle O; \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\rangle$ do sústavy $\langle A; \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_k}\rangle$.

Príklad 1.

Zistite, či body $M = [9, -2, 5], N = [4, 1, 6]$ incidujú s podpriestorom (ležia v podpriestore) $\langle A, u, v\rangle$. Dané sú bod $A = [1, 3, 2]$ a vektory $u = (2, -1, 1), v = (1, -1, 0)$. Nájdite parametrické vyjadrenie tohto podpriestoru. Vytvorte grafickú ilustrácia k tomuto príkladu.

Riešenie.

Hľadáme reálne čísla r, s, pre ktoré platí rovnosť (vektorová rovnica má práve jedno riešenie)

$[9, -2, 5] = [1, 3, 2] + r(2, -1, 1) + s(1, -1, 0)$ resp. $[4, 1, 6] = [1, 3, 2] + r(2, -1, 1) + s(1, -1, 0)$

Odpoveď: Bod $M = [9, -2, 5]$ inciduje s daným podpriestorom, riešenie nájdete Tu. Ukážte, že bod $N = [4, 1, 6]$ neleží v danom podpriestore.

Neparametrické vyjadrenie podpriestoru

V afinnom priestore $\mathbb{A}^n$ môžeme lineárne podpriestory $\mathbb{A}^k \subset \mathbb{A}^n$ vyjadriť aj **neparametricky** pomocou sústavy p lineárnych rovníc s n neznámymi. Ich počet je závislý od dimenzie podpriestoru k a od dimenzie daného priestoru n. Musí byť splnená rovnosť: $p = n - k$. V stredoškolskej analytickej geometrii

a. Priamka $(k = 1)$ ležiaca v rovine $(n = 2)$ je vyjadrená jedinou lineárnou rovnicou s dvoma neznámymi. Bod $(k = 0)$ je chápaný ako prienik dvoch priamok, teda môže byť vyjadrený ako sústava dvoch lineárnych rovníc.
b. V afinnom priestore $\mathbb{A}^3$ rovina (nadrovina $(k = 2)$) je vyjadrená jedinou lineárnou rovnicou s troma neznámymi $1 = 3 - 2$. Priamka je prienikom dvoch rovín a na jej určenie sú potrebné dve rovnice $2 = 3 - 1$.

Príklad 2.

a. Nájdite neparametrické vyjadrenie roviny z príkladu 1 a zistite, či body $M = [9, -2, 5], N = [4, 1, 6]$ incidujú s touto rovinou.
b. Nájdite parametrické aj neparametrické vyjadrenie roviny v $\mathbb{A}^3$, ktorá prechádza bodom $A = [1, 2, 3]$ a má smer $\vec{u} = (-5, 6, 4), \vec{v} = (2, -1, 0)$.
   Riešenie Tu.
   Vytvorte grafickú ilustrácia k tomuto príkladu.

Pre lineárny podpriestor platí, že s každými dvoma bodmi A, B obsahuje tento podpriestor aj bod

$A + t(B - A);\ \ t \in \mathbb{R}.$

Dôkaz tohto tvrdenia sa robí v základnom kurze z lineárnej algebry.

Lineárne podpriestory s danou dimenziou.

1. Afinný podpriestor dimenzie 1 sa nazýva afinnou **priamka**.

2. Afinný podpriestor dimenzie 2 sa nazýva afinnou **rovina**.
3. Afinný podpriestor dimenzie n-1 v n-rozmernom afinnom priestore sa nazýva **nadrovina** . Zrejme priamka je zároveň nadrovinou v priestore $\mathbb{A}^2$ a rovina je nadrovinou v $\mathbb{A}^3$.
4. Budeme hovoriť, že podpriestor $(\mathcal{A}', \mathrm{V}', +)$ je k-rozmerný (má dimenziu k), ak podpriestor V' má dimenziu k (dim $\mathrm{V}' = k$).

Príklady.

1. Napíšte parametrické vyjadrenie podpriestoru v $\mathbb{A}^4$, ktorý je daný všeobecnými rovnicami:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 5 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 - 7 = 0 \end{aligned}$$

2. Dokážte, že množina

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - 2z = 5, x - y = 1\}$$

je priamkou v afinnom priestore

$$\begin{aligned} &\mathbb{A} = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\}, V^3(\mathbb{R}) \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\} \end{aligned}$$

.

Riešenie.

1. Otvorte si riešenie Tu.
2. Zobrazte roviny

$$\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - 2z = 5\}, \beta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = 1\}$$

v 3D GeoGebre. Grafické riešenie Tu.

Vzájomná poloha útvarov

Lineárne podpriestory, ktorých prienik je prázdna množina, nazývame **disjunktné**. Hovoríme aj, že takého podpriestory sa nepretínajú. Ak nie sú dva podpriestory disjunktné, potom sú nedisjunktné (pretínajú sa, majú neprázdny prienik).

Tvrdenie.

Nech $\mathbb{A}^r = (\mathcal{A}_1, V_1, +), \mathbb{A}^s = (\mathcal{A}_2, V_2, +)$ sú lineárne podpriestory priestoru $\mathbb{A}^n$ a V_1, V_2 sú ich smerové podpriestory. Potom platia nasledovné tvrdenia:

1. Neprázdny prienik podpriestorov $\mathbb{A}^r$ a $\mathbb{A}^s$ je podpriestor, ktorého smer je prienikom $V_1 \cap V_2$.
2. Ak je prienik podpriestorov neprázdny $\mathbb{A}^r \cap \mathbb{A}^s \neq \emptyset$ a platí, že $V_1 \subset V_2$, tak podpriestor $\mathbb{A}^r \subset \mathbb{A}^s$.

Lineárne podpriestory sa nazývajú:

a. **Rovnobežné**, ak všetky smerové vektory jedného podpriestoru sú smerovými vektormi druhého.
b. **Rôznobežné**, ak majú spoločný aspoň jeden bod a žiadny z podpriestorov nie je podmnožinou druhého.
c. **Mimobežné**, ak sú disjunktné a prienik smerových podpriestorov obsahuje len nulový vektor.

Príklady.

Zistite, aká je vzájomná poloha priamok

1. $p : x = 3 + t, y = 1 + t, z = 2 - t$
   $q : x = 4 - t, y = -t, z = 2 + t$
2. $p : x = 3 + t, y = 1 + t, z = 2 - t$
   $r : x + y + z - 5 = 0, x - y + 2z - 8 = 0$
3. $r : x + y + z - 5 = 0, x - y + 2z - 8 = 0$
   $s : x = 5 + t, y = -t, z = 2 + t$

Riešenie.

1. Smerové vektory priamok p, q sú lineárne závislé, preto $V_1 \subset V_2$ uvažované priamky sú navzájom rovnobežné.
2. Ak priamky p, r majú spoločný bod $P = [x_p, y_p, z_p]$, tak existuje parameter t, ktorý je riešením sústavy

   $$x_p = 3 + t, y_p = 1 + t, z_p = 2 - t$$

   a zároveň súradnice $[3 + t, 1 + t, 2 - t]$ tohto spoločného bodu priamky p s priamkou r musia byť riešením sústavy rovníc

   $$\begin{aligned}&(3 + t) + (1 + t) + (2 - t) - 5 = 0\\&(3 + t) - (1 + t) + 2(2 - t) - 8 = 0\end{aligned}$$

   čiže

   $$\begin{aligned}&t + 1 = 0\\&-2t - 2 = 0\end{aligned}$$

   ktorá má jediné riešenie $t = -1$. Prienikom priamok je teda bod $[2, 0, 3]$ a preto sú priamky rôznobežné.
3. Odpovedajúca sústava nemá riešenie a spoločné vektory sú LN, priamky sú mimobežné

Domáca úloha.

Práca (Tisoň, Lineárne podpriestory, dostupné Tu) strana 31.

Euklidovský priestor

Vektorový priestor, na ktorom je definovaný skalárny súčin (tiež nazývaný aj vnútorný súčin) umožňuje rozumne definovať geometrické pojmy uhol a vzdialenosť, čím na tomto vektorovom priestore vzniká dodatočná geometrická metrika.

Euklidovský priestor je n-rozmerný afinný priestor so zameraním $V_n(\mathbb{R})$ a s vyššie definovaným skalárnym súčinom; označovať ho budeme symbolom $\mathbb{E}_n$.

Táto definícia presne vystihuje podstatu n-rozmerného euklidovského priestoru ako afinného priestoru so skalárnym súčinom na jeho zameraní. Pre úplnosť by však bolo vhodné zdôrazniť, že skalárny súčin indukuje metriku a normu, čo je kľúčové pre geometriu tohto priestoru. Normu sme popísali v kapitole Cauchy-Schwarzova nerovnosť.

Definícia (Súradnicová sústava).
Lineárnu súradnicovú sústavu v $\mathbb{E}_n$ danú repérom $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ nazývame karteziánskou súradnicovou sústavou, ak $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ je ortonormálna báza zamerania $V_n(\mathbb{R})$.

Budeme používať označenie súradníc bodu: $X[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (hrananté zátvorky) a označenie súradníc vektora: $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ (okrúhle zátvorky) v karteziánskej súradnicovej sústave.

Definícia (Vzdialenosť bodov).
Pod vzdialenosťou dvoch bodov X, Y euklidovského priestoru rozumieme normu prislúchajúceho vektora $\vec{v} = \overrightarrow{XY}$, t.j.

$$|XY| = ||Y - X|| = \parallel \vec{v} \parallel = \sqrt{\overrightarrow{XY}\,.\,\overrightarrow{XY}}\,.$$

Dokážte.

1. Pre ľubovoľné tri body $X, Y, Z \in \mathbb{E}_n$ platí
$$|XY| + |YZ| = |XZ| \Leftrightarrow Y \in XZ$$
(Poznamenajme, že zápis $Y \in XZ$ znamená, že bod Y patrí úsečke XZ, čo znamená, že existuje parameter $t \in (0; 1)$, taký, že platí $Y = X + t(Z - X)$.)
2. Bod $\in \mathbb{E}_n$ je stredom dvojice bodov $A, B \in \mathbb{E}_n$ práve vtedy, keď $|SA| = |SB| = \frac{1}{2}|AB|$.

Tvrdenie.
Nech $\alpha : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$ je nadrovina v $\mathbb{E}_n$. Označme vektor $\vec{n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Potom:

1. Vektor $\vec{n}$ je nenulový.
2. Vektor $\vec{n}$ je kolmý na každý vektor zo zamerania V_α.
3. Každý vektor, ktorý je kolmý na V_α, je násobkom vektora $\vec{n}$.

Nech α, β sú nadroviny euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$. Potom α, β sú rovnobežné nadroviny práve vtedy, keď ich normálové vektory sú lineárne závislé.

Vektor $\vec{n}$ sa nazýva normálový vektor nadroviny α (normálový vektor nadroviny α budeme označovať aj $\vec{n}_\alpha$).

Definícia (uhol dvoch euklidovských podpriestorov).

1. φ nazývame uhol priamok a, b, ak:
   $\cos\varphi = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$, kde $V_a = [\vec{a}]$, $V_b = [\vec{b}]$.
2. Uhol priamky p a podpriestoru $\mathbb{E}'_k$:
   $$\angle(p, \mathbb{E}'_k) := \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{ak } p \perp \mathbb{E}'_k \\ \angle(\vec{p}, \vec{p}^*), & \text{ak } p \not\perp \mathbb{E}'_k \end{cases}$$
   kde $\vec{p}^*$ je ortogonálny priemet smerového vektora $\vec{p}$ priamky p do podpriestoru V'_k.
3. Uhol podpriestoru $\mathbb{E}'_k$ a nadroviny $\mathbb{E}''_{n-1}$:
   $$\angle(\mathbb{E}'_k, \mathbb{E}''_{n-1}) := \angle({\mathbb{E}'_k}^\perp, {\mathbb{E}''_{n-1}}^\perp)$$

Cvičenie. Zdôvodnite:

1. Ak $X[x_1, x_2, \dots, x_n], Y[y_1, y_2, \dots, y_n]$ sú súradnice bodov v karteziánskej súradnicovej sústave, tak pre vzdialenosť bodov X, Y platí
   $|XY| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$..
2. Bod $S \in \mathbb{E}_n$ je stredom dvojice bodov $A, B \in \mathbb{E}_n$ práve vtedy, keď $|SA| = |SB| = \frac{1}{2}|AB|$.
3. Vypočítajte veľkosť vektora $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, ak $||\vec{a}|| = 3, ||\vec{b}|| = 4, |\angle(\vec{a}, \vec{b})|| = \frac{2}{3}\pi$.

Príklad - Zbierka (MOZ, 2016) Úloha 1.4.11

Napíšte parametrické aj neparametrické vyjadrenie roviny ρ, ktorá prechádza bodom $A[2,3,-1]$ a je rovnobežná s priamkami p, q, ktorých parametrické vyjadrenia sú:

$$p: \begin{cases} x_1 = 1 - u \\ x_2 = 2 + 3u \\ x_3 = 5 + 2u \end{cases} q: \begin{cases} x_1 = 2 + 4v \\ x_2 = 1 + v \\ x_3 = -3v \end{cases}$$

Riešenie.

1. Smerový vektor priamky p je $\overrightarrow{v_p} = (-1,3,2)$ a smerový vektor priamky q je $\overrightarrow{v_q} = (4,1,-3)$.
2. Vektorový súčin $\overrightarrow{v_p} \times \overrightarrow{v_q}$ na získanie normálového vektora roviny. Normálový vektor roviny ρ je kolmý na oba smerové vektory priamok p a q. Vypočítame:

$$\vec{n} = \overrightarrow{v_p} \times \overrightarrow{v_q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$\vec{n} = \mathbf{i}(3 \cdot (-3) - 2 \cdot 1) - \mathbf{j}((-1) \cdot (-3) - 2 \cdot 4) + \mathbf{k}((-1) \cdot 1 - 3 \cdot 4)$

$\vec{n} = \mathbf{i}(-9 - 2) - \mathbf{j}(3 - 8) + \mathbf{k}(-1 - 12)$

$\vec{n} = \mathbf{i}(-11) - \mathbf{j}(-5) + \mathbf{k}(-13)$

$\vec{n} = [-11, 5, -13]$

Rovnica roviny ρ:

Neparametrické - vyjadrenie roviny ρ resp. všeobecný tvar.

Všeobecná rovnica roviny ρ je daná tvarom:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

kde $[x_0, y_0, z_0]$ je bod v rovine ρ (v našom prípade bod $A = [2,3,-1]$), a a, b, c sú zložky normálneho vektora $\vec{n} = [-11, 5, -13]$. Dosadením do všeobecnej rovnice roviny dostaneme:

$$-11(x - 2) + 5(y - 3) - 13(z + 1) = 0$$

odkiaľ všeobecná rovnica roviny ρ je:

$$-11x + 5y - 13z = 6.$$

Parametrické - vyjadrenie roviny ρ.

Parametrické vyjadrenie roviny ρ je:

$$\rho(s,t) = A + s\overrightarrow{v_p} + t\overrightarrow{v_q},$$

kde $A = [2,3,-1]$, $\overrightarrow{v_p} = [-1,3,2]$ a $\overrightarrow{v_q} = [4,1,-3]$.

Parametrické vyjadrenie:

$$\rho(s,t) \begin{cases} x_1 = 2 - s + 4t \\ x_2 = 3 + 3s + t \\ x_3 = -1 + 2s - 3t \end{cases}$$

kde $s, t \in \mathbb{R}$.

Lineárna kombinácia bodov

Nech $\mathbb{E}_n$ je n-rozmerný euklidovský priestor so zameraním $V_n(\mathbb{R})$ a nech $P, Q, P_1, P_2, \ldots, P_m$ sú body tohto euklidovského priestoru.

Definícia.

Afinná (barycentrická resp. lineárna) **kombinácia bodov**. Nech $P, P_1, P_2, \ldots, P_m \in \mathbb{E}_n$, tak súčtom (afinnou kombináciou bodov) $\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_m P_m$ rozumieme bod

(AK) $$P + \alpha_1(P_1 - P) + \cdots + \alpha_m(P_m - P),$$

pričom pre $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ musí platiť $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$.

Dôkaz korektnosti definície.

Treba ukázať, že afinná kombinácia (AK) nezávisí od voľby bodu P.

Nech $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$ a nech $Q \in \mathbb{E}_n$ je ľubovoľný bod (uvedomte si, že $\mathbb{E}_n$ je tiež afinným priestotom). Upravujme afinnú kombináciu

$$Q + \alpha_1(P_1 - Q) + \cdots + \alpha_m(P_m - Q) =$$

aplikovaním tvrdenia $\forall P, Q \in \mathbb{E}_n : Q = P + (Q - P)$ dostaneme

$$= P + (Q - P) + \alpha_1(P_1 - (P + (Q - P)) + \cdots + \alpha_m(P_m - (P + (Q - P)) =$$

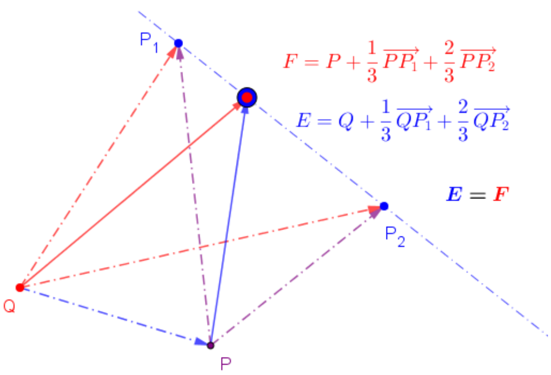
$$= P + (Q - P) - \alpha_1(Q - P) + \cdots - \alpha_m(Q - P) + \alpha_1(P_1 - P) + \cdots + \alpha_m(P_m - P) =$$

$$= P + (Q - P) - [(\alpha_1 + \cdots + \alpha_m)(Q - P)] + [\alpha_1(P_1 - P) + \cdots + \alpha_m(P_m - P)] =$$

$$= P + [(Q - P) - 1.(Q - P)] + [\alpha_1(P_1 - P) + \cdots + \alpha_m(P_m - P)] =$$

$$= P + \alpha_1(P_1 - P) + \cdots + \alpha_m(P_m - P).$$

Čo bolo treba dokázať.



Otvorte si applet Tu.

Usporiadaná množina bodov $\boldsymbol{S} = \{O, E_1, \ldots, E_n\}$ afinného priestoru $\mathcal{A}^n$ sa nazýva **simplex** priestoru $\mathcal{A}^n$, kde

- $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}\rangle$ je repér priestoru $\mathcal{A}^n$,
- $\overrightarrow{OE_i} = \boldsymbol{e_i}$ sú ortonormálové vektory.

Ľubovoľný bod X má v tomto repéri súradnice $[x_1, \ldots, x_n]$.

Teda môžeme zapísať $\overrightarrow{OX} = x_1\boldsymbol{e_1} + \ldots + x_n\boldsymbol{e_n} = x_1\overrightarrow{OE_1} + \ldots + x_n\overrightarrow{OE_n}$.

Veta (Bod ako kombinácia simplexu).

Ľubovoľný bod $X \in \mathcal{A}^n$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$X = x_o O + x_1 E_1 + \cdots + x_n E_n,$$

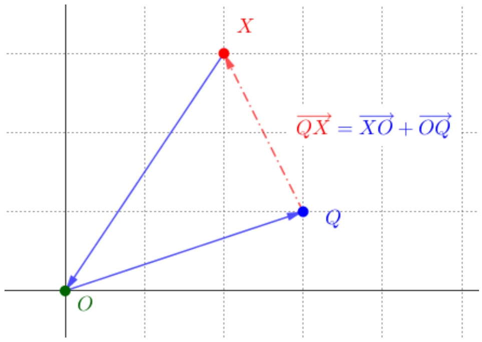
kde $x_o + x_1 + \cdots + x_n = 1$ a $\boldsymbol{S} = \{O, E_1, \ldots, E_n\}$ je simplex afinného priestoru $\mathcal{A}^n$.

Dôkaz.

Z vlastnosti (AP1) afinného priestoru vyplýva, že pre **ľubovoľný** (každý) bod $Q \in \mathcal{A}^n$ platí

(Q) $\qquad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QX}.$

Vektor $\overrightarrow{OX}$ vzhľadom na repér $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n} \rangle$ sa dá jednoznačne vyjadriť ako lineárna kombinácia $\overrightarrow{OX} = x_1 \overrightarrow{OE_1} + \ldots + x_n \overrightarrow{OE_n}$.



Využitím vzťahov $\overrightarrow{OE_i} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QE_i}$ upravme vzťah (Q)

$$\overrightarrow{OX} = x_1(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QE_1}) + \ldots + x_n(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QE_n}),$$

odkiaľ

$$\overrightarrow{OX} = (x_1 + \ldots + x_n)\overrightarrow{OQ} + x_1\overrightarrow{QE_1} + \ldots + x_n\overrightarrow{QE_n}.$$

Bez ujmy na obecnosti položme resp. označme $x_0 = 1 - (x_1 + \ldots + x_n)$. Potom dostaneme

$$\overrightarrow{OX} = (1 - x_0)(Q - O) + x_1(E_1 - Q) + \ldots + x_n(E_n - Q)$$

Na základe tvrdenia " Operácie s bodmi" môžeme písať

$$\overrightarrow{OX} = Q - x_0 Q - O + x_0 O - (x_1 Q + \ldots + x_n Q) + (x_1 E_1 + \ldots + x_n E_n)$$

$$X = (O - O) + x_0 O + Q - x_0 Q - (x_1 Q + \ldots + x_n Q) + (x_1 E_1 + \ldots + x_n E_n)$$

$$X = x_0 O + [(1 - x_0) - (x_1 + \ldots + x_n)]Q + (x_1 E_1 + \ldots + x_n E_n).$$

Teraz si stačí uvedomiť, že $[(1 - x_0) - (x_1 + \ldots + x_n)] = 0$. Potom dostaneme

$$X = x_0 O + (x_1 E_1 + \ldots + x_n E_n).$$

Tým je dôkaz ukončený..

Pretože rovnosti v dôkaze predošlej vety nezávisia na voľbe bodu $Q \in \mathcal{A}$, tak ku každému usporiadanému simplexu S a bodu X afinného priestoru $\mathcal{A}^n$ existuje jediná sústava skalárov $x_o, \ldots, x_n$ tak, že platí rovnosť uvedená v tejto vete. Zrejme platí aj obrátená veta: Každá sústava skalárov $x_o, \ldots, x_n: \quad x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1$ jednoznačne určuje bod $X \in \mathcal{A}^n$, pre ktorý platí tvrdenie vety.

Z dôkazu predchádzajúcej vety vyplýva, že súčet $x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ je rovný jednej. Preto podmienka $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$ v definícii afinnej kombinácii bodov je dôležitá a nutná.

Cvičenie.

1. Nech $A, B \in \mathbb{E}_2$ sú dva rôzne body. Zistite, aký bod predstavuje lineárna kombinácia $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.

2. Nech $A, B, C \in \mathbb{E}_3$ sú tri nekolineárne body. Zistite, ktorý bod predstavuje lineárna kombinácia $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$. Vyjadrite pomocou lineárnej kombinácie vrcholov trojuholníka ABC ľubovoľný vnútorný bod tohto trojuholníka.
3. ♥ Vyjadrite pomocou lineárnej kombinácie nezávislých bodov $A_0, A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{E}_{k+1}$ ľubovoľný bod podpriestoru $\mathbb{E}_{k+1}$ určeného týmito bodmi. [Poznámka: lineárne nezávislé body sú také, pre ktoré napr. vektory $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k} \in \mathbb{V}_k$ sú nezávislé.]

Riešenie.

1. Upravujme
$$\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B = A - \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B = A + \tfrac{1}{2}(B - A),$$
čo predstavuje stred úsečky A, B. Zobrazte túto situáciu v GeoGebre.
2. Znázornite túto situáciu v GeoGebre, otvorte si zadanie Tu. Riešenie Tu.
3. Podľa vety "bod ako kombinácia simplexu" pre bod X podpriestoru $\mathbb{E}_{k+1}$ a vlastností simplexu $\boldsymbol{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ platí
(Mx) $$X = x_0A_0 + x_1A_1 + \cdots + x_kA_k,$$
kde súčet $x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ je rovný jednej. Vzťah (Mx) predstavuje bod podpriestoru $\mathbb{E}_{k+1}$.
   - Pre podpriestor $\mathbb{E}_2$ množina všetkých bodov X spĺňajúcich podmienku (Mx) je zrejme priamka (útvar určený dvoma nezávislými bodmi). Jej parametrické vyjadrenie má tvar
   $$X = A_0 + t(A_1 - A_0).$$
   Po úprave dostaneme
   $$X = (1 - t) \cdot A_0 + t \cdot A_1,$$
   čo predstavuje lineárnu kombináciu bodov A_0, A_1.
   - Pre podpriestor $\mathbb{E}_3$ to bude rovina (útvar určený tromi nezávislými bodmi). Jej parametrické vyjadrenie má tvar
   $$X = A_0 + r(A_1 - A_0) + s(A_2 - A_0).$$
   Po úprave dostaneme
   $$X = (1 - r - s) \cdot A_0 + r \cdot A_1 + s \cdot A_2,$$
   čo predstavuje lineárnu kombináciu bodov A_0, A_1, A_2.

Definícia (Deliaci pomer bodov).

Nech $A, B \in \mathbb{E}_n$ a $C \neq B$ sú tri kolineárne body. Deliacim pomerom bodov A, B, C (v tomto poradí) nazývame reálne číslo λ také, že

(DP) $$(C - A) = \lambda(C - B).$$

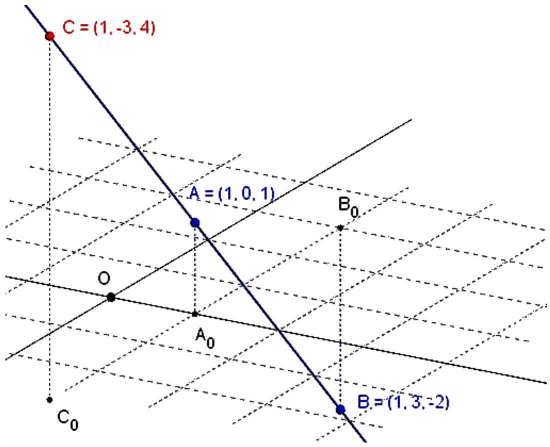
Budeme ho označovať (ABC).

Vypočítajte (ABC), ak:

1. $A = [1, 0, 1], B = [1, 3, -2], C = [1, -3, 4]$
2. $A = [1, 1, 1], B = [2, 0, -1], C = AB \cap \alpha, \alpha : 2x - 3y + 2z = 0$
3. $A = [1, -1], B = A + 2\vec{u}, C = A - \vec{u}, \vec{u} = (1, 2)$.

Riešenie.

1. Najskôr je nutné zistiť, či body A, B, C sú kolineárne.



Otvorte si applet Tu.

Pre deliaci pomer λ musí platiť:

(λ) $$(C - A) = \lambda \cdot (C - B) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Potom môžeme spočítať

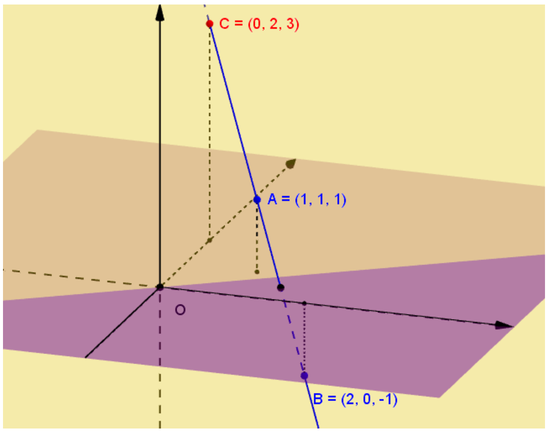
$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = ([1, -3, 4] - [1, 0, 1]) = (0, -3, 3); \vec{v} = \overrightarrow{BC}\,([1, 3, -2] - [1, -3, 4]) = (0, -6, 6).$$

Po dosadení do vzťahu (λ) dostaneme $\lambda = 2$.

2. Najskôr určte súradnice priesečníka C priamky $\overleftrightarrow{AB}$ a roviny α. Rovnica priamky $\overleftrightarrow{AB}$ je daná parametricky

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 1 \\ -t + 1 \\ -2t + 1 \end{pmatrix}$$

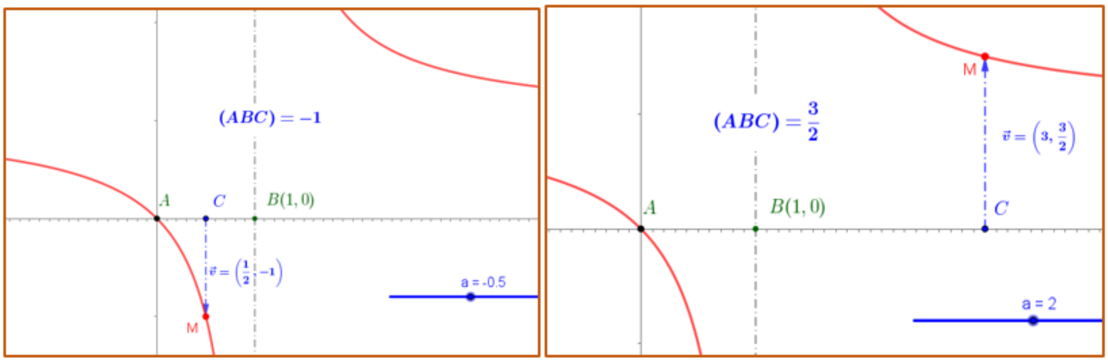
Po dosadení do všeobecnej rovnice roviny $\alpha : 2x - 3y + 2z = 0$ určíme riešenie $t = -1$. Spoločný bod C má súradnice $[0, 2, 3]$.



Otvorte si applet Tu, kde môžete meniť zadanie.

3. Najskôr určte súradnice bodov B, C.

Nasledujúce obrázky dokumentujú vzťah deliaceho pomeru pre pevne zvolené body A, B a premenlivý bod C. Tento vzťah predstavuje hyperbolickú funkciu.



Otvorte si interaktívnu konštrukciu Tu.

Tvrdenie (Vzťah deliaceho pomeru a lineárnej kombinácie).

Nech bod C je lineárnou kombináciou bodov A, B, ktorá má tvar $C = (1-\lambda)A + \lambda B,\ \lambda \neq 1$. Potom pre deliaci pomer platí:

(DP1)
$$(ABC) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Dôkaz.

Vieme, že $C = (1-\lambda)A + \lambda B,\ \lambda \neq 1$. Po roznásobení dostaneme

$$C = A - \lambda A + \lambda B,$$

z čoho už priamo plynie výsledok.

Platí aj tvrdenie v opačnom smere. Nech pre deliaci pomer platí: $(ABC) = \lambda$. Potom platí:

$$C = (1-\lambda)A + \lambda B,\ \lambda \neq 1.$$

Vieme, že $(C - A) = \lambda(C - B)$. Po vydelení číslom $\lambda - 1$ dostaneme

$$\frac{1}{\lambda - 1}(C - A) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}(C - B).$$

Pozrite si grafické zdôvodnenie Tu.

Poznámky.

1. Z definície deliaceho pomeru $(C-A)=\lambda(C-B)$ vyplýva, že vektory $\vec{u}=(C-A), \vec{v}=(C-B)$ sú lineárne závislé a platí $\vec{u}=\lambda\cdot\vec{v}$. Preto kvôli korektnosti definície deliaceho pomeru je v definícii uvádzaná podmienka kolineárnosti bodov A,B,C. Z predchádzajúceho tvrdenia aj z cvičenia 3. tiež vyplýva, že **body**A,B,C **sú kolineárne**.
2. Z cvičenia 1. vyplýva, že existuje bod $S=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$, ktorý budeme nazývať stred dvojice bodov A,B (resp. úsečky AB). Ak $A\neq B$, tak pre stred S platí $(ABS)=-1$. Stred dvojice bodov A,B budeme označovať' S_{AB}.

Tvrdenie.

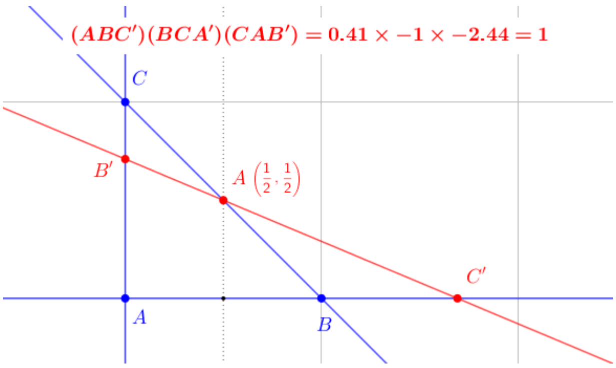
a) Nech body $A,B,C,D\in\mathbb{E}_n$, potom vektory $A-B=D-C$ (sa rovnajú) práve vtedy, keď $S_{AC}=S_{BD}$ (stred rovnobežníka).

b) Pre súradnice stredu S_{AB} platí: $\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\cdots,\frac{a_n+b_n}{2}\right)$.

Výberové témy

Tvrdenie (Menelaos)**.**

Nech A,B,C sú nekolineárne body a nech $A'\in\langle BC\rangle, B'\in\langle CA\rangle, C'\in\langle AB\rangle$ sú body rôzne od bodov A,B,C. Potom body A',B',C' sú kolineárne práve vtedy, keď $(ABC')(BCA')(CAB')=1$.



Otvorte si interaktívnu konštrukciu Tu.

Dôkaz.

Zvoľme afinnú sústavu súradníc tak, že $A=(0,0), B=(1,0), C=(0,1)$. Body C',B' majú po rade súradnice $(c,0),(0,b)$, pričom $c,b\neq 0,1$. Rovnica nadroviny (priamky) BC má všeobecnú rovnicu $x+y-1=0$. Preto $A'=(a,1-a), a\neq 0,1$. Z definície deliaceho pomeru dostaneme

$$(ABC')=c/(c-1), (BCA')=(a-1)/a, (CAB')=(b-1)/b.$$

Po jednoduchých úpravách ľahko zistíme, že rovnosť $(ABC')(BCA')(CAB')=1$ je ekvivalentná s rovnosťou $ab-ac-bc+c=0$.

Na druhej strane body A',B',C' sú kolineárne práve vtedy, keď ležia na jednej priamke. Priamka určená bodmi C',B' má parametrické vyjadrenie

$$X=B'+t(C'-B').$$

Bod A' leží na tejto priamke práve vtedy, keď platí $A'=B'+t(C'-B')$. Po dosadení súradníc dostaneme sústavu dvoch rovníc o jednej neznámej t, ktorá má riešenie práve vtedy, keď platí $ab-ac-bc+c=0$.

Tvrdenie (Ceva, čítaj čéva).

Nech body A, B, C sú nekolineárne a nech body A', B', C' ležia na stranách odpovedajúcim protiľahlým vrcholom trojuholníka ABC, potom priamky AA', BB', CC' sa pretínajú v jednom bode práve vtedy, ak platí $(ABC')(BCA')(CAB') = -1$.

Dôkaz nájdete v práci [TIS] na stránke Tu, str. 91; konštrukčný dôkaz Tu.

Afinné zobrazenie

V ďalších kapitolách sa budeme zaoberať len euklidovským priestorom $\mathbb{E}_n$ so zameraním $V_n(\mathbb{R})$. Zameriame sa prevažne len na dvojrozmerný a trojrozmerný euklidovský priestor - rovinu $\mathbb{E}_2$ a priestor $\mathbb{E}_3$. Pripomíname, že v euklidovskom priestore je definovaný skalárny súčin.

Definícia (**Afinné zobrazenie**).
Nech $\mathbb{E}_r, \mathbb{E}_s$ sú euklidovské podpriestory priestoru $\mathbb{E}_n$. Zobrazenie

$$f : \mathbb{E}_r \to \mathbb{E}_s$$

sa nazýva afinné zobrazenie (AZ), ak obrazom ľubovoľných troch kolineárnych bodov sú buď totožné body, alebo kolineárne body, pričom ich deliaci pomer sa zachováva.

Z definície vyplýva, že afinné zobrazenie má vlastnosť lineárneho zobrazenia. Vo všeobecnosti platí nasledujúca veta "Maticové vyjadrenie AZ". Pozrite si tiež vetu "Obraz bodu v afinnom zobrazení" v kapitole Analytické vyjadrenie.

Veta (Maticové vyjadrenie AZ).
Afinné zobrazenie $f : \mathbb{E}_r \to \mathbb{E}_s$ medzi euklidovskými podpriestormi priestoru $\mathbb{E}_n$ možno vyjadriť ako

$$f(X) = \mathbb{A}X + b\,,$$

ktoré bodu X priradí bod $X' = f(X)$, kde $\mathbb{A}$ je lineárna matica (zobrazenie medzi vektorovými podpriestormi $V_r(\mathbb{R})$ a $V_s(\mathbb{R})$); a b je pevný vektor (posunutie), ktorý je určený obrazom počiatku repéru v zobrazení $f : \mathbb{E}_r \to \mathbb{E}_s$.

Dôkaz .
Uvedieme len hlavné myšlienky dôkazu.

1. Zrejme afinné zobrazenie zachováva afinné kombinácie, teda musí plaitť
$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y = \lambda f(X) + (1-\lambda)Y$$
pre ľubovoľné body X, Y euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$.
2. Uvažujme o asociovanom zobrazení f^* medzi vektorovými priestormi $V_r(\mathbb{R}), V_s(\mathbb{R})$ (zamerania afinných podpriestorov $\mathbb{E}_r, \mathbb{E}_s$). Potom pre bod $X = O + \vec{x}$ a zobrazenie f^* bude platiť (načrtnite si obrázok)
$$f^*(\vec{x}) = f(O + \vec{x}) - f(O).$$
3. Po dosadení a vhodných úpravách dostaneme
$$f(X) = f(O + \vec{x}) = f^*(\vec{x}) + f(O),$$
čo v súradniciach predstavuje
$$f(X) = \mathbb{A}X + b\,.$$

Podrobnejší dôkaz tohto tvrdenia nájdete napríklad v práci [ZLA].

Vo všeobecnosti môžeme konštatovať, že afinné zobrazenie zachováva nasledovné vlastnosti:

1. **Lineárnosť**.
Afinné zobrazenie f zachováva lineárne kombinácia bodov. Ak platí
$$P = \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_k P_k\,,$$
tak musí platiť aj

$$P' = \alpha_1 P_1' + \ldots + \alpha_k P_k',$$

kde $f(P) = P'$, $f(P_i) = P_i'$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$.

2. **Kolineárnosť** .

   Afinné zobrazenie zachováva kolineárnosť bodov. Teda ak tri body sú kolineárne pred zobrazením, zostanú kolineárne aj po zobrazení.

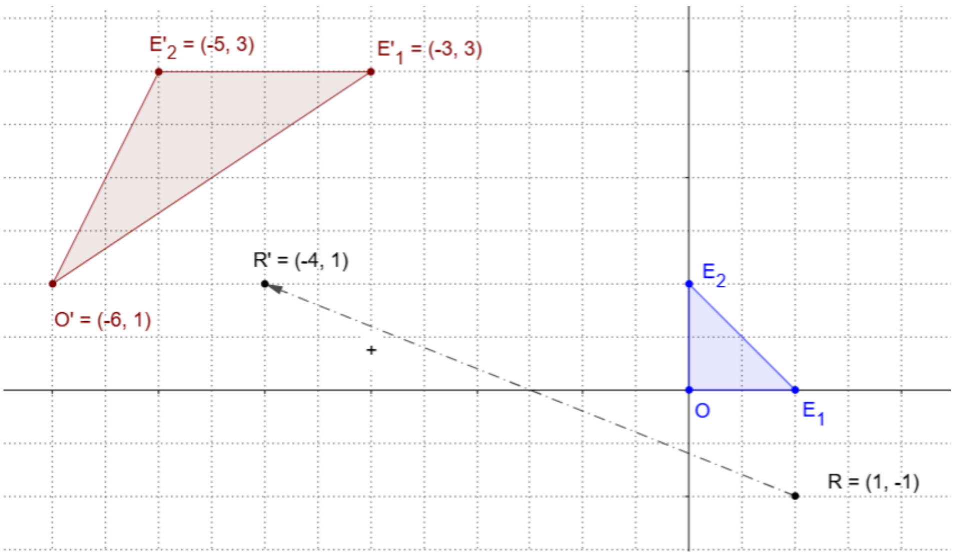
3. **Deliaci pomer**.

   Afinné zobrazenie zachováva pomery medzi bodmi na priamke, ale nemusí zachovať vzdialenosti bodov alebo veľkosti uhlov. Teda platí:

$$\mu(ABC) = \mu(A'B'C').$$

Príklad.

Afinné zobrazenie $f : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ je dané maticou $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a vektorom posunutia $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Určte súradnice obrazu bodu $X = [3, -1]$. Ktorý bod sa zobrazia do bodu [9, 8] ? Určte obraz vektora $\vec{v} = (2, 3)$ a tiež obrazy vektorov ortonormálnej bázy. Využite dynamický (applet) model tohto afinného zobrazenia.



Otvorte si dynamický applet Tu.

Riešenie.

Maticové vyjadrenie tohto afinného zobrazenia bude mať tvar

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix},$$

čo je ekvivalentné zápisu ("transformačným rovniciam")

$$x' = 3x + y - 6.$$
$$y' = x + y + 1$$

Teraz súradnice bodu [3, -1] dosadíme do maticového vyjadrenia (AZ) alebo použijeme transformačné rovnice a dostaneme, že bod $X = [3, -1]$ sa zobrazí do bodu $X' = [3, 3]$.

Hľadajme, ktorý bod sa zobrazí do bodu [9 , 8]. Súradnice tohto obrazu dosadíme do transformačných rovníc za premenné x', y'. Riešením je dvojica $\{x_1 = 4, x_2 = 3\}$.

Obraz vektora $\vec{v} = (2, 3)$ určíme dvoma spôsobmi:

1. Pomocou obrazov jeho počiatku $O = [0, 0]$ a jeho koncového bodu $V = [2, 3]$. Počiatok sa zorazí do bodu $O' = [-6, 1]$ a koncový bod do bodu $V' = [3, 6]$. Potom vektor $\vec{v}' = ([3, 6] - [-6, 1] = [9, 5]$

2. Pomocou lineárnej matice ako súčin

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

V obidvoch prípadoch zistíme, že obrazom je vektor $\vec{v}' = (9, 5)$. Nájdenie súradníc vektorov bázy prenecchávame na čitateľa.

Cvičenie.

Určte obrazy súradného simplexu $\boldsymbol{S} = \{O, E_1, E_2\}$ v afinnom zobrazení z predchádzajúceho príkladu "Transformačná matica". Pokúste sa to zovšeobecniť na simplex $\boldsymbol{S} = \{O, E_1, \ldots, E_n\}$.

Pomoc

1. Najskôr určte súradnice obrazu počiatku $O = [0, 0, \ldots, 0]$ dosadením do vektorovej rovnice

   $$f(X) = \mathbb{A}X + b$$

   a ukážte, že $O' = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ resp. $O' = b$.
2. Potom určte súradnice obrazu bodu $E_1 = [1, 0, \ldots, 0]$, pričom využijete vlastnosť, že

   $$\overrightarrow{O'E_1'} = E_1' - O' = \mathbb{A} \times \mathbb{E}_1^T.$$

   Potom ukážte, že súradnice vektora $\overrightarrow{O'E_1'}$ **sú zhodné so prvkami prvého stĺpca matice** $\mathbb{A}$.

Poznámky.

1. Afinné zobrazenie môže, ale nemusí, zachovávať vzdialenosti bodov a veľkosti uhlov. Ak ich zachováva, tak sa nazýva "**izometria**".
2. V prípade izometrie transformačná matica $\mathbb{A}$ je ortogonálna, pre ktorú platí:

   $$\mathbb{A}^T\mathbb{A} = I,$$

   kde I je jednotková matica. V práci [PTA, 2016] nájdete dôkaz tvrdenia pre euklidovský priestor $\mathbb{E}_3$.
3. Ak $n = m$, tak afinnému zobrazeniu f hovoríme **transformácia euklidovského priestoru** $\mathbb{E}_n$.

Príklad - tri body

♥ **Príklad** - Tri body.

Afinné zobrazenie f zobrazuje body $A[2,1], B[3,0], C[1,4]$ do bodov $A'[1,6], B'[1,9], C'[3,1]$ v tomto poradí. Kam sa zobrazí bod $P[5,7]$ resp. bod $X[x,y]$? Prevzaté z práce [CHP, 2010], Cvičenie 28.

Riešenie.

Bod $P[5,7]$ vyjadrime ako lineárnu kombináciu bodov $A[2,1], B[3,0], C[1,4]$. V takom prípade musia existovať reálne čísla a, b, c

(1) $P = a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C$

$a + b + c = 1$.

Zobrazenie f je lineárne, preto pre obraz $P'[x', y']$ bodu P bude platiť

(2) $P' = f(P) = a \cdot A' + b \cdot B' + c \cdot C'$, pričom tiež musí platiť $a + b + c = 1$

Sústavu rovníc (1) a (2) vyjadríme v maticovom tvare a vyriešime.

Pri riešení použijeme kalkulátor "**Matrix calculator**", ktorý je dostupný Tu.

$$P = \mathrm{M} \times \mathrm{A} : \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ Matica vzorov } \times \text{ matica neznámych}$$

$$P' = \mathrm{M}' \times \mathrm{A} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 6 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ Matica obrazov} \times \text{ matica neznámych}$$

Po vyjadrení

$$\mathrm{A} = \mathrm{M}^{-1} \times P : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ \frac{15}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

a po dosadení do (2) dostaneme riešenie

$$P' = \mathrm{M}' \times M^{-1} \times \mathrm{P} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 6 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matica obrazov $\times$ inverzná matica vzorov $\times$ matica súradníc zobrazovaného bodu

Po roznásobení

$$P' : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Porovnaním ľavej a pravej strany dostaneme riešenie $P' = [10, 6]$.

Ak pre bod P zvolíme všeobecné súradnice $P = [x, y]$, tak riešenie môžeme zapísať v tvare

$$P' : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - 2 \\ 2x - y + 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Transformačné rovnice afinného zobrazenia.

Porovnaním riadkov matíc dostaneme sústavu, ktorú budeme nazývať "transformačné rovnice zobrazenia". V našom príklade to budú rovnice

$$\begin{aligned} x' &= x + y - 2 \\ y' &= 2x - y + 3 \end{aligned}$$

Dosaďte súradnice $P[5,7]$ do tejto sústavy a zistíte súradnice hľadaného bodu $P'[10,6]$.

Iný spôsob riešenia príkladu "Tri body".

Po dosadení súradníc do vťahu (1) dostaneme $[5,7] = a \cdot [2,1] + b \cdot [3,0] + c \cdot [1,4]$, čo po roznásobení predstavuje sústavu troch rovníc o troch neznámych

$$\begin{aligned}
&2a + 3b + c = 5\\
&a + 0b + 4c = 7\\
&a + b + c = 1
\end{aligned}$$

.

Riešením tejto sústavy je trojica čísel $\{a = -11, b = \frac{15}{2}, c = \frac{9}{2}\}$.

V afinnom zobrazení sa kolineárnosť zachováva, preto platí $P' = a \cdot A' + b \cdot B' + c \cdot C'$. Po dosadení riešenia $\{a = -11, b = \frac{15}{2}, c = \frac{9}{2}\}$ a súradníc bodov $A'[1,6],' B[1,9], C'[3,1]$ do vzťahu (2) dostaneme

$$\begin{aligned}
&x(P') = 1 \cdot (-11) + 1 \cdot \tfrac{15}{2} + 3 \cdot \tfrac{9}{2} = -11 + 21 = 10\\
&y(P') = 6 \cdot (-11) + 9 \cdot \tfrac{15}{2} + 1 \cdot \tfrac{9}{2} = 6.
\end{aligned}$$

Pozrite si riešenie v GeoGebre Tu. Kompletné grafické riešenie pre afinné zobrazenie určené obrazmi troch bodov otvorte si Tu.

Príklad - Ťažisko trojuholníka.

Zobrazenie f roviny $\mathbb{E}_2$ do tej istej roviny, ktoré bodu $X \in \overleftrightarrow{PQ}$ priradí bod $f(X) = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}X$ je afinné zobrazenie. Zobrazenie, ktoré trojuholníku s jedným premenným vrcholom priradí jeho ťažisko je afinné zobrazenie. Pozrite si dôkaz, že takéto zobrazenie je afinné Tu.

Rôzne dimenzie

V predchádzajúcej kapitole sme riešili úlohy transformácie euklidovských priestorov $\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_m$, keď $n = m$. V tejto kapitole sa budeme zaoberať prípadom $n \neq m$.

Príklad zobrazenie $f : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_3$.

Určte parameter p tak, aby zobrazenie ktoré zobrazuje body $A[1,0], B[0,1], C[2,p]$ do bodov $A'[2,1,-1], B'[3,2,0], C'[1,0,2]$ v tomto poradí bolo afinné. Pre vhodné p

- určte obraz $P' = f(P)$ ľubovoľného bodu $P[x,y]$,
- pomocou stopy bodu na kružnici popíšte a zostrojte obraz kružnice určenej bodmi $A[1,0], B[0,1], C[2,3]$,
- takéto afinné zobrazenie geometricky interpretujte v GeoGebre.

Príklad je prevzatý zo zbierky [MOZ], 2.časť, Cvičenie 3.3.5.

Riešenie.

Body $P[x,y]; P'[x',y',z']$ vyjadrime ako lineárne kombinácie

$$P = a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C$$

$$P' = a \cdot A' + b \cdot B' + c \cdot C',$$

kde $a + b + c = 1$.Zápis v maticovom tvare V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že

$$P' = M' \times M^{-1} \times P,$$

kde M je matica vzorov, M' matica obrazov $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & p \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pomocou maticovej kalkulačky určíme inverznú maticu.

Roznásobením

$$P' : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{p-1}{p+1} & \frac{-2}{p+1} & \frac{2}{p+1} \\ \frac{-p}{p+1} & \frac{1}{p+1} & \frac{p}{p+1} \\ \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+1} & \frac{-1}{p+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{-p+3}{p+1} & \frac{4}{p+1} & \frac{-4}{p+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+3 \\ -x+2 \\ \frac{-(px)+3x+4y-4}{p+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

a porovaním ľavej a pravej strany dostaneme transformačné rovnice

$$\begin{aligned} x' &= -x + 0y + 3 \\ y' &= -x + 0y + 2 \\ z' &= \frac{-p+3}{p+1}x + \frac{4}{p+1}y + \frac{-4}{p+1}. \end{aligned}$$

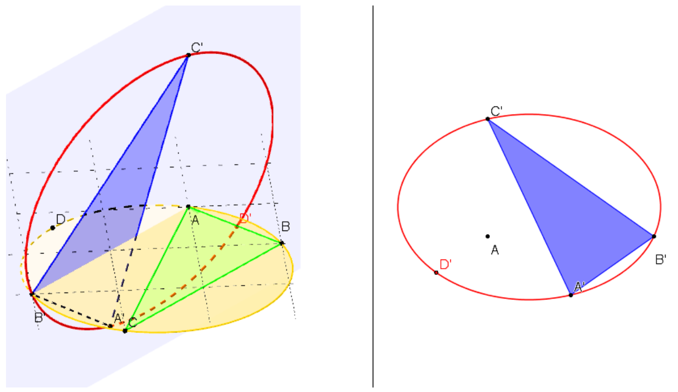
Zobrazenie bude afinným práve vtedy, ak $p \neq -1$. Súradnice obrazu ľubovoľného bodu $P[x,y]$ určíme dosadením súradníc x, y do transformačných rovníc. Napríklad pre $D[3,1]$ a $p = 3$ dostaneme $D'[0,-1,0]$.

Kružnica určená bodmi $A[1,0], B[0,1], C[2,3]$ má stred v bode $S\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ a polomer $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ a jej parametrické vyjadrenie má tvar (pozrite si prácu [VEL, 2012], časť "Kružnica, Veta 8" Tu)

$$\left[\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\right]+\left[\tfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos t,\tfrac{3\sqrt{2}}{2}\sin t\right].$$

Po dosadení týchto parametrických súradníc do transformačných rovníc, zistíme, že obrazom je elipsa ležiaca v rovine $x-y-1=0$. Jej parametrické vyjadrenie má tvar

$$\left[\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}\right]+\left[-\tfrac{1}{2}\cos t+\tfrac{3}{2}\sin t,-\tfrac{1}{2}\cos t+\tfrac{3}{2}\sin t,\tfrac{3}{2}\cos t+\tfrac{1}{2}\sin t\right],t,0,2\pi.$$



Pozrite si applet Tu.

Príklad zobrazenie $f:\mathbb{E}_2\to\mathbb{E}_1$.

Určte transformačné rovnice afinného zobrazenia, ktoré zobrazuje body $[2,1],[3,2],[0,1]$ do bodov $[2],[0],[10]$ v tomto poradí.

Určte obraz ľubovoľného bodu $P[x,y]$ a jeho stopu. Príklad je prevzatý zo zbierky [MOZ], 2.časť, Cvičenie 3.3.2a.

Riešenie.

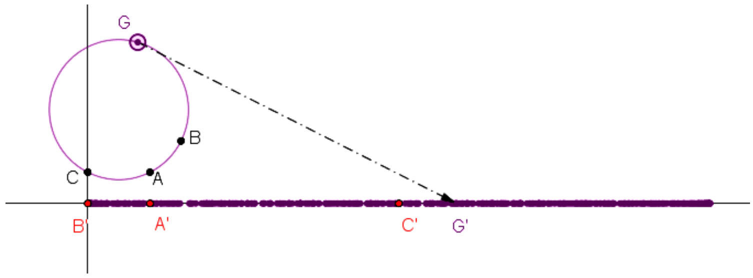
Transformačné určíme pomocou maticovej kalkulačky. Musíme si uvedomiť, že bod-vzor má 2 súradnice a bod-obraz má 1 súradnicu. To znamená, že bod P ako vzor vyjadríme ako lineárnu kombináciu troch bodov A,B,C. Teda musí byť

$$P=a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C$$
$$P'=a\cdot A'+b\cdot B'+c\cdot C',$$

kde $a+b+c=1$.

$$P'=\begin{pmatrix}x'\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&10\\1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-3}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&-1\\\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&2&8\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-4x+2y+8\\1\end{pmatrix}.$$

$$x'=-4x+2y+8.$$



Príklad zobrazenie $f:\mathbb{E}_3\to\mathbb{E}_2$.

Určte transformačné rovnice afinného zobrazenia, ktoré zobrazuje body $[1,2,3],[1,1,1],[1,0,1],[0,1,3]$ do bodov $[5,4],[2,1],[1,0],[3,2]$ v tomto poradí.

1. Pokúste sa toto afinné zobrazenie geometricky interpretovať pomocou GeoGebry. Príklad je prevzatý zo zbierky [MOZ], 2.časť, Cvičenie 3.3.7.
2. Určte obraz nejakej kružnice a jej stredu.

Riešenie.

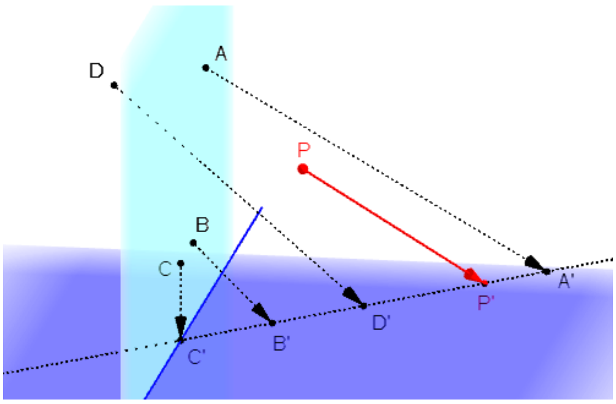
Transformačné určíme pomocou maticovej kalkulačky

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z-1 \\ x+y+z-2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$x' = x + y + z - 1$$
$$y' = x + y + z - 2$$

.



V ďalších kapitolách ukážeme, že afinné zobrazenie $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$ je jednoznačne určené

- obrazmi $n+1$ lineárne nezávislými bodmi euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$ alebo
- obrazmi repéru euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$.

Všeobecne dim

Nech $\mathbb{E}_r, \mathbb{E}_s$ sú euklidovské podpriestory priestoru $\mathbb{E}_n$ a zobrazenie

$$f : \mathbb{E}_r \to \mathbb{E}_s$$

je afinné zobrazenie podpriestoru $\mathbb{E}_r$ do podpriestoru $\mathbb{E}_s$.

Zvoľme si ľubovoľný bod $P[x_1, x_2, \ldots, x_r] \in \mathbb{E}_r$, ktorý je lineárneárnou kombináciou bodov

$$A_1[a_{11}, \ldots, a1r], A_2[a_{21}, \ldots, a_{2r}], \ldots, A_r[a_{r1}, \ldots, a_{rr}], A_{r+1}[a_{r+1,1}, \ldots, a_{r+1,r}].$$

V takom prípade musia existovať reálne čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$

(1) $$P = \alpha_1 \cdot A_1 + \ldots + \alpha_{r+1} \cdot A_{r+1}$$
$$1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{r+1}.$$

Nech bod $P'[x'_1, x'_2, \ldots, x'_s]$ je obraz bodu $P[x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}]$ v zobrazení $f : \mathbb{E}_r \to \mathbb{E}_s$. Zobrazenie f je lineárne, preto pre obraz P' bude platiť

(2) $$P' = f(P) = \alpha_1 \cdot A'_1 + \ldots + \alpha_{r+1} \cdot A'_{r+1},$$
$$1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{r+1}.$$

Keďže bod $P'[x'_1, x'_2, \ldots, x'_s]$ je bodom podpriestoru $\mathbb{E}_s$ musí mať s súradníc ale je lineárnou kombináciou práve $r+1$. Potom sústavu rovníc (1) a (2) môžeme vyjadriť v maticovom tvare

$$P = M \times A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{r+1,1} \\ a_{12} & \ldots & a_{r+1,2} \\ \ldots & & \\ a_{1r} & \ldots & a_{r+1,r} \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_r \\ \alpha_{r+1} \end{pmatrix}.$$

$$P' = M' \times A = \begin{pmatrix} a'_{11} & \ldots & a'_{r+1,1} \\ a'_{12} & \ldots & a'_{r+1,2} \\ \ldots & & \\ a'_{1s} & \ldots & a'_{r+1,s} \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_r \\ \alpha_{r+1} \end{pmatrix}.$$

Po vyjadrení $\mathrm{A} = \mathrm{M}^{-1} \times P$ z prvej maticovej rovnicer a po dosadení do druhej dostaneme riešenie

$$P' = M' \times M^{-1} \times P.$$

Poznámka.

Výsledná matica P' má zrejme rozmer $s \times (r+1)$, teda bod P' má s súradníc!

Jednoznačnosť AZ

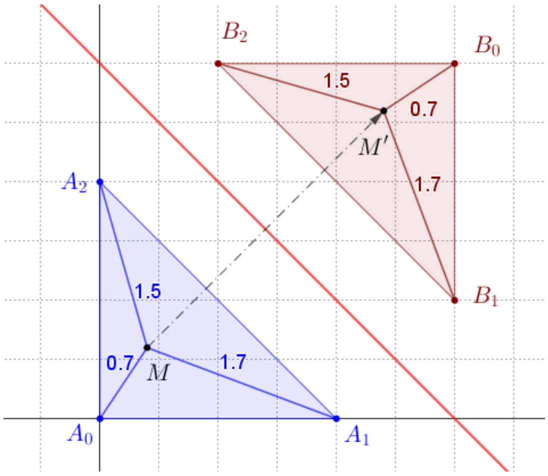
Afinné zobrazenie f determinuje ďalšie zobrazenie f^* medzi vektorovými zložkami príslušných euklidovských vektorových priestorov.

Definícia (Asociované zobrazenie).

Nech $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$ je afinné zobrazenie. Zobrazenie f^* nazývame asociovaným zobrazením k afinnému zobrazeniu f, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

1. $f^* : \mathrm{V}_n \to \mathrm{V}_m$
2. $\forall A_0, \cdots A_k \in \mathbb{E}_n$ a $\alpha_0, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ také, že $\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i\right) = 1$, platí

$$f^* \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i A_i\right) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(A_i)\,.$$



Otvorte si applet Tu.

Predchádzajúca definícia vlastne hovorí, že asociované zobrazenie „**zachováva**" lineárne kombinácie bodov.

Veta (Korektnosť definície asociovaného zobrazenia).

Zobrazenie f^* je jednoznačné určené a je dobre definované. Ekvivalentný matematický zápis: nech

$$\alpha_0 A_0 + \cdots + \alpha_k A_k = \beta_0 B_0 + \cdots + \beta_k B_k$$

pre nejaké $\alpha_0 + \cdots + \alpha_k = \beta_0 + \cdots + \beta_k = 0$. Potom existuje práve jedno asociované zobrazenie $f^* : \mathrm{V}_n \to \mathrm{V}_m$ také, že

$$f^*(\alpha_0 A_0 + \cdots + \alpha_k A_k) = f * (\beta_0 B_0 + \cdots + \beta_k B_k)\,.$$

Dôkaz - korektnosť definície asociovaného zobrazenia.

Existencia a jednoznačnosť asociovaného zobrazenia je daná obrazmi vektorov Vn.

Čo sa týka dobrej definovanosti zápisu v definicii asociovaného zobrazenia, z predpokladu vety vyplýva, že $\alpha_0 + \cdots + \alpha_k = \beta_0 + \cdots + \beta_k = 0 = M - O$ pre nejaké $M \in \mathbb{E}_n$. Teda

$$M = O + \alpha_0 A0 + \cdots + \alpha_k A_k = O + \alpha_0 B0 + \cdots + \alpha_k B_k = M - O.$$

Keďže zobrazenie f je afinné, a teda zachováva lineárne kombinácie bodov, tak

$$f(M) = f(O) + \alpha_0 f(A_0) + \cdots + \alpha_k f(A_k) = M' + \alpha_0 B_0 + \cdots + \alpha_k B_k.$$ Prezrite si applet z definície

Lineárne nezávislá množina bodov.

Nech $A_0, \dots, A_k \in \mathbb{E}_n, k \leq n$ je množina bodov euklidovského priestoru. Je celkom prirodzené zaviesť pojem lineárne nezávislých bodov, ako množinu lineárne nezávislých vektorov $A_1 - A_0, \dots, A_k - A_0$.

Poznámka.

Z predchádzajúcej definície je zrejmé, že v euklidovskom n rozmernom priestore existuje najviac $n+1$ lineárne nezávislých bodov. Naviac tento počet sa dá dosiahnuť.

V kapitole "Lineárna kombinácia bodov" sme dokázali vetu

Ľubovoľný bod $X \in \mathcal{A}$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$X = x_o O + x_1 E_1 + \cdots + x_n E_n,$$

kde $x_o + x_1 + \cdots + x_n = 1$.

Na základe tohto tvrdenia a definície nezávislých bodov, môžeme povedať, že ľubovoľný bod euklidovského priestoru $\mathcal{E}_n$ sa dá **jednoznačne vyjadriť** ako ich lineárna kombinácia.
Poznámka o lineárnych zobrazeniach.
Z lineárnej algebry poznáme tvrdenie, že každé lineárne zobrazenie $\phi : \mathrm{V}_n \to \mathrm{V}_m$ je jednoznačne dané obrazmi prvkov nejakej bázy priestoru V_n.

Dôsledok obraz repéra.

Nech $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n} \rangle$ je repér priestoru $\mathbb{E}_n$ a ľubovoľný bod $B \in \mathbb{E}_n$. Ďalej nech $\{\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ sú vektory vektorového priestoru V_m. Potom **existuje jediné afinné zobrazenie** $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$ také, že

$$f(O) = B \text{ a } f^*(\boldsymbol{e_i}) = \boldsymbol{b_i} \text{ pre } i = 1, \cdots, n.$$

Dôkaz nájdete v učebniciach z lineárnej algebry.

Veta (Jednoznačnosť afinného zobrazenia).

Nech $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$ je afinné zobrazenie. Potom f je jednoznačne určené obrazmi $n+1$ lineárne nezávislých bodov z $\mathbb{E}_n$.

Dôkaz.

Nech $f(A_0) = B_0, \dots, f(A_n) = B_n$. V súlade s definíciou nezávislých bodov, vektory

$$\boldsymbol{e}_1 = A_1 - A_0, \dots, \boldsymbol{e}_n = A_n - A_0$$

sú lineárne nezávislé. Keďže afinné zobrazenie je zároveň aj lineárne, tak pre obrazy vektorov $\boldsymbol{e}_i$ v asociovanom afinnom zobrazení f^* platí

$$f^*(\boldsymbol{e}_i) = f^*(A_i - A_0) = f(A_i) - f(A_0) = B_i - B_0 \text{ pre } i = 1, \cdots, n.$$

Podľa dôsledku "obraz repéra" je takto jednoznačne definované afinné zobrazenie. Treba len overiť, či takto definované zobrazenia spĺňa podmienku, že $f^*(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{b_i}$.
(Urobte to ako cvičenie!)

Príklad.

Dané sú body afinného priestoru $\mathcal{A}_4$: $A[2,4,5,6]; B[-7,4,5,6]; C[6,11,3,7]; D[-3,-10,9,4]; E[-3,11,3,7]$. Zistite, či sústava bodov $S=\{A,B,C,D,E\}$ je afinne (ne)závislá a vypočítajte dimenziu afinného podpriestoru generovaného sústavou S (dimenziu obalu S).

Riešenie.

Množina bodov S je afinne nezávislá, ak sústava vektorov

$$W=\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right\}$$

je lineárne nezávislá. Pre súradnice týchto vektorov dostaneme

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(-9,0,0,0);\overrightarrow{AC}=(4,7,-2,1);\overrightarrow{AD}=(1,-14,4,-2);\overrightarrow{AE}=(-5,7,-2,1).$$

Sústava vektorov W je lineárne nezávislá, ak rovnosť

$$b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}+d\overrightarrow{AD}+e\overrightarrow{AE}=\vec{0}$$

je splnená práve len pre $b=c=d=e=0$. V našom prípade to nie je splnené lebo hodnosť matice

$$M=\begin{pmatrix}-9&0&0&0\\4&7&-2&1\\1&-14&4&-2\\-5&7&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-9&0&0&0\\0&7&-2&1\\0&-14&4&-2\\0&7&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-9&0&0&0\\0&7&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

je dva. Teda hodnosť je menšia ako počet vektorov, preto sústava W je lineárne závislá a teda body A,B,C,D,E sú afinne závisle. Z poslednej matice vyplýva, že dva vektory $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ sú lineárne nezávislé a vektory $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}$ sú ich lineárne kombinácie. Preto dimenzia podpriestoru $\langle S\rangle$ je rovná dvom. Parametrické vyjadrenie tohto podpriestoru môžeme vyjadriť ako

$$S=A+\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\rangle.$$

To znamená, že body A,B,C,D,E ležia v rovine $(ABC)=S$.

Poznámky.

1. Nech $\mathbb{E}_n$ je n-rozmerný euklidovský priestor so zameraním $V_n(\mathbb{R})$ a nech $f:\mathbb{E}_n\to\mathbb{E}_n$ je afinná transformácia. Potom môžeme definovať asociované zobrazenie f^* afinného zobrazenia f aj nasledovne:

   $$f^*:V_n(\mathbb{R})\to V_n(\mathbb{R}),\ (X-Y)\to f(X-Y):=f(X)-f(Y)$$

2. Asociované zobrazenie f^* je vlastne "reštrikcia" zobrazenia f na vektorový priestor. Zobrazuje vektory so zamerania $V_n(\mathbb{R})$ na vektory toho istého zamerania.

Analytické vyjadrenie

Nech je v $\mathbb{E}_n$ je afinné zobrazenie f, v ktorom sa repér $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ zobrazí na repér $\left\langle O; \vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m \right\rangle$, pričom pre súradnice obrazov platí

$$f(O) = [r_1, r_2, \dots, r_m]$$
$$\vec{e}_i^{\,\prime} = f^*(\vec{e}_i) = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_m^i),$$

kde f^* je asociované zobrazenie.

Tvrdenie - obraz bodu v afinnom zobrazení.

Nech $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ je bod euklidovského priestoru, potom pre jeho obraz $X' = [x_1', x_2', \dots, x_m']$ v afinnom zobrazení f bude platiť

(REP) $$X' = f(X) = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & \dots & a_2^n \\ \dots & & \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix}.$$

Dôkaz.

V afinnom priestore platí, že afinné zobrazenie je úplne určené obrazom réperu. Réper v afinnom priestore pozostáva zo základného bodu O (začiatok réperu) a množiny lineárne nezávislých vektorov $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$. Teda bod X sa dá jednoznačne vyjadriť ako lineárna kombinácia

$\overrightarrow{X - O} = x_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + x_n \overrightarrow{e_n}$ resp. ako $X = O + x_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + x_n \overrightarrow{e_n}$,

keďže afinné zobrazenie je lineárne, tak pre obrazy v zobrazení f bude platiť

$$X' = O' + x_1 f^*(\vec{e}_1) + \dots + x_n f^*(\vec{e}_n).$$

Po dosadení hodnôt $f^*(\vec{e}_i) = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_m^i)$ dostaneme

$$X' = O' + x_1 (a_1^1, a_2^1, \dots, a_m^1) + \dots + x_n (a_1^n, a_2^i, \dots, a_m^n),$$

odkiaľ po roznásobení dostaneme

$$\begin{aligned} x_1' &= r_1 + a_1^1 x_1 + \cdots + a_1^n x_n \\ x_2' &= r_2 + a_2^1 x_1 + \cdots + a_2^n x_n \\ &\dots \\ x_m' &= r_m + a_m^1 x_1 + \cdots + a_m^n x_n, \end{aligned}$$

čo predstavuje rovnosť (REP).

Poznámky.

1. Predchádzajúce tvrdenie hovorí, že **na určenie afinného zobrazenia stačí poznať obrazy repéra**.
2. Jednoznačnosť analytického vyjadrenia (AV) vyplýva z jednoznačnosti vyjadrenia daného bodu $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ v repéri $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ a z lineárnosti afinného zobrazenia.
3. Pre obraz bodu $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ platí $f(X) = f(O) + x_1 f^*(\overrightarrow{e_1}) + \cdots + x_n f^*(\overrightarrow{e_n})$.
4. Zápis (AV) nazývame **analytické vyjadrenie afinného zobrazenia** f vzhľadom k afinnej súradnicovej sústave $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$.

Namiesto označenia $f(\vec{e}_i)$ budeme tiež používať označenie $\overrightarrow{e'_1}$. V ďalších kapitolách sa zameriame na afinné zobrazenia v euklidovskej rovine, pričom upriamime pozornosť na analytické vyjadrenia zhodných (zhodnostných) zobrazení v rovine.

Úlohy.

1. Určte analytické vyjadrenie identického zobrazenia euklidovskej roviny - identity.
2. Zistite, či rovnoľahlosť v rovine $h : X' = S + k(X - S)$ pre pevne zvolený stred rovnoľahlosti S a koeficient rovnoľahlosti $k \in R - 0$ je afinné zobrazenie.

Riešenie úlohy č. 1.

Pre identitu platí, že každý bod roviny sa zobrazí sám na seba, t. j $f(X) = X$. Označme súradnice vzoru X ako usporiadanú dvojicu (x, y) a súradnice jeho obrazu $f(X)$ v zobrazení f ako (x', y'). Keďže ide o identické zobrazenie, tak musí platiť

$$(x', y') = (x, y).$$

Rovnosť usporiadaných dvojíc nastane práve vtedy, keď sa rovnajú odpovedajúce zložky. Teda, keď súčasne platia rovnosti $x' = x, y' = y$.

Táto jednoduchá sústava dvoch rovníc je analytickým vyjadrením identity. Ak zapíšeme získanú sústavu dvoch rovníc v maticovom tvare, tak získame rovnicu v tvare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alebo v riadkovom zápise (maticou násobíme sprava!)

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určte analytické vyjadrenie identického zobrazenia euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n; n > 2$.

Riešenie úlohy č. 2 je v ďalšej kapitole.

Rozšírené matice

Rozšírené afinné súradnice.

Pri riešení príkladu "Tri body" sme použili matice, ktorých posledné riadky korešpondovali s podmienkou lineárnej kombinácie bodov

$$a_1 + a_2 + \ldots = 1.$$

V tomto príklade sme vlastne použili rozšírené matice, pomocou ktorých sme zjednodušili zápis analytického vyjadrenia afinného zobrazenia:

$$\mathbb{X}' = \mathbb{A} \times \mathbb{X} + \mathbb{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \ldots & & & \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \ldots \\ r_n \end{pmatrix}$$

ktorý sme upravili pomocou "rozšírených matíc" na tvar

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n & r_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n & r_2 \\ \ldots & & & & \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n & r_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix},$$

pričom x_i, a_i^j, r_i má ten istý význam ako pri afinných súradniciach.

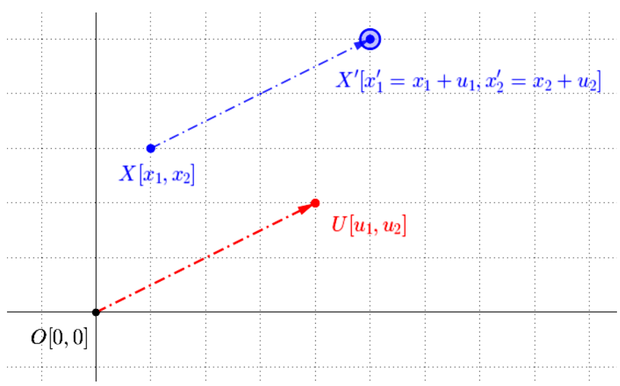
Rozšírené afinné súradnice sprehľadnia zápis zobrazení. Súradnice bodu $X = [x_1, \ldots, x_n]$ nahradíme súradnicami $[x_1, \ldots, x_n, 1]$ a súradnice vektora $\vec{e}'_i = (a_1^i, a_2^i, \ldots, a_m^i)$ nahradíme súradnicami $(a_1^i, a_2^i, \ldots, a_m^i, 0)$. Pre takto zavedené rozšírenie platí obvyklá aritmetika s bodmi a vektormi z euklidovských priestorov, ako aj počítanie s lineárnymi kombináciami. Umožňujú vytvárať zložené zhodné zobrazenia. Pozrite si prezentáciu Tu.

Výhody použitia rozšírených matíc

1. **Skladanie transformácií:** Rozšírené matice umožňujú skladať viacero transformácií (napr. rotáciu, škálovanie a transláciu) do jednej matice násobením.
2. **Jednoduchšie výpočty:** Takáto reprezentácia zjednodušuje výpočet pomocou štandardných operácií s maticami.
3. **Flexibilita:** Rozšírené matice môžu reprezentovať širokú škálu transformácií, vrátane identít, rotácií, škálovaní, posunov a zložených transformácií.

Cvičenie.

Vyjadrite afinné zobrazenie (posunutie) τ_u o vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$, ktoré zobrazuje bod $X[x_1, x_2]$ na bod $X'[x_1 + u_1, x_2 + u_2]$ pomocou rozšírenej matice.



Riešenie.

Zo zadania úlohy vyplýva, že dané afinné zobrazenie je určené transformačnými rovnicami

(Tran) $$x_1' = x_1 + u_1;\ x_2' = x_2 + u_2,$$

ktoré môžeme zapísať pomocou matíc takto:

(τ) $$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Pravú stranu rovnosti (τ_u) (sčitovanie matíc) nahraďme rozšírenou maticou typu 3 x 3. Potom posunutie τ_u o vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ budeme môcť vyjadriť ako súčin matíc. Hľadajme rozšírenú maticu typu 3 x 3 tak, aby platilo:

$$\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + u_1 \\ x_2 + u_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ľahko zistíme, že matica $\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vyhovuje našim požiadavkám. Rovnosť (τ) môžeme teraz zapísať v tvare

(τ_u) $$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rovnoľahlosť

V tejto kapitole sa budeme zaoberať transformáciami euklidovskej roviny - posunutím a rovnoľahlosťou. Tieto zobrazenia v syntetickom poňatí geometrie definujeme jednoducho pomocou

- pevne zvoleného vektora -posunutie,
- pevne zvoleného bodu a skalára - homotétia alebo tiež rovnoľahlosť.

Ukážeme, že tieto zobrazenia sú afinné a určíme ich transformačné matice.

Rovnoľahlosť $\mathcal{H}:\mathbb{E}_2\rightarrow\mathbb{E}_2$ pre pevne zvolený stred rovnoľahlosti S a koeficient rovnoľahlosti $k\in\{\mathbb{R}-0\}$ **je afinné zobrazenie**.

Dôkaz.

Rovnoľahlosť $\mathcal{H}=(S,k)$ v euklidovskej rovine bodu X priraďuje bod X' taký, že pre deliaci pomer bodov S,X,X' platí $(X'XS)=k$. Z definície deliaceho pomeru dostaneme vzťah

(h) $\mathcal{H}: X'=S+k(X-S)$,

kde $S[s_1,s_2]\in\mathbb{E}_2$ je zvolený stred rovnoľahlosti a k je reálny koeficient.

V prvom kroku musíme ukázať (dokázať), že **obrazom troch kolineárnych bodov v rovnoľahlosti sú opäť tri kolineárne body**. Najskôr dokážeme toto tvrdenie analyticky.

Nech $A[a_1,a_2],B[b_1,b_2],C[c_1,c_2]$ sú ľubovoľné tri navzájom rôzne kolineárne body. Dvomi bodmi A,B je určená práve jediná priamka $p=\overleftrightarrow{AB}$. Podľa predpokladu bod C je bodom priamky p. V takom prípade existuje parameter t taký, že platia rovnosti

$$c_1=a_1+t(b_1-a_1),$$
$$c_2=a_2+t(b_2-a_2).$$

Označme $A'[a_1',a_2'],B'[b_1',b_2'],C'[c_1',c_2']$ obrazy bodov A,B,C v rovnoľahlosti $\mathcal{H}=(S,k)$. Potom súradnice týchto bodov musia spĺňať vzťah (h), čo vedie k rovnostiam

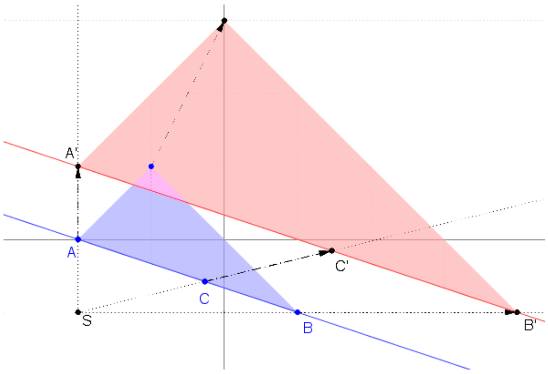
$$a_i'=s_i+k(a_i-s_i)$$
$$b_i'=s_i+k(b_i-s_i)$$
$$c_i'=s_i+k(c_i-s_i)$$

pre $i=1,2$. Upravujme posledný výraz

$$\begin{aligned}c_i'&=s_i+k(c_i-s_i)=s_i-ks_i+k(a_i-t(b_i-a_i))=\\&=s_i-ks_i+ka_i-kt(b_i-a_i))=[s_i+k(a_i-s_i)]-kt(b_i-s_i-a_i+s_i)=\\&=a'_i-kt[(b_i-s_i)-(a_i-s_i)]=\\&=a'_i-t[(s_i+k(b_i-s_i))-(s_i+k(a_i-s_i))]=\\&=a'_i+t[b'_i-a'_i].\end{aligned}$$

Dostali sme výraz, ktorý nám hovorí, že obraz C' bodu C v zobrazení $\mathcal{H}=(S,k)$ leží na priamke určenej bodmi A',B'. Odkiaľ vyplýva, že zobrazenie $\mathcal{H}=(S,k)$ zachováva kolineárnosť a preto je afinným zobrazením.

Syntetický (konštrukčný) dôkaz tvrdenia, že rovnoľahlosť zachováva kolineárnosť je pomerne jednoduchý. Stačí využiť vlastnosť, že v rovnoľahlosti sa rovnobežnosť zachováva. Pozrite si nasledujúci obrázok. Vlastnosť zachovania kolineárnosti vyplýva z podobnosti trojuholníkov $\triangle SAC,\triangle SA'C'$ a $\triangle SBC,\triangle SB'C'$.



Vzťah (h) je vlastne parametrické vyjadrenie a predstavuje transformáciu roviny $\mathbb{E}_2$, ktorá bodu $X[x, y] \in \mathbb{E}_2$ v rovnoľahlosti $\mathcal{H} = (S, k)$ priradí bod $X'[x', y'] \in \mathbb{E}_2$. Tento vzťah môžeme po jednoduchej úprave upraviť na sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych x', y'

$$x' = k \cdot x + 0 \cdot y + o_1'$$

$$y' = 0 \cdot x + k \cdot y + o_2',$$

kde $o'_1 = s_1 + k \cdot (0 - s_1) = s_1(1-k); o'_2 = s_2(1-k)$.

Usporiadaná dvojica $[s_1(1-k), s_2(1-k)]$ predstavuje súradnice obrazu počiatku $O[0,0]$ v rovnoľahlosti $\mathcal{H} = (S, k)$. K dôkazu stačí dosadiť súradnice začiatku $O[0,0]$ do vzťahu (h).

Preskúmajme aké budú obrazy súradnicových ortonormálnych vektorov $\vec{e}_1 = E_1 - O = [1,0]; \vec{e}_2 = E_2 - O = [0,1]$ v rovnoľahlosti $\mathcal{H} = (S, k)$. Dosadením súradníc bodov E_1, E_2 do vzťahu (h) dostaneme pre obrazy $E_1'; E_2'$

$$E_1' = [k + s_1(1-k), s_2(1-k)], E_2' = [s_1(1-k), k + s_2(1-k)],$$

po dosadení súradníc $O'[s_1(1-k), s_2(1-k)]$ do rozdielov $E_1' - O'; E_2' - O'$ dostaneme súradnice obrazov $\vec{e}_1'; \vec{e}_2'$

$$\vec{e}_1' = ([k + s_1(1-k)] - [s_1(1-k)], [s_2(1-k)] - [s_2(1-k)]) = \boldsymbol{(k, 0)};$$
$$\vec{e}_2' = ([s_1(1-k)] - [s_1(1-k)], [k + s_2(1-k)] - [s_2(1-k)]) = \boldsymbol{(0, k)}$$

Súradnice obrazov súradnicových ortonormálnych vektorov **sú závisé len od koeficienta** k.

V súlade s definíciou analytického vyjadrenia afinného zobrazenia môžeme vyjadriť rovnoľahlosť $\mathcal{H}$ v rovine pomocou rozšíreného maticového tvaru takto:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & o_1' \\ 0 & k & o_2' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poznámky.

1. Maticu $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ nazývame **matica afinného zobrazenia (rovnoľahlosti)**, pričom prvky prvého (resp. druhého) stĺpca tejto matice predstavujú súradnice vektora $\vec{e}_1' = \overrightarrow{O'E_1'}$ (resp. vektora $\vec{e}_2' = \overrightarrow{O'E_2'}$), ktorý je obrazom vektora $\vec{e}_1$ (resp. vektora $\vec{e}_2$) v danej rovnoľahlosti. V rovnoľahlosti rovnobežnosť sa zachováva, preto vektory $\vec{e}_1$ a $\vec{e}_1'$ sú lineárne závislé, pričom $\vec{e}_1' = k \cdot \vec{e}_1$.
2. V transformačných rovniciach koeficienty pri neznámej x (resp. y) predstavujú súradnice vektora $\vec{e}_1'$ (resp. vektora $\vec{e}_2'$).

Cvičenie.

V rovnoľahlosti, ktorá zobrazuje $A[-2,0] \to A'[-2,1], B[1,-1] \to B'[4,-1], C[-1,1] \to C'[0,3]$ nájdite obrazy začiatku $O[0,0]$ a jednotkových vektorov $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$, kde $E_1 = [1,0], E_2 = [0,1]$.

Riešenie. Využite riešenie príkladu "Tri body" v kapitole "Afinné zobrazenie". Pozrite si grafické riešenie Tu.

Obraz troch bodov

Nech je daná $(n+1)$ - tica bodov $A, A_1, \ldots, A_n$ v euklidovskom priestore $\mathbb{E}_n$ taká, že (n) - tica vektorov $\vec{a}_1 = A_1 - A, \ldots, \vec{a}_n = A_n - A$ so zamerania $V_n(\mathbb{R})$ je nezávislá. V tomto prípade sústava $\mathcal{R} = \{A; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ tvorí repér tohto priestoru. Takejto $(n+1)$ - tici bodov budeme hovoriť, že je **lineárne nezávislá**.

Vo vete "Jednoznačnosť afinného zobrazenia" sme dokázali, že afinné zobrazenie $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$ je jednoznačne určené obrazmi $n+1$ lineárne nezávislých bodov euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$.Dôkaz tohto tvrdenia nájdete aj v práci [Chalmoviansky, 2022].

V ďalšej časti sa zameriame na určenie transformačných rovníc **afinného zobrazenia v euklidovskej rovine** $\mathbb{E}_2$, v ktorom sú dané dve trojice odpovedajúcich nekolineárnych bodov. Začneme trojicami, ktoré vyhovujú rovnoľahlosti, čo nám uľahčí kontrolu správnosti určenia transformačných rovníc.

Cvičenie.

Určte transformačné rovnice afinného zobrazenia $f : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$, v ktorom

$$A(-1,-2) \to A'(4,2); \quad B(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}) \to B'(\tfrac{11}{4}, -\tfrac{1}{2}), \quad C(-3,0) \to C'(2,4).$$

Riešenie.

Riešenie pomocou rozšírených matíc sme popísali v predchádzajúcich kapitolách. Teraz pre úplnosť ukážeme aj riešenie, v ktorom sa budeme opierať o sústavu 6 rovníc o 6 neznámych. Takéto riešenie je však technicky náročnejšie a dosť nepraktické.

Pre bod X v rovine $\mathbb{E}_2$ platí, že je lineárnou kombináciou bodov $A(-1,-2); B(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}); C(-3,0)$, preto platí

$X = a(-1,-2) + b(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) + c(-3,0)$, pričom $a + b + c = 1$.

V kapitole "Afinné zobrazenie" sme ukázali, že transformačné rovnice afinného zobrazenia v euklidovskom priestore $\mathbb{E}_2$ majú tvar

$$\begin{aligned} x' &= a \cdot x + c \cdot y + p \\ y' &= b \cdot x + d \cdot y + q \end{aligned}$$

,

kde a, b, c, d, p, q sú súradnice obrazov vektorov bázy a, b, c, d a súradnice obrazu začiatku repéra p, q. Dosaďme súradnice bodov A, A' do týchto transformačných rovníc. Po úprave dostaneme dve rovnice o 6 neznámych a, b, c, d, p, q. Konkrétne to budú rovnice

$$\begin{aligned} 4 &= -1a - 2c + p \\ 2 &= -1b - 2d + q. \end{aligned}$$

Postupne ak dosadíme súradnice ďalších bodov B, B', C, C' dostaneme ďalšie 4 rovnice.

$$\begin{aligned} \tfrac{11}{4} &= \tfrac{3}{2}a - \tfrac{3}{2}c + p \\ -\tfrac{1}{2} &= \tfrac{3}{2}b - \tfrac{3}{2}d + q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 &= -3a + 0c + p \\ 4 &= -3b + 0d + q. \end{aligned}$$

Spolu je to sústava 6 lineárnych rovníc, ktorá vzhľadom na zadanie (nekolineárne body) bude mať práve jedno riešenie. Vypíšte všetkých 6 rovníc a potom vyriešte túto sústavu.

Poznámka.

Nájsť riešenie takejto sústavy je časovo dosť náročná práca, ktorá študentov nemotivuje a navyše ich odpúta od podstaty úlohy– nájsť transformačné rovnice.

Preto s výhodou môžeme použiť nástroje programu GeoGebra (alebo iných softvérov, napr. Matrix). Pomocou nástroja/vzhľadu "Tabuľka" v programe GeoGebra najskôr „vygenerujeme“ maticu sústavy 6 rovníc so 6 neznámymi s pravou stranou. Do jednotlivých polí v „Tabuľke“ vložíme súradnice bodov pomocou príkazov: $= x(M), y(M)$, kde M je názov bodu, ktorého súradnice vkladáme.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**a**	**b**	**c**	**d**	**p**	**q**	**X'**
2	-1	0	-2	0	1	0	4
3	0	-1	0	-2	0	1	2
4	1.5	0	-1.5	0	1	0	2.75
5	0	1.5	0	-1.5	0	1	-0.5
6	-3	0	0	0	1	0	2
7	0	-3	0	0	0	1	4

Otvorte si dynamickú tabuľku Tu.

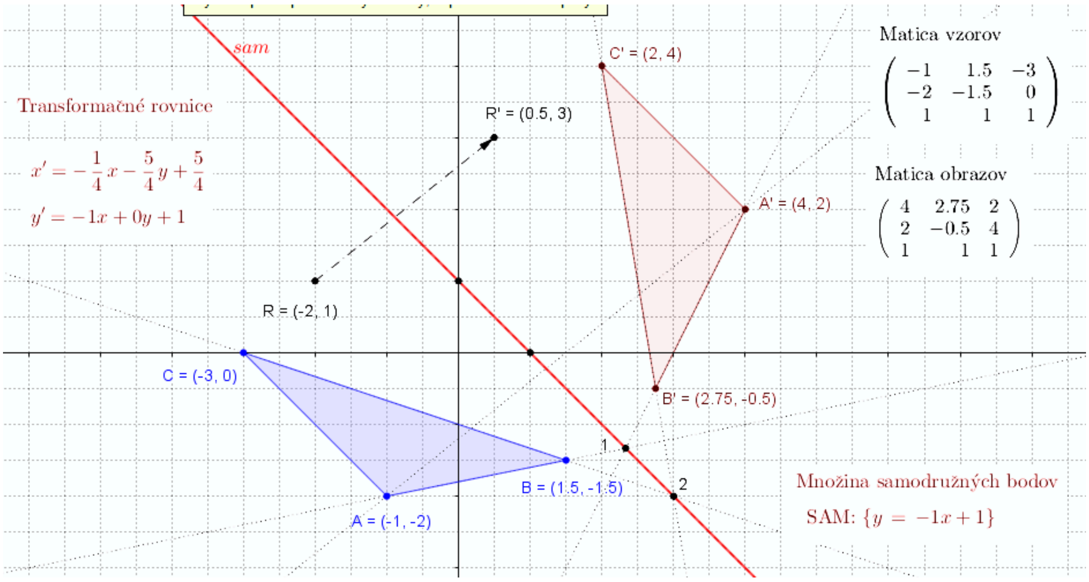
Z tabuľky vidieť, že napr. do poľa „A2“ je vložený príkaz „$= x(A)$“, ktorý predstavuje prvú súradnicu bodu A. Tabuľka má ďalšiu veľkú výhodu: Vstupné pole „A2“ je aktívne voči zmene polohy bodu A. Ak sa poloha bodu A zmení, tak sa automaticky zmení aj príslušné polia tabuľky „$= x(A)$“,”$= y(A)$“. Analogicky sa aktualizujú aj zvyšné polia tabuľky. Dynamické vstupy nám teda umožnia aktualizovať maticu sústavy 6 rovníc aj s pravou stranou. Je to matica typu 6×7 s rozsahom je $(A2 \ldots G7)$.

Riešenie danej sústavy 6 rovníc so 6 neznámymi s pravou stranou môžeme nájsť pomocou maticového počtu, ktorý je tiež k dispozícii v GeoGebre.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ (1,5) & 0 & (-1,5) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (1,5) & 0 & (-1,5) & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2,75 \\ -0,5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Výsledok. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -1 \\ -1,25 \\ 0 \\ 1,25 \\ 1 \end{pmatrix}$

Transformačné rovnice skúmaného afinného zobrazenia sú prezentované na ďalšom obrázku v ľavej časti obrázka.



Funkčný applet si môžete aktivovať Tu.

Matica zobrazenia f v tomto príklade má tvar $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, čo predstavuje osovú afinitu.

Cvičenie - nájdite chybu.

Pozrite si geometrický spôsob riešenia podobnej úlohy, v ktorom sa využíva program GeoGebra. Otvorte si riešenie Tu.

V tejto konštrukcii je nesprávne zadaná hodnota v matici vzorov. Nájdite túto zle zadanú hodnotu a opravte ju.

Obraz repéra

Z analytického vyjadrenia (REP) afinného zobrazenia $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$ vyplýva, že takéto afinné zobrazenie je jednoznačne určené, ak poznáme obraz $\mathcal{R}' = \left\langle O'; \boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_2}', \cdots, \boldsymbol{e_n}' \right\rangle$ súradného repéru $\mathcal{R} = \langle O; \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n} \rangle$ v tomto zobrazení. Analytické vyjadrenie daného zobrazenia je určené vzťahom (AV) v kapitole "Analytické vyjadrenie".

V tejto kapitole sa budeme zaoberať transformáciami euklidovskej roviny $\mathbb{E}_2 = (\mathbb{R}_2, V_n(\mathbb{R}))$, ktorá má repér $\mathcal{R} = \langle O[0,0]; \boldsymbol{e_1} = (1,0), \boldsymbol{e_2} = (0,1) \rangle$. Nech tento súradný repér v afinnom zobrazení f sa zobrazí na repér $\mathcal{R} = \left\langle O'; \boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_2}' \right\rangle$. Vektory $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ sú lineárne nezávislé, preto aj ich obrazy $\boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_2}'$ sú zrejme lineárne nezávislé. Dokážte to!

Maticový zápis pre **rovinné** afinné zobrazenie $f : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ určené obrazom repéra $\mathcal{R} = \langle O; \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2} \rangle$ bude mať nasledovný tvar

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ alebo } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde $(a,b) = f^*(\vec{e}_1), (c,d) = f^*(\vec{e}_2)$ sú obrazy súradnicových vektorov v asociovanom zobrazení f^* a $[p,q] = f(O)$ je obraz začiatku súradnej sústavy v afinnom zobrazení f.

Matica $\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sa nazýva **transformačná matica** afinného zobrazenia f.

Pri určovaní afinného zobrazenia, ktoré je určené obrazom $\left\langle O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 \right\rangle$, môžeme transformačné rovnice určiť priamo pomocou súradníc obrazu počiatku O' a súradníc vektorov $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$. Súradnice obrazu ľubovoľného bodu P roviny potom môžeme získať tak, že do transformačných rovníc dosadíme súradnice bodu $P[x_p, y_p]$.

Príklad - obraz bodu P a kružnice euklidovskej roviny.

1. Určte transformačné rovnice afinného zobrazenia, ktoré postupne zobrazuje body súradného repéra $O = [0,0], E_1 = [1,0], E_2 = [0,1]$ do bodov $O' = O[0,0], E'_1 = E_1[1,0], E'_2 = [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ v tomto poradí.
2. Určte obraz ľubovoľného bodu $P[x_p, y_p]$.
3. Určte obraz kružnice $k(S = [0,0], r = 3)$ pomocou nástroja "Množina bodov".
4. Pokúste sa toto afinné zobrazenie geometricky interpretovať. Príklad je prevzatý z práce [CHP, 2010], Cvičenie 29.

Riešenie.

1. Najskôr musíme určiť obraz súradného repéra $\langle O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$. Keďže začiatok súradnej sústavy bod $O = O'[0,0]$ je samodružný, tak pre obrazy vektorov $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ bude platiť $\vec{e}'_1 = (1,0), \vec{e}'_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
   Transformačné rovnice určíme dosadením súradníc obrazov vektorov $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

   $$a = 1, b = 0, c = \frac{1}{2}, d = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   a súradníc bodu $O'[p = 0, q = 0]$ do sústavy dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych

   $$x' = a \cdot x + c \cdot y + p$$
   $$y' = b \cdot x + d \cdot y + q.$$

Dostaneme transformačné rovnice

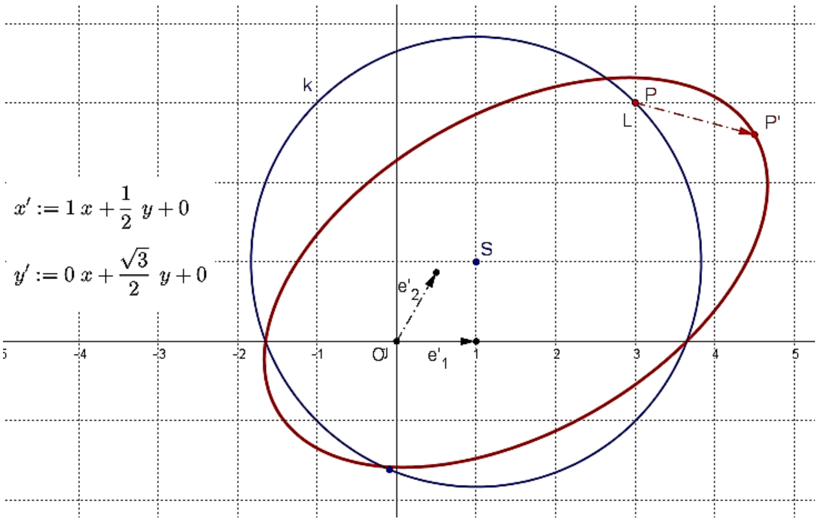
$$x' = 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y + 0$$
$$y' = 0 \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y + 0.$$

2. Súradnice obrazu ľubovoľného bodu P určíme dosadením jeho súradníc x_p, y_p do transformačných rovníc. Pre súradnice x'_p, y'_p dostaneme

$$x'_p = x_p + \frac{1}{2} \cdot y_p + 0$$
$$y'_p = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y_p + 0.$$

Výsledok napríklad pre bod $P[-2, 3]$ je $P'\left[-\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{(3)}}{2}\right]$.

3. Samostatná práca: V GeoGebra applete (upravte applet "Kompletné grafické riešenie ..." z príkladu Tri body) si zvoľte si ľubovoľnú kružnicu $k(S, r)$ a na nej si zvoľte ľubovoľný "Bod na objekte" L. Potom vo vlastnostiach bodu P v definícii zadajte P=L. Nakoniec aktivujte nástroj "Množina bodov" a kliknite postupne na bod P' a potom na bod L.



4. Na základe obrazu kružnice ide o osovú afinitu, ktorej os je x-ová súradná os. Ukážte, že každý bod x-ovej súradnej osi je samodružný.
5. Kompletná konštrukcia - "Dynamický repér" Tu.

Uvádzame aj určenie rovníc pomocou maticovej kalkulačky

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2} y \\ \frac{\sqrt{3}}{2} y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Samodružnosť

Definícia (Samodružný bod).

Bod M v afinnom zobrazení $f:\mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ je samodružný práve vtedy, ak sa v zobrazení f zobrazí sám na seba $f(X)=X$.

Samodružné body afinnej transformácie pre $n=2$ jednoducho nájdeme ako riešenie sústavy dvoch rovníc

$$\begin{aligned} x &= a\cdot x + c\cdot y + p \\ y &= b\cdot x + d\cdot y + q. \end{aligned}$$

Vyriešiť tieto rovnice je jednoduché, ak poznáme koeficienty a,b,c,d,p,q.

Poznámky.

Z pohľadu syntetickej geometrie táto sústava dvoch rovníc predstavuje dve priamky v rovine. Vyriešiť sústavu znamená teda nájsť spoločné body dvoch priamok a to môže byť

- prázdna množina – vtedy afinné zobrazenie nemá samodružný bod
- existuje priesečník priamok – afinné zobrazenie má jeden samodružný bod
- priamky sú totožné - afinné zobrazenie má priamku samodružných bodov.

Cvičenie.

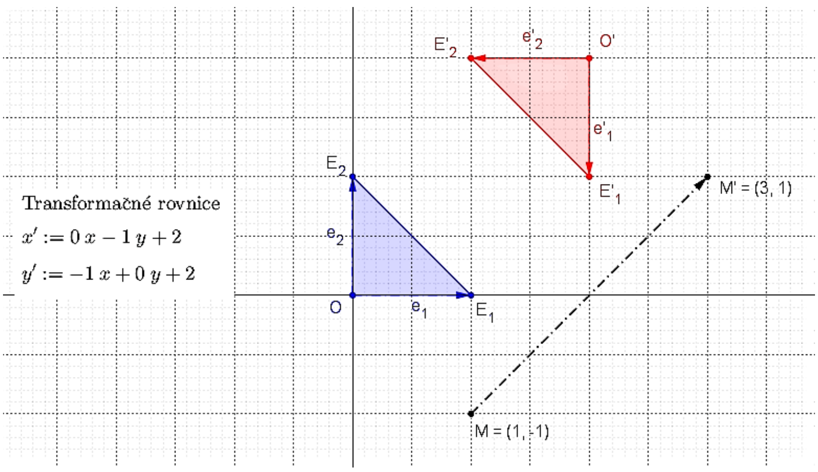
Nájdite samodružné body afinného zobrazenia, v ktorom sa súradný repér zobrazí na repér

$$\mathcal{R}' = \langle O'[2,2]; \vec{e}_1{}'(0,-1), \vec{e}_2{}'(-1,0)\rangle.$$

Transformačné rovnice budú mať tvar

$$\begin{aligned} x &= 0\cdot x - 1\cdot y + 2 \\ y &= -1\cdot x + 0\cdot y + 2. \end{aligned}$$

Nasledujúci obrázok predstavuje grafickú interpretáciu tohto afinného zobrazenie v rovine. Bod $M(x(M), y(M))$ je pohyblivý, ktorého obraz je bod M'. Bod M' má v afinnom zobrazení súradnice $M'((ax(M)+cy(M)+p, bx(M)+dy(M)+q)$, kde (\small a,b,c,d,p,q\) sú súradnice obrazu repéra. Applet k tomuto cvičeniu si môžete otvoriť Tu.



Samodružné body afinnej transformácie jednoducho nájdeme ako riešenie rovnice

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Po rozpísaní dostaneme sústava dvoch rovníc, ktorá bude mať tvar

$$x = 0 \cdot x - y + 2$$
$$y = -x + 0 \cdot y + 2$$

Ľahko nahliadneme, že rovnice sú lineárne závislé (dokonca rovné). Preto množina bodov, ktoré sú riešením danej sústavy je priamka $y = -x + 2$. Presnejšie: každý bod priamky

$$y = -x + 2$$

je samodružný. Zobrazenie, ktoré má priamku bodovo samodružnú, je buď osová súmernosť alebo osová afinita. V našom prípade je to osová súmernosť s osou súmernosti $y = -x + 2$.

Úlohy.

Určite samodružné body afinného zobrazenia určeného transformačnými rovnicami:

a. $x' = 2x - y + 1$
   $y' = x + 2y + 3$
b. $x' = x - y + z + 1$
   $y' = -x + y + z + 2$
   $z' = -x - y + 3z + 3$
c. Úlohy zo zbierky [MOZ], Úlohy 3.5.1 až 3.5.7.

Riešenie

a. Po úprave dostaneme

$$x - y + 1 = 0$$
$$x + y + 3 = 0$$

Applet Tu.

b. Po úprave dostaneme

$$-y + z + 1 = 0 \qquad .$$
$$-x + z + 2 = 0$$
$$-x - y + 2z + 3 = 0$$

c. Použite nástroje CAS "Riešenie sústavy rovníc".

"Riešenie sústavy rovníc" Tu.

Tvrdenie - určenie afinného zobrazenia.

Afinné zobrazenie f v n - rozmernom euklidovskom priestore $\mathbb{E}_n$ je jednoznačne určené obrazmi

$n + 1$ **lineárne nezávislými bodmi**

daného euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$.

Dôkaz.

Je založený na vlastnosti, že $n + 1$ lineárne nezávislých bodov $A_0, A_1, \ldots, A_n$ určuje repér $\mathcal{R} = \langle O; \boldsymbol{e_i} = A_i - A_0 \rangle ; i = 1, \ldots, n$

Zhodnostné zobrazenia

Analytické vyjadrenia zhodnostných zobrazení.

So syntetickým prístupom k zhodnostným zobrazeniam ste sa zoznámili v kurze Planimetria. Euklidovské konštrukcie, v ktorých sa využívajú vlastnosti zhodnostných zobrazení si môžete zopakovať Tu.

Definícia (Zhodnostné zobrazenie).
Zobrazenie f v euklidovskej rovine budeme nazývať zhodnostné zobrazenie, ak pre každé dva body $X, Y \in \mathbb{E}_2$ a ich obrazy $f(X), f(Y)$ platí

(ZH) $\qquad |XY| = |f(X)f(Y)|.$

Inými slovami zhodnostné zobrazenia zachovávajú vzdialenosti bodov.

Ak chceme so zhodnostnými zobrazeniami pracovať ako s afinnými zobrazeniami v 2-rozmernom euklidovskom priestore zameraním $V_2(\mathbb{R})$, tak musíme najskôr ukázať že platí nasledujúca veta.

Tvrdenie (Afinnosť zhodnostného zobrazenia).
Každé zhodnostné zobrazenie $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^k$ je afinné.

Dôkaz.
Treba dokázať, že zhodnostné zobrazenie f spĺňa podmienku zachovania kolineárnosti a deliaceho pomeru. Nech $A \neq B \neq C \neq A$ sú **kolineárne** body $\mathbb{E}^n$, potom zrejme aj body (\small f(A), f(B),f(C) \) sú navzájom rôzne. Bez ujmy na obecnosti môžeme predpokladať, že pre usporiadanie bodov A, B, C platí $\mu(ABC)$. Bod B leží medzi bodmi A, C.
Ukážeme, že body $f(A), f(B), f(C)$ sú kolineárne a zároveň platí $(ABC) = (f(A)f(B)f(C))$.

- Prvú časť tvrdenia dokážeme sporom. Nech body $f(A), f(B), f(C)$ nie sú kolineárne, potom vytvárajú trojuholník a na základe trojuholníkovej nerovnosti dostaneme spor.
- Teda body $f(A), f(B), f(C)$ ležia na jednej priamke. Pre ich usporiadanie môžu nastať dva prípady, z ktorých iba prípad, keď bod $f(B)$ leží medzi bodmi $f(A), f(C)$ vyhovuje podmienkam:
$$|AC| = |f(A)f(C)|\,, |BC| = |f(B)f(C)|\,, |AB| = |f(A)f(B)|.$$

Teda platí $(ABC) = (f(A)f(B)f(C))$.

Nech $\mathbb{E}_2$ je euklidovská rovina so súradnicovou sústavou $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. V predchádzajúcich kapitolách sme ukázali, že ľubovoľný bod $X \in \mathbb{E}_2$ a vektor $\vec{u} \in (E_2)$ sa dá jednoznačne vyjadriť ako lineárna kombinácia repéru resp. bázy

Tvrdenie (Analytické vyjadrenie zhodnostného zobrazenia v rovine).
Zhodnostné zobrazenie $f : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ má maticové analytické vyjadrenie v tvare

(AZH) $\qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

kde $f^*(\vec{e}_1) = (a, b), f^*(\vec{e}_2) = (c, d)$ sú obrazy súradnicových vektorov v asociovanom zobrazení f^* a $[p, q] = f(O)$ je obraz začiatku súradnej sústavy v afinnom zobrazení f.

Dôkaz.

Nech je v $\mathbb{E}_2$ je afinné zobrazenie f, v ktorom sa repér $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ zobrazí na repér $\langle O; \vec{e}_1', \vec{e}_2' \rangle$, pričom pre súradnice obrazov platí

$$f(O) = [p, q]$$
$$\vec{e}_1' = f^*(\vec{e}_1) = (a, b), \vec{e}_2' = f^*(\vec{e}_2) = (c, d).$$

Ľubovoľný bod $X = [x, y]$ euklidovskej roviny sa pomocou súradného repéru $\mathcal{R} = \langle O; \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2} \rangle$ dá jednoznačne ako

$$X = O + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

Keďže zobraznie f je lineárne, tak pre jobraz $X' = [x', y']$ bude platiť

$$X' = f(X) = f(O) + xf^*(\vec{e}_1) + yf^*(\vec{e}_2)$$

odkiaľ dostávame

$$[x', y'] = [p, q] + x(a, b) + y(c, d),$$

čo predstavuje maticový zápis (AZH).

Podmienka

Ak $\mathbb{A}$ je matica zhodnostného zobrazenia, tak musí platiť

$$\mathbb{A} \times \mathbb{A}^T = I$$

kde $\mathbb{A}^T$ je transponovaná matica k matici $\mathbb{A}$ a matica I je jednotková. Zdôvodnenie nájdete v práci (Ptáčková, 2016).

Matica, ktorá splňuje túto podmienku má tvar

$$\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix},$$

kde $f^*(\vec{e}_1) = (a, b), f^*(\vec{e}_2) = (c, d)$ sú obrazy súradnicových vektorov v asociovanom zobrazení.

Zvoľme $d_1 = \cos\alpha$, alebo $c_2 = \sin\alpha, d_2 = -\cos\alpha$, aby bola splnená rovnosť $ac + bd = 0$. Získame dve riešenia. Jedno riešenie je:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Matica A_1 je matica typu: $\begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}$, kde $m, n \in \mathbb{R}$. Matice tohto typu sú matice priamych zhodností.

Druhým riešením je matica typu: $\begin{pmatrix} m & n \\ n & -m \end{pmatrix}$, kde $m, n \in \mathbb{R}$, čo predstavuje maticu nepriamej zhodnosti.

Posunutie

Posunutie τ_u v rovine $\mathbb{E}_2$ je jednoznačne určené vektorom posunutia $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

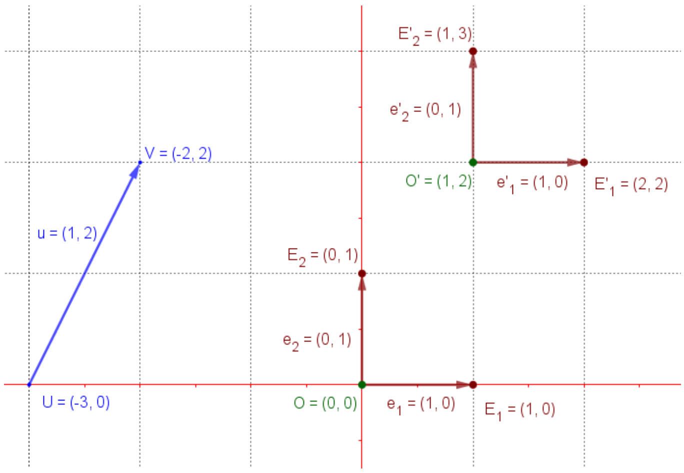
Z planimetrie vieme, že posunutie τ_u zachováva rovnobežnosť. Keďže posunutie je zhodnostné zobrazenie, tak zachováva aj dĺžku úsečky. Z vlastností rovnobežníka $AB\tau_u(B)\tau_u(A)$ vieme, že jeho protiľahlé strany sú zhodné a navzájom rovnobežné. Teda platí

$$|AB| = |\tau_u(AB)| = |\tau_u(A)\tau_u(B)|.$$

Preto môžeme vysloviť nasledujúcu vetu.

Tvrdenie (Obraz bodu v posunutí).
Pre obrazy $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ súradných vektorov $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$ v ľubovoľnom posunutí platí

(TAU) $\quad \vec{e}_1' = \tau_u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ a $\vec{e}_2' = \tau_u(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$.



Dôkaz.
Otvorte si dynamický applet Tu, v ktorom môžete premiestňovať vektor $\vec{u}$ a meniť polohu koncového bodu V vektora $\vec{u} = \overrightarrow{UV}$.

Z vlastností rovnobežníka ($OE_1E_1'O'; OO' \parallel E_1E_1' \parallel \vec{u}$) vyplýva, že $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_1'}, \ldots$.

Posunutie v rovine $\mathbb{E}_2$ je afinné zobrazenie určené vektorom posunutia $\vec{u} = \overrightarrow{OO'}$, kde $O' = [p,q], \vec{u} = (p,q)$.
Posunutie je analyticky určené rovnicou

$$X' = X + \vec{u} \qquad (1)$$

Rovnica (1) predstavuje transformačné rovnice

$$\begin{aligned} x' &= x + 0y + p \\ y' &= 0x + y + q \end{aligned}$$

.

V maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Posunutie v rovine je afinné zobrazenie. Dokážte to.

Príklad.

V rovine $\mathbb{E}_2$ je posunutie určené vektorom $\vec{u} = (1, 2)$. Určite jeho transformačné rovnice.

Riešenie.

Poznáme obraz počiatku súradnej sústavy: $O' = [1, 2]$ a dosadením do vzťahu (1) dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} x' &= x + 1 \\ y' &= y + 2 \end{aligned}$$

.

Úloha.

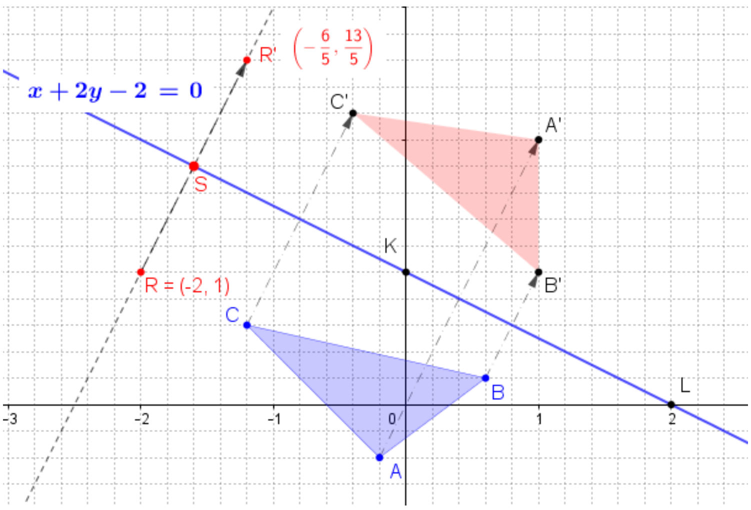
Vytvorte applet v GeoGebre, ktorý bude generovať transformačné rovnice pre posunutie v rovine.

Osová súmernosť

Osová súmernosť ako afinné zhodnostné zobrazenie.

Z kurzu *Planimetria* vieme, že osová súmernosť je jednoznačne určená osou súmernosti a dvojicou odpovedajúcich bodov. Ak si zvolíme dva rôzne body na osi súmernosti, tak osovú súmernosť môžeme jednoznačne určiť dvomi Samodružnými bodmi a jednou dvojicou odpovedajúcich si bodov. Túto vlastnosť neskôr výhodne využijeme pri hľadaní transformačných rovníc osovej súmernosti.

Osová súmernosť - ukážka.



Otvorte si dynamickú konštrukciu Tu

A. Na určenie transformačných rovníc osovej súmernosti určenej osou súmernosti $o: \ ax + by + c = 0$ budeme potrebovať obrazy troch rôznych bodov a ich obrazy v danej osovej súmernosti.

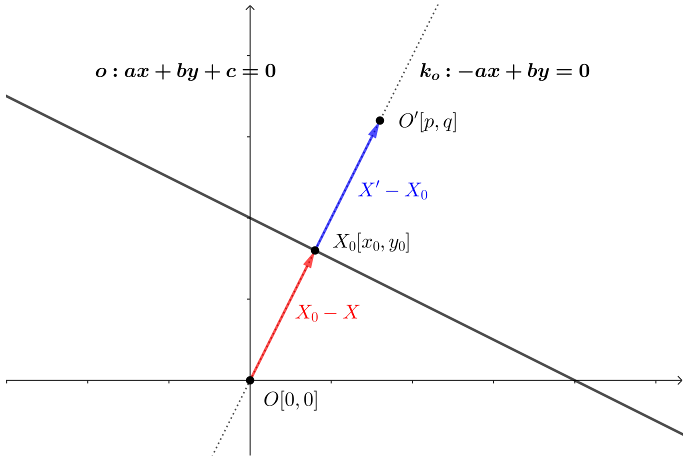
Najvýhodnejšie bude ak si zvolíme dva rôzne samodružné body a nejaký tretí bod tak, aby všetky tri boli nekolineárne. Takými bodmi pri takto danej osi súmernosti sú napríklad

   i. Dva body na osi súmernosti $o: \ ax + by + c = 0, \ a, b \neq 0$, pre ktoré platí $A = [0, \frac{-c}{b}]$ a $B = [\frac{-c}{a}, 0]$, prípad ak jeden z koeficientov a, b je rovný nule sa rieši zvlášť.

   bodu

   ii. Tretí bod nech je počiatok súradnej sústavy $O = [0, 0]$. Súradnice p, q jeho obrazu $O' = [p, q]$ určíme napríklad pomocou bodu $X_0[x_0, y_0]$. Tento bod je spoločným bodom danej priamky $o: \ ax + by + c = 0$ a kolmice $k_o \ : \ -ax + by = 0$. Pre jeho súradnice platí:

$$x_0 = \frac{-ac}{a^2 + b^2}; \ y_0 = \frac{-bc}{a^2 + b^2}.$$



Obraz počiatku súradnej sústavy v osovej súmernosti.

Vektor $\overrightarrow{OO'}$ je $2-$ násobkom vektora $\overrightarrow{OX_0}$. Odkiaľ dostávame súradnice obrazu počiatku v osovej súmernosti:

$$p=\frac{-2ac}{a^2+b^2};\ q=\frac{-2bc}{a^2+b^2}.$$

B. Potom dosadíme súradnice obrazov $O'=[p,q], A=A'=[0,\frac{-c}{b}], B=B'=[\frac{-c}{a},0]$ do vzťahov

$$X=rA+sB+tO$$
$$X'=rA+sB+tO'$$

pričom musí platiť

$$r+s+t=1.$$

Dostaneme maticovú rovnicu v tvare $M'_{Obrazov}\times M^{-1}_{Vzorov}=M_{Transfor}$. (pozrite tiež príklad " Tri body" v kapitole Afinné zobrazenie) a využitím Matrix calculator dostaneme

$$\begin{pmatrix} \frac{-c}{a} & 0 & \frac{-2ac}{a^2+b^2} \\ 0 & \frac{-c}{b} & \frac{-2bc}{a^2+b^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-a}{c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b}{c} & 0 \\ \frac{a}{c} & \frac{b}{c} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2} & \frac{-2ac}{a^2+b^2} \\ \frac{-2ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{-2bc}{a^2+b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

odkiaľ už ľahko určíme hľadané transformačné rovnice.

Tvrdenie (Obraz bodu v osovej súmernosti $\sigma(o)$).

Transformačné rovnice pre osovú súmernosť určenú osou súmernosti $o:\ ax+by+c=0,\ a,b\neq 0$:

(OS)
$$\begin{aligned} x' &= \left(-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)x - \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)y-\frac{2ac}{a^2+b^2}, \\ y' &= \left(-\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)x + \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)y-\frac{2bc}{a^2+b^2} \end{aligned}.$$

Cvičenie.

Určte analytické vyjadrenie osovej súmernosti určenej osou o, ktorá je určená rovnicou $o:\ x+2y-2=0$.

Riešenie.

Po určení $O'=[\frac{4}{5},\frac{8}{5}]$ a priesečníkov so súradnými osami $A'=[0,1], B'=[2,0]$ a dostaneme pre maticu vzorov a maticu obrazov

$$M_{Vzorov} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; M^{-1}_{Vzorov} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}; M'_{Obrazov} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{4}{5} \\ 1 & -0 & \frac{8}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

odkiaľ

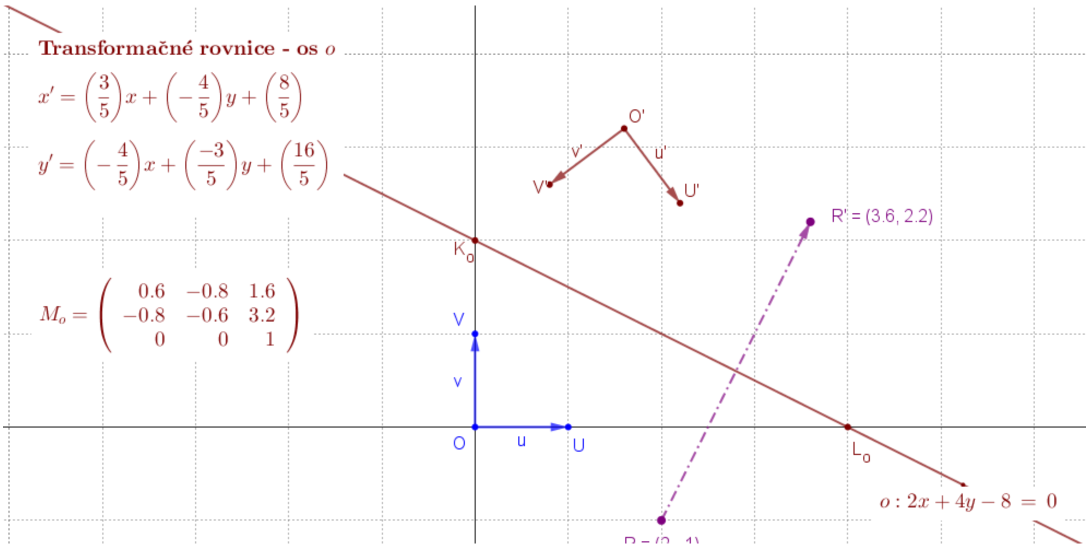
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{4}{5} \\ 1 & -0 & \frac{8}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

čo predstavuje transformačné rovnice pre skúmanú osovú súmernosť

$$\begin{aligned} x' &= \ \ \tfrac{3}{5}x - \ \tfrac{4}{5}y + \tfrac{4}{5} \\ y' &= -\tfrac{4}{5}x - \ \tfrac{3}{5}y + \tfrac{8}{5} \end{aligned}$$

.

Osová súmernosť je oproti ostatným zhodným zobrazeniam niečím výnimočná. Má zaujímavú vlastnosť, skladaním osových súmerností sa dajú získať všetky zhodné zobrazenia v rovine.



Skladanie osových súmerností - applet Tu.

V applete "Skladanie osových súmerností" sú osi súmerností navzájom kolmé. Preto ich zložením bude stredová súmernosť so stredom $S = o \cap \sigma$. Matica zloženého zobrazenia $M_{o\times\sigma} = M_\sigma \times M_o$ je súčinom transformačnej matice osovej súmernosti M_o a transformačnej matice osovej súmernosti M_σ.

Ak označíme súradnice stredu $S = o \cap \sigma$ ako $S = [s_1, s_2]$, tak rozšírená matica stredovej súmernosti bude mať tvar

$$M_{o\times\sigma} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & p \\ 0 & -1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $p = 2s_1, q = 2s_2$ sú súradnice obrazu počiatku v skúmanej stredovej súmernosti. V nasledujúcej kapitole dokážeme túto vlastnosť pomocou skladania posunutia a stredovej súmernosti so stredom v pčiatku súradnej sústavy.

Presvedčte sa že hodnoty p, q sa nemenia pri zmene polohy osí súmerností za predpokladu, že kolmosť je invariantná voči zmene polohy. Nastavte osi súmernosti tak, aby $o = x \vee \sigma = y$.

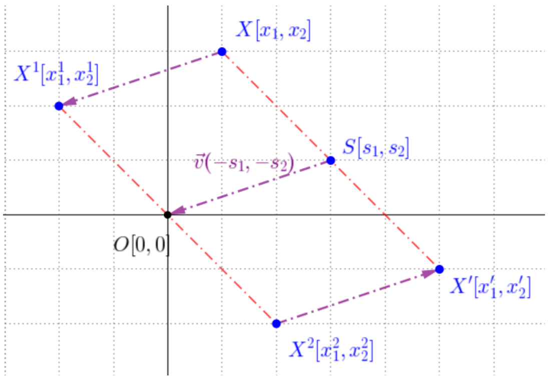
Stredová súmernosť ϱ_S v rovine $\mathbb{E}_2$ je jednoznačne určené stredom súmernosti S.

Konštrukciu obrazu ľubovoľného bodu $X \in \mathbb{E}_2$ v stredovej súmernosti ϱ_S môžeme zhrnúť do dvoch krokov:

1. obrazom bodu S je bod S,
2. obrazom bodu $X \neq S$ je bod X', pre ktorý platí, že bod S je stredom úsečky XX'.

V predchádzajúcej kapitole sme stredovú súmernosť vyjadrili ako zložené zobrazenie dvoch osových súmerností, ktorých osi sú na seba kolmé. Stredovú súmernosť môžeme vyjadriť aj ako zložené zobrazenie z:

- posunutia τ_{-v} o vektor $-\vec{v} = (-s_1, -s_2)$,
- stredovej súmernosti $\varrho_{S[0,0]}$,
- posunutia τ_v o vektor $\vec{v} = (s_1, s_2)$.



Posunutie τ_{-v} o vektor $\vec{v} = (-s_1, -s_2)$ je určené maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stredová súmernosť $\varrho_{S[0,0]}$ je daná maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zrejme posunutie τ_v o vektor $\vec{v} = (s_1, s_2)$ je určené maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stredová súmernosť ako zložené zobrazenie je dané súčinom matíc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \circ. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Postupným prenásobením dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_1 & -1 & 0 \\ s_2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2s_1 & -1 & 0 \\ 2s_2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tvrdenie (Analytické vyjadrenie stredovej súmernosti).

Pre obraz bodu $X = [x, y]$ v stredovej súmernosti ϱ_S platí

(SS) $$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2s_1 & -1 & 0 \\ 2s_2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2s_1 - x \\ 2s_2 - y \end{pmatrix}.$$

Poznámka - k rozšíreným maticiam.

V tejto kapitole sme použili inú formu zápisu rozšírených matíc. V tomto zápise sa "pomocný riadok" $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ zapisuje ako prvý riadok rozšírenej matice. Operácie s maticami zostávajú nezmenené. V pôvodnom označení by sme predchádzajúce tvrdenie zapísali ako

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2s_1 \\ 0 & -1 & 2s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2s_1 \\ -y+2s_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Otáčanie

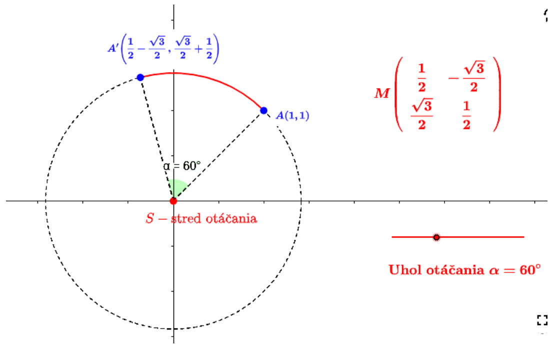
Definícia (Otáčanie).

Nech je daný bod S, uhol α (veľkosť uhla je nanajvýš 360°) a orientácia kladná (proti smeru hodinových ručičiek) resp. záporná (v smeru hodinových ručičiek). Zobrazenie, pre ktoré platí:

1. obrazom bodu S je bod S,
2. obrazom bodu $X \neq S$ je bod X', ktorý leží na kružnici $k(S; SX)$ a zároveň uhol XSX' je zhodný s uhlom α, pričom orientácia je kladná, resp. záporná, sa nazýva **otočenie** ,
3. Bod S sa nazýva **stred** otočenia. Otočenie so stredom S a uhlom α a kladnou resp. zápornou orientáciou budeme označovať $\rho_{S;-\alpha}$.

Z planimetrie vieme, že otáčanie je zhodnostné zobrazenie, preto zachováva dĺžku úsečky. Otáčanie je afinné zobrazenie určené stredom otáčania a uhlom otáčania. Otáčanie $\rho_{S;-\alpha}$ so stredom $S\,[0,0]$ zobrazuje

bod $A\,[x,y]$ do bodu $A'\,[(x.\cos\ \alpha - y.\sin\ \alpha)\,,(x.\cos\ \alpha + y.\sin\ \alpha)]$



Otvorte si applet Tu.

Tvrdenie (Transformačné rovnice otáčania okolo počiatku).

Analytické vyjadrenie otáčania so stredom $S\,[0,0]$ a uhlom α má maticový tvar

(RO) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq k \cdot 360^\circ$ je uhol otočenia a k je celé číslo.

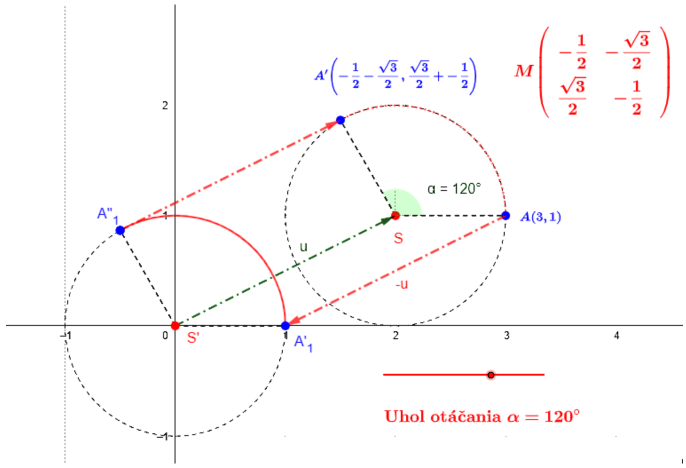
Dôkaz.

Využitím polárnych súradníc a aplikáciou súčtových vzorcov pre funkcie sínus a kosínus, ľahko dokážeme toto tvrdenie. Otvorte si prezentáciu Tu, ktorá prezentuje takýto dôkaz.

V predchádzajúcej kapitole sme stredovú súmernosť vyjadrili ako zložené zobrazenie z troch zobrazení, ktorých transformačné rovnice poznáme resp. ktoré sa ľahko odvodia. Boli to zobrazenia:

- posunutia τ_{-v} o vektor $-\vec{v} = (-s_1, -s_2)$,
- stredovej súmernosti $\varrho_{S[0,0]}$,
- posunutia τ_v o vektor $\vec{v} = (s_1, s_2)$.

Túto metódu môžeme použiť aj pre otáčanie. Stačí v danom zloženom zobrazení nahradiť stredovú súmernosť otáčaním so stredom $S\,[s_1, s_2]$. Potom dostaneme



1. posunutie τ_{-u} o vektor $\vec{u} = (-s_1, -s_2)$ určené maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & -s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. otáčanie $\rho_{S;-\alpha}$ so stredom $S\,[0,0]$ dané maticou

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a posunutie τ_u o vektor $\vec{u} = (s_1, s_2)$ určené maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Otáčanie ako zložené zobrazenie je dané súčinom matíc v danom poradí. Ich postupným vynásobením dostaneme transformačnú maticu otáčania so stredom $S\,[s_1, s_2]$:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & s_1 - s_1\cos(\alpha) + s_2\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & s_2 - s_2\cos(\alpha) - s_1\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na základe vyššie popísaných vlastností zložených zobrazení môžeme vysloviť tvrdenie, ktoré popisuje transformačné rovnice otáčania $\rho_{S;\alpha}$ so stredom S a uhlom α .

Tvrdenie (Transformačné rovnice otáčania okolo stredu $S\,[s_1, s_2]$).

Analytické vyjadrenie otáčania so stredom $S\,[s_1, s_2]$ a uhlom α má maticový tvar

(ROT) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & s_1 - s_1\cos(\alpha) + s_2\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & s_2 - s_2\cos(\alpha) - s_1\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq k \cdot 360^\circ$ je uhol otočenia a k je celé číslo.

Poznámka.

Niekedy sa všeobecné transformačné rovnice otočenia uvádzajú v upravenej podobe:

$$x' = (x - s_1)\cos\alpha - (y - s_2)\sin\alpha + s_1$$
$$y' = (x - s_1)\sin\alpha + (y - s_2)\cos\alpha + s_2$$

Príklad.

V rovine je otočenie určené stredom $S = [-1; 1]$ a o orientovaným uhlom $\alpha = -60^\circ$. Určite jeho transformačné rovnice a obraz kružnice $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$.

Riešenie.

Otočenie v rovine so stredom $S = [-1; 1]$ a uhlom$\alpha = -60^\circ$ má transformačné rovnice:

$$x' = (x+1)\cos(-60^\circ) - (y-1)\sin(-60^\circ) - 1 = \tfrac{1}{2}(x+1) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}(y-1) - 1 = \tfrac{1}{2}x$$
$$+ \tfrac{\sqrt{3}}{2}y - \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}$$
$$y' = (x+1)\sin(-60^\circ) + (y-1)\cos(-60^\circ) + 1 = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

I. Riešenie pomocou parametrických rovníc kružnice.

Na určenie obrazu kružnice $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$ potrebujeme jej parametrické vyjadrenie v tvare

$$x = 3\cos(t) - 2$$
$$y = 3\sin(t) + 2,$$

kde $t \in [0, 2\pi]$. Tieto hodnoty dosadíme do transformačných rovníc otáčania. Podrobnejší výpočet, ktorý bol spracovaný v súčinnosti s umelou inteligenciou nájdete Tu.

II. Riešenie pomocou vlastnosti zhodného zobrazenia:

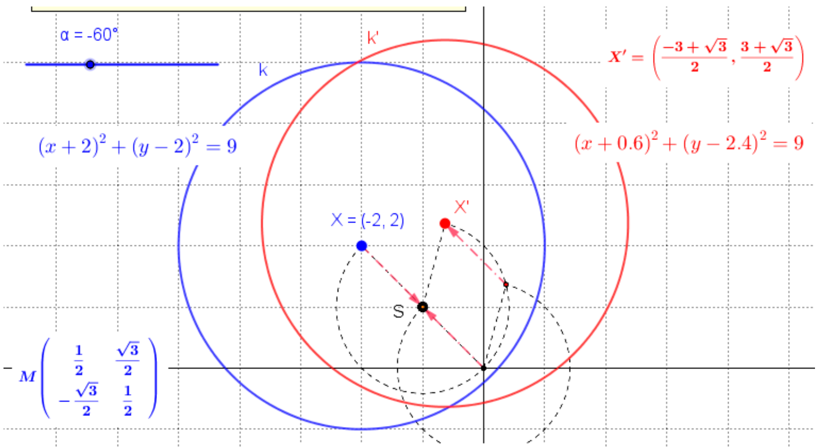
"***Stred danej kružnice (vzoru) sa zobrazí do stredu hľadanej kružnice (obrazu) a polomer sa nezmení.***"

Súradnice stredu danej kružnice sú $[-2, 2]$, ktoré dosadíme do transformačných rovníc

$$x' = (2+1)\tfrac{1}{2} + (2-1)\tfrac{-\sqrt{3}}{2} - 1 = -\tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2},$$
$$y' = (2+1)\tfrac{-\sqrt{3}}{2}(-1) + (2-1)\tfrac{1}{2}(1) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Obrazom kružnice je kružnica a jej rovnica má tvar:

$$\left(x + \tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 9.$$



Otvorte si interaktívnu konštrukciu Tu.

Vzor a obraz

Nech je dané afinné zobrazenie f, v ktorom sa súradný repér zobrazí na repér $\mathcal{R}' = \langle O' = [p,q]; \vec{e}_1{}' = (a,b), \vec{e}_2{}' = (c,d)\rangle$.

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

V tejto kapitole sa budeme zaoberať

1. obrazom bodu v afinnom zobrazení
2. hľadaním vzoru k obrazu bodu
3. obrazom priamky v afinnom zobrazení
4. obrazom ľubovoľného geometrického útvaru v afinnom zobrazení

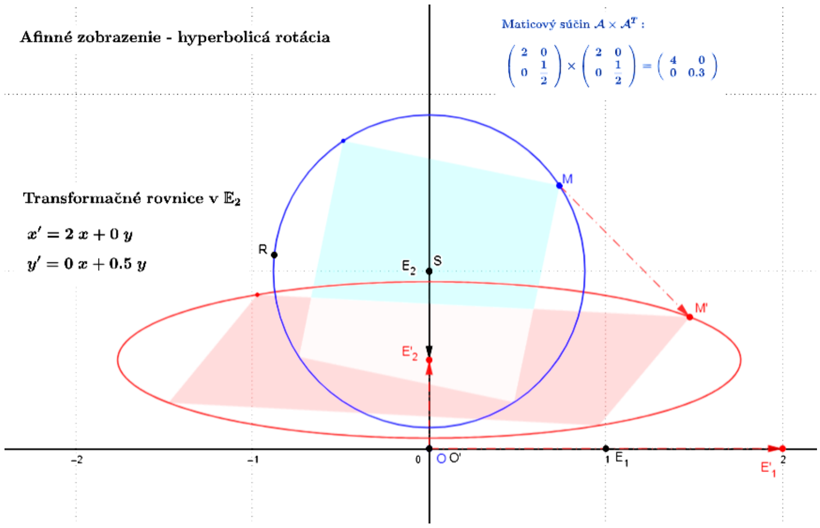
Poznámky.

Obraz bodu, priamky, geometrického rovinného útvaru v zhodnostnom afinnom zobrazení.

1. Obraz ľubovoľného bodu $A(a_1, a_2)$ v afinnom zobrazení f určíme jednoducho tak, že súradnice tohto bodu dosadíme do transformačných rovníc. Dostaneme rovnosti $a_1' = a \cdot a_1 + c \cdot a_2 + p$; $a_2' = b \cdot a_1 + d \cdot a_2 + q$, pričom čísla a_1', a_2' predstavujú súradnice bodu A'. Pozri tvrdenie Analytické vyjadrenie zhodnostného zobrazenia v rovine.
2. Nájsť vzor $A(a_1, a_2)$ k danému obrazu $A'(a_1', a_2')$ v afinnom zobrazení f určíme tak, že súradnice obrazu bodu a_1', a_2' dosadíme do transformačných rovníc za premenné x', y'. Dostaneme sústavu dvoch rovníc o neznámych x, y. Riešenie tejto súsatavy predstavuje súradnice hľadaného vzoru.
3. Určiť obraz priamky $p = AB$ v afinnom zobrazení znamená určiť rovnicu priamky $p' = A'B'$. To môžeme urobiť dvoma spôsobmi.
   - Ak priamka p je určená dvomi rôznymi bodmi A, B, tak súradnice bodov A, B dosadíme do transformačných rovníc afinného zobrazenia. Výpočtom popísanom v predchádzajúcom odseku určíme súradnice bodov A', B', ktorými bude určená priamka p'. Potom určíme napríklad parametrické rovnice priamky $p' = A'B'$.
   - Ak priamka p je určená rovnicou (napr. vo všeobecnom tvare $p: a_p x + b_p y + c_p = 0;\ b \neq 0$), tak do transformačných rovníc $x' = ax + cy + p;\ y' = bx + dy + q$ dosadíme za premenné x, y súradnice všeobecného bodu P priamky. Tento bod určíme pomocou parametra t v tvare $P[t, -\frac{at+c}{b}]$. (V prípade. že $b = 0$ zvolíme parameter $y = t$). Po dosadení dostaneme parametrické rovnice obrazu priamky
     $$x' = at + c(-\tfrac{a_p t + c_p}{b_p}) + p;\ y' = bt + d(-\tfrac{a_p t + c_p}{b_p}) + q.$$
4. Obraz ľubovoľného útvaru U v afinnom zobrazení f určíme, že nájdeme súradnice obrazov charakteristických bodov daného útvaru. Z vlastností zhodných zobrazení a z vlastnosti afinných zobrazení - lineárnosť a zachovanie deliaceho pomeru vyplýva, že obraz útvaru bude určený obrazov charakteristických bodov daného útvaru. Napríklad pre
   - ***Trojuholník*** - stačí nájsť obrazy jeho vrcholov.
   - ***Kružnicu*** stačí nájsť obraz stredu, polomer sa zachová. Pozrite si riešený príklad v predchádzajúcej kapitole.
   - ***Euklidovské*** útvary platí, že sú konštruovateľné pomocou pravítka(priamky) a kružidla(kružnice). Pre tieto útvary vieme nájsť obrazy tak, že "prenieme" aj euklidovskú konštrukciu útvaru.

- ***Neeuklidovské*** útvary možno použiť parametrizáciu týchto útvarov. Takto postupoval Pierre de Fermat, ktorý napríklad analyzoval parabolu cez rovnicu $y = ax^2$. Tým prepojil parabolu s kvadratickou rovnicou a skúmal jej vlastnosti, ako sú symetria, vrchol či dotykové body s priamkami.

5. V súčasnosti pri hľadaní obraz geometrického útvaru významne uľahčuje prácu vhodný softvér. Napríklad GeoGebra má nástroj "Množina bodov", pomocou ktorého ľahko nájdeme obraz rovinného geometrického útvaru. Túto metódu sme popísali pri riešení obrazu kružnice v hyperbolickej rotácii (ide o afinné zobrazenie), ktorá má transformačné rovnice $x' = ax; y' = \frac{1}{a}y$. Na (modrej) kružnici sme si zvolili pohyblivý bod M a určili sme jeho obraz M'. Potom sme aktivovali nástroj "Množina bodov" a klikli sme najskôr na bod M a potom na M'. Program automaticky vykreslil (červenú) elipsu.



Applet je dostupný Tu.

Príklad (Obraz bodu).

Dané je afinné zobrazenie obrazom repéra $\mathcal{R}' = \left\langle O' = [\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}]; \vec{e}_1{}' = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \vec{e}_2{}' = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) \right\rangle$. Určite obraz bodov $[-1, 1], [-1, -1]$.

Riešenie.

Transformačné rovnice majú tvar

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y - \tfrac{1+\sqrt{3}}{2} \quad . \\ y' &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{aligned}$$

Dosadením súradníc $[-1, 1]$ dostaneme ...

Otvorte si applet Tu.

Príklad (Hľadanie vzoru k obrazu bodu).

Dané je afinné zobrazenie transformačnými rovnicami

$$\begin{aligned} x' &= 3x + y - 6. \\ y' &= x + y + 1 \end{aligned}$$

Ktoré body sa zobrazia do bodov [9, 8] a [−6, 1]?

Riešenie

Súradnice bodu [9, 8] dosadíme do transformačných rovníc za premenné x', y'. Riešením je dvojica $\{x_1 = 4, x_2 = 3\}$. Otvorte si applet na riešenie rovníc Tu.

Príklad (Obraz priamky).

Dané je afinné zobrazenie obrazom repéra $\mathcal{R}' = \langle O' = [-2,2]; \vec{e}_1{}' = (2,1), \vec{e}_2{}' = (-1,1) \rangle$. Určite obraz priamky $2x+3y+1=0$ a priamky $x=1$.

Riešenie

Analytické riešenie: Transformačné rovnice sú

$$x' = 2x - y - 2.$$
$$y' = x + y + 2$$

1. Pre priamku $2x+3y+1=0$ má jej ľubovoľný bod P súradnice $P[t, -\frac{2t+1}{3}]$ Po dosadení do transformačných rovníc dostaneme sústavu parametrických rovníc

   $$x' = 2t - (-\frac{2t+1}{3}) - 2.$$
   $$y' = t + (-\frac{2t+1}{3}) + 2$$

   Výsledok: po úprave na všeobecný tvar dostaneme rovnicu obrazu priamky: $x - 8y + 15 = 0$

   Na syntetické riešenie použite applet Tu.
2. Keďže každý bod priamky $x=1$ má prvú súradnicu rovnú 1, tak stačí hodnotu $x=1$ dosadiť do transformačných rovníc a dostaneme rovnice $x' = -y$ $y' = y+3$. Po dosadení do druhej rovnice $y = -x'$ dostaneme rovnicu obrazu priamky $x + y - 3 = 0$.

Cvičenie

Vektory a počítanie s nimi

1. Vyriešte sústavu rovníc s parametrom $p \in \mathbb{R}$ v obore $\mathbb{R}$ a tiež v obore $\mathbb{Z}_5^3$
$$\begin{aligned} 4x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= 2 \\ 4x + 2z &= p + 2 \end{aligned} \; .$$
Pozrite si geometrickú interpretáciu Tu.
2. Vyriešte sústavu rovníc v obore $\mathbb{R}$
$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \\ \frac{-3}{2} \end{pmatrix}.$$
Pozrite si geometrickú interpretáciu Tu.
3. Zistite, či množina V všetkých usporiadaných dvojíc resp. trojíc spolu s dvoma binárnymi operáciami $(+, \cdot)$ je vektorovým priestorom nad poľom reálnych čísel $\mathbb{R}$, ak
   - $V = \{(3r, r);\ r \in \mathbb{R}\}$,
   - $V = \{(1 - 3r, r);\ r \in \mathbb{R}\}$,
   - $V = \{(mr, r);\ r \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}\}$,
   - $V = \{(x, y, 0);\ x, y \in \mathbb{R}\}$,

   kde sčítanie vektorov je definované ako súčet po zložkách usporiadaných dvojíc a násobenie skalárom je násobenie jednotlivých zložiek skalárom.
4. Sú dané body $A = [-1, 2],\ B = [5, 1],\ C = [1, 3]$. Nájdite vektory
$\overrightarrow{BA},\ 3 \cdot \overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA},\ 3 \cdot \overrightarrow{AC} - 2 \cdot \overrightarrow{BC}$
a zistite ich dĺžky. Zadanie Tu.
5. [Mon 1.1.3.] Sú dané body A, B. Určte polohu bodu C tak, aby
   - vektory $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$ boli umiestnením toho istého vektora.
   - vektory $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ boli umiestnením toho istého vektora.
6. V rovine je daný pravidelný 6-uholník $ABCDEF$.
   - K vektorom $\overrightarrow{AB} = B - A,\ \overrightarrow{AC} = C - A,\ \overrightarrow{AD} = D - A$ nájdite ďalšie orientované úsečky, ktoré reprezentujú dané vektory.
   Otvorte si model šesťuholníka Tu.
   - Určte koľko viazaných (voľných) vektorov je určených vrcholmi pravidelný 6-uholník $ABCDEF$.
7. [Monoszová 1.1.11.] až [Monoszová 1.1.17.] Zbierka úloh z analytickej geometrie. Prvá časť Tu.

Lineárna kombinácia vektorov

1. Daný je pravidelný šesťuholník $ABCDEF$. Vyjadrite vektory
$\overrightarrow{AB} = B - A,\ \overrightarrow{BC} = C - B,\ \overrightarrow{CD} = D - C,\ \overrightarrow{FE} = E - F,\ \overrightarrow{DE} = E - D$
ako lineárne kombinácie vektorov $\boldsymbol{a} = B - A, \boldsymbol{b} = -A$.
2. V rovine je daný šesťuholník, ktorého vrcholy sú určené vzťahmi:
$A,\ A + \boldsymbol{u},\ A + 2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v},\ A + 2\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v},\ A + \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v},\ A + \boldsymbol{v}.$
Dokážte, že tento šesťuholník je súmerný podľa stredu $S = A + u + v$. Zadanie Tu. Riešenie Tu.

3. Nech a, b sú nekolineárne vektory. Určte číslo λ tak, aby vektory $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d} = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ boli kolineárne.
4. Ukážte, že vektor $(3,5)$ je lineárnou kombináciou vektorov $(-2,4),(2,1)$ ale nie je LK vektorov $(-1,2),(2,-4)$.
5. Vyjadrite vektor $(1,3,-1)$ ako LK vektorov $(-1,2,1),(1,0,-1),(1,1,-1)$.
6. Ukážte, že vektory $(-1,2,-1),(0,1,0),(1,-1,1)$ sú lineárne (ne)závislé.
7. Vyjadríte vektor $(1,2,3)$ ako lineárnu kombináciu vektorov $(1,2,-1);(-2,1,0);(0,-3,1)$.
8. Nech vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, , \boldsymbol{v}_3$ sú lineárne nezávislé. Zistite, či vektory $\boldsymbol{u}_1 = 3\cdot\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2 = 2\cdot\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$ sú závislé alebo nezávislé.

Súradnice vektorov v báze, Dimenzia a báza

1. Množina $M = \langle(1,1),(2,3)\rangle$ je báza vektorového priestoru $\mathbb{R}^2$. Určte súradnice vektora $\vec{u}$ vzhľadom k tejto báze, ak poznáte jeho súradnice $\vec{u} = (7,12)$ vzhľadom ku kanonickej báze $\left\langle\overrightarrow{e_1} = (1,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1)\right\rangle$. [Hašek 4.2.]
2. Daný je vektorový priestor $W = [(1,0,2),(2,4,1),(1,2,3)] \subset \mathbb{Z}_5^3$.
   - Zistite, či vektory $\vec{u}, \vec{v}$ so súradnicami v kanonickej báze $\vec{u} = (2,3,3), \vec{v} = (1,2,1)$ patria do obalu $[(1,0,2),(2,4,1),(1,2,3)]$ v obore $\mathbb{Z}_5^3$.
   - Nájdite nejakú bázu B priestoru W a určite jeho dimenziu. Určte súradnice vektora $\vec{x}$, ak $\langle x\rangle_{k.b.} = (3,4,3)$. Priestor W obsahuje trojice prvkov telesa $\mathbb{Z}_5$ zvyškových tried modulo 5.
3. Nech $S = (\vec{a}(-1,1,2),\ \vec{b}(-2,-1,3),\ \vec{c}(0,2,1))$ je báza priestoru $V_3(\mathbb{R})$. Nájdite vektor vo $V_3(\mathbb{R})$, ktorého súradnice vzhľadom k báze S sú $(2,1,-2)$.
4. [Hašek 4.6.1] až [Hašek 4.6.8] Linearni algebra a geometrie. Dostupné Tu.

Skalárny súčin, Vonkajší súčin, Schmidtov ortogonalizačný proces

1. Na priestore $\mathbb{R}^3$ je daný skalárny súčin f, ktorý má vzhľadom ku kanonickej báze analytické vyjadrenie
$$f(x,y) = 3x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$
   Určite normy a odchýlku vektorov $a = (1,2,3)ab = (1,2,1)$
2. ♥ Ukážte, že zobrazenie f v priestore $\mathbb{R}^4$, ktoré má vzhľadom na kanonickú bázu analytický výraz
$$f(x,y) = x_1y_1 + x_1y_4 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_3y_4 + x_4y_1 + 2x_4y_3 + 3x_4y_4$$
   je skalárnym súčinom.
   - Nájdite nejakú ortogonálnu a ortonormálnu bázu priestoru $\mathbb{R}^4$.
   - Zistite, či sú vektory $\vec{x}, \vec{y}$ na seba kolmé:
     $\vec{x} = (1,0,3,-2), \vec{y} = (2,-1,1,2)$.
   - Určte, aký uhol zvierajú vektory $\vec{u}, \vec{v}$:
     $\vec{u} = (2,1,0,1), \vec{v} = (0,3,1,-1)$.
   - Určte ortogonálne doplnky podpriestorov W_1, W_2 v priestore $\mathbb{R}^4$:
     $W_1 = [x], W_2 = [u,v]$.

   Riešenie tejto úlohy vypracujte v TeX vo formáte v šablóne Beamer a odovzdajte ho v časti "Plusové body". Za správne riešenie získate dva plusové body. Akceptujú sa len prvé dve správne riešenia.
3. Vypočítate uhol vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$, ak $\vec{u} = (3,1); \vec{v} = (2,4)$.
4. [Monoszová 2.2.1.] až [Monoszová 2.3.7.] Zbierka úloh z analytickej geometrie. Riešenie MON 2.1.7 Tu.

Metrické vlastnosti vektorov, Cauchy-Schwarzova nerovnosť

1. Vypočítajte veľkosti uhlov a dĺžky strán v trojuholníku ABC, ak .

   $A = [1, -2],\ B = [-3, 3],\ C = [1, 3]$. Riešenie ...
2. Nech $A = [1, 3], B = [-1, 5], \vec{u} = (2, -5), \vec{v} = (-3, 1)$. Rozhodnite, či napísaný objekt je bod alebo vektor a určte jeho súradnice.

   a)$1/2(B - A) - \vec{v}$

   b)$(B - A) - (A + \vec{u})$[

   c)$A + \vec{v} - \vec{u}$
3. [Monoszová 2.1.1.] až [Monoszová 2.1.23.] Zbierka úloh z analytickej geometrie. Dostupné Tu.

Afinný priestor

1. [Monoszová 1.2.1.a] Riešenie alg. Tu; geom. Tu.
2. [Monoszová 1.2.1.b] Riešenie Tu.
3. [Monoszová 1.2.2.a] Riešenie Tu.
4. [Monoszová 1.2.4] Riešenie Tu.
5. [Monoszová 1.2.5.b] Riešenie Tu.
6. [Monoszová 1.2.5.c] Riešenie alg. Tu; geom. Tu.

Lineárna súradnicová sústava

1. Riešte úlohy [Monoszová 1.3.1.] až [Monoszová 1.3.5.].
2. Vypočítajte súradnice bodu $Q = P + (2\vec{u} - \vec{v}) \in A^4$ v afinnej súradnicovej sústave $\langle O; \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4} \rangle$, ak $P = O + (-e_2 + e_4/2); \vec{u} = e_3 - \sqrt{2}e_4; \vec{v} = -3e_1 + e_2 - e_3 - 2e_4$.
3. V rovine danej bodmi $A = [2, 1, 3], B = [2, 4, 0], C = [-3, 0, 4]$ zvoľte afinnú súradnicovú sústavu $\langle A, B - A, C - A \rangle \rangle$. Zistite, aké súradnice má bod M v $\langle O; \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3} \rangle$, ak jeho súradnice v $\langle A, B - A, C - A \rangle \rangle$ sú $[5, 3]$).
4. V rovine je daný trojuholník $\triangle ABC$ a body D, E, F v tomto poradí ako stredy strán BC, CA, AB. Nájdite súradnice vrcholov trojuholníka v afinnej sústave súradníc $\langle F, E - F, D - F \rangle$.
5. V rovine je daný pravidelný šesťuholník $ABCDEF$. Nájdite súradnice vrcholov tohto 6-uholníka v afinnej súradnicovej sústave $\langle A, B - A, C - A \rangle$.

Afinný podpriestor

1. Riešte úlohy [Monoszová 1.4.1.] až [Monoszová 1.4.18.].
2. Zistite, či body $M = [9, -2, 5], N = [4, 1, 6]$ incidujú s podpriestorom $\langle A, \vec{u}, \vec{v} \rangle$ pre $A = [1, 3, 2], \vec{u} = (2, -1, 1), \vec{v} = (1, -1, 0)$.

   Návod: Bod M leží v podpriestore práve vtedy, keď jeho súradnice vyhovujú parametrickému vyjadreniu, t. j.: $M = A + r\vec{u} + s\vec{v}$. Napíšte najskôr parametrické rovnice podpriestoru a dosaďte súradnice bodu M. [Vranková, 3L1].
3. Dokážte, že pre každé $t, u \in R$ množina bodov $[1, 0, 1], [3, 3, 5], [4, 1, 6], [1 + 2t + 3u, 3t + u, 1 + 4t + 5u]$ priestoru R^3 je afinne závislá. Akú dimenziu má jej afinný obal?
4. Určte aspoň jedno parametrické vyjadrenie roviny, ktorá prechádza bodom $N = [-2, 3, 0]$ a obsahuje priamku $p = \{x = 1, y = 2 + t, z = 2 - t\}$.
5. Riešte úlohy z práce (Tisoň, 2011) k téme: Lineárne podpriestory, parametrické a všeobecné vyjadrenia.
6. Vyšetrite vzájomnú polohu danej priamky p a roviny α v A^4, ak: $p : \{x_1 = 1 + t, x_2 = 2 + 2t, x_3 = 3 + 3t, x_4 = 4 + 4t\}$, $\alpha : \{x_1 + x_2 + 1 = 0, x_3 - x_4 = 0\}$. [Vranková, 4L1].

7. Zistite vzájomnú polohu priamky p a roviny α v A^3, ak $p:\{x=1+10t, y=3-2t, z=-2+3t\}$, $\alpha:\{x+2y-2z-11=0\}$.
8. Zistite vzájomnú polohu priamok

   $x=-3t, y=2+3t, z=1$

   $x=1+5t, y=1+13t, z=1+10t$
9. Určte afinné zobrazenie $f:\mathbb{E}_2\to\mathbb{E}_2$ zobrazujúce repér $\mathcal{R}=\left\langle O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right\rangle$:
   - $O=[0,0], \overrightarrow{e_1}=[1,0], \overrightarrow{e_2}=[0,1]$ do $O'=[1,1], \overrightarrow{e_1'}=[0,1], \overrightarrow{e_2'}=[1,0]$.
   - $O=[0,0], \overrightarrow{e_1}=[1,0], \overrightarrow{e_2}=[0,1]$ do $O'=[0,0], \overrightarrow{e_1'}=[-1,0], \overrightarrow{e_2'}=[0,-1$.

   Vo všetkých prípadoch určte množinu samodružných bodov.
10. Afinné zobrazenie $f:\mathbb{E}_2\to\mathbb{E}_2$ je dané transformačnými rovnicami $x'=2x+3y+5, y'=4x-3y-2$. Určte
    - do akých bodov sa zobrazia body [0, 0], [5, 2], [−1, 4]
    - ako sa zobrazia priamky $2x+3y+5=0, 4x-3y-2=0, 2x-6y-7=0$
    - grafickú interpretáciu v GeoGebre a zistite, čo je obrazom súradných osí v rovine, použite model "Repér" Tu

    Návod: najskôr určte obrazy súradného repéru a potom transformačné rovnice.
11. Dané je afinné zobrazenie $f:x'=3x+y-6, y'=x+y+1$. Určite
    - obrazy bodov [0, 3], [1,4], [−1, -1]
    - ktoré body sa zobrazia do bodov [-11, 0], [-7, 2] a [1, 6]
    - ako sa zobrazia priamky $x-y+3=0, x-2y+11=0$

Afinné zobrazenie

1. Určte afinné zobrazenie, pre ktoré sú body priamky $a\equiv 2x+y+1=0$ samodružné a bod [0, 0] sa zobrazí do [−1, −2].
2. Dané je afinné zobrazenie $x'=3x+4y-12, y'=4x-3y+6$. Na priamke $p:7x-2y-24=0$ nájdite bod P, ktorého obraz leží na tej istej priamke. Pomoc: najskôr určte obraz $f:p\to p'$ a potom priesečník (\small P= p\cap p' \). Priamku p' určte aj konštrukčne ako GMB.

Rôzne úlohy

1. Riešte úlohy z :
2.
   - Tisoň, K.: Geometria 1. Materiály pre študentov na FMFI Bratislava, 2011., dostupné Tu.
   - Monoszová, G.: Zbierka úloh z analytickej geometrie, FPF 2008, B. Bystrica. Prvá časť Tu. Druhá časť Tu. Výsledky Tu.
3. Riešte úlohu Monosz_Pr122ab, grafická interpretácia Tu.

Riešené príklady

1. Nájdite maticu afinnej transformácie $f:\mathbb{E}_2\to\mathbb{E}_2$, pričom platí

   $$O=[0,0]\to O'=[1,1]$$
   $$\overrightarrow{e_1}=[1,0]\to\overrightarrow{e_1'}=(0,-1)$$
   $$\overrightarrow{e_2}=[0,1]\to\overrightarrow{e_2'}=(-1,0).$$

   Riešenie.

   Keďže máme obraz repéra, tak môžeme použiť geometrický model "Obraz repéru" Tu, v ktorom nastavíme odpovedajúce hodnoty pre obraz repéra.

   Repér pre dané afinné zobrazenie je $O'=[1,1], \overrightarrow{e_1'}=(0,-1, \overrightarrow{e_2'}=(-1,0)\}$. Transformačné rovnice budú mať analytické vyjadrenie

$$x' = \quad 0 \cdot x - 1 \cdot y + 1 = -y + 1$$
$$y' = -1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 = -x + 1$$

Skúmajme, či táto transformácia má samodružné body. Ak bod $M = [x, y]$ je samodružný, tak musí pre jeho obraz $f(M) = M'[x', y']$ platiť:

$$x' = x, y' = y.$$

Po dosadení do transformačných rovníc dostaneme

$$x = -y + 1, y = -x + 1,$$

čo je **množina bodov = priamka**. Neskôr ukážeme, že transformácia f je zhodné zobrazenie. Preto priamka samodružných bodov $x + y - 1 = 0$ je osou súmernosti.

Geometrická interpretácia - riešenie Tu

2. V rovine je posunutie určené vektorom $\vec{u} = (1, -2)$. V posunutí sa trojuholník KLM so súradnicami $K = [1; 1], L = [4; 3], M = [2; 5]$ zobrazí sa na trojuholník $K'L'M'$ so súradnicami $K' = [2; -1], L' = [5; 1], M' = [3; 3]$.

   a) Narysujte obraz $K'L'M'$ v GeoGebre pomocou nástroja *Posunutie*.

   b) Nájdite analytické vyjadrenie tejto zhodnosti.

   Návod: Poznáme obrazy $O' = [1; -2], K' = [2; -1], M' = [3; 3]$ a ich dosadením spolu so súradnicami $K = [1; 1], M = [2; 5]$ do rovnice

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   dostaneme 4 rovnice o 4 neznámych

$$\begin{aligned} 2 &= a \cdot 1 + c \cdot 1 + 1 \\ -1 &= b \cdot 1 + d \cdot 1 - 2 \\ 3 &= a \cdot 2 + c \cdot 5 + 1 \\ 3 &= b \cdot 2 + d \cdot 5 - 2 \end{aligned}$$

   Riešenie.

   Riešenie sústavy v GeoGebre Tu . Pomoc - otvorte si applet Tu.

Cvičenie.

1. Riešte úlohy zo zbierky Monoszová - časť 4.3, 4.4. a 4.5.
2. Zistite, či posunutie f roviny $\mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2, f(X) = X' = X + \vec{u}$ pre pevne zvolený vektor posunutia $\vec{u}$ je afinné zobrazenie.
3. Určite obraz trojuholníka KLM, kde $K = [-3; 5], L = [-5; 2], M = [1; 3]$ v stredovej súmernosti určené analytickým vyjadrením $\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 8 \end{pmatrix}$. Návod pozri v práci (Ptáčková, 2016, str.64), dostupné Tu.
4. Riešte ďalšie úlohy z práce (Ptáčková, 2016, od str.65).
5. Je daná osová súmernosť osou q, ktorá je určená bodmi $Q_1 = [-2; -3], Q_2 = [4; 3]$ a štvoruholník $KLMN$. Narysujte obraz štvoruholníka obraz $KLMN$ v GeoGebre pomocou nástroja *Osová súmernosť*. Štvoruholník zvoľte tak, aby jeho dve strany pretínali os súmernosti. Určte analytické vyjadrenie tejto osovej súmernosti. Návod analogický ako v predchádzajúcej úlohe alebo zostrojte obrazy $\vec{e}_i$.

< spanclass =" nolink "> \(. \)

Záver

Afinná geometria je disciplínou, ktorá spája teoretické poznatky matematiky so širokými možnosťami ich praktického využitia. V tejto učebnici sme sa zamerali na kľúčové pojmy a princípy, ktoré sú nevyhnutné na pochopenie tejto oblasti, od východiskových konceptov vektorových priestorov a afinných podpriestorov až po aplikácie afinných zobrazení.

Jednou z hlavných predností afinného prístupu je jeho schopnosť univerzálneho použitia. Afinné transformácie nájdu uplatnenie v oblasti geometrie, analýzy, fyziky, informatike a ďalších disciplínach, kde je dôležité popísať a analyzovať geometrické útvary a ich vzájomné vzťahy. Napríklad v informatike tvoria afinné zobrazenia teoretický základ pre spracovanie obrazu, počítačové grafiky a simulácie. Vo fyzike sa týmto zobrazeniam pripisuje dôležitá úloha pri štúdiu mechaniky alebo teórie relativity.
Dôraz, ktorý sme kládli na prepojenie teórie a praktických aplikácií, odráža potreby moderného vzdelávania, ktoré kombinuje matematickú presnosť s kreativitou a schopnosťou riešiť reálne problémy. Prostredníctvom tejto učebnice sme chceli študentom nielen odovzdať vedomosti, ale aj ich motivovať k hlbšiemu štúdiu a experimentovaniu.

Na záver treba zdôrazniť, že afinná geometria je len jednou z kľúčových oblastí geometrie. Jej pochopenie otvára dvere k štúdiu pokročilejších konceptov, ako sú projektívna geometria, diferenciálna geometria alebo algebraická topológia. Okrem toho afinná geometria podporuje rozvoj kritického myslenia a schopnosť pracovať s abstraktnými modelmi, čo je nevyhnutné v mnohých odboroch vedy a techniky.

Veríme, že táto učebnica poskytne študentom pevný teoretický základ a prínosné nástroje pre ich akademický aj profesionálny rast. Rovnako dúfame, že bude slúžiť ako hodnotný zdroj poznatkov, ktoré študenti zužitkujú pri riešení praktických úloh a pri svojom ďalšom napredovaní v štúdiu matematiky a príbuzných disciplín.
Ďakujeme, že ste siahli po tejto učebnici, a prajeme veľa úspechov vo vašom štúdiu.

Literatúra

Doporučená literatúra

1. [DEC] Descartes, R. (1954). The geometry of René Descartes (D. E. Smith & M. L. Latham, Trans.). Dover Publications. (Pôvodné dielo publikované 1637). Dostupné Tu.
2. [DRA] Drančáková, M. (2021). SageMath pre leteckých inžinierov. Technical University of Košice, Faculty of Aeronautics mastersthesis. Dostupné Tu.
3. [BRA] Brajerčík, J., Demko, M. (2018). Matematika pre študentov prírodovedných odborov. Kapitoly 5 a 6. Univerzitná knižnica Prešov. Dostupné Tu. ...
4. [CIZ] Čižmár, J. (2007). O význame základného poľa v geometrii. In: Matematika v proměnách věků. V. Praha: Matfyzpress. 978-80-7378-017-3, pp. 83-96. Dostupné Tu
5. [BEL] Belan. A. (2000). Skriptá - preklad. Dostupné Tu.
6. [DUP] Duplák, J. (2004). Afinná a Euklidovská geometria. PU v Prešove, FHPV Katedra matematiky Prešov. Dostupné Tu ...
7. [HAN] Hanzel, P. (2023). Rozšírené matice. Prezentácia. FPV UMB B. Bystrica. Dostupné Tu.
8. [HASa] Hašek, R. (2020). Linearni algebra a geometrie. Pedagogická fakulta JU, Č. Budějovice. Dostupné Tu.
9. [HASb] Hašek, R. (2019). Planimetrie - afinné zobrazení. Pedagogická fakulta JU, Č. Budějovice. Dostupné Tu.
10. [HAV] Haviar, M. (2000). Algebra III. Lineárna algebra. Pedagogická fakulta UMB, skriptá. Dostupné Tu.
11. [HEJ] Hejný, M., Zaťko, V., Kršňák, P. (1985). Geometria 1. SPN, Bratislava.
12. [HLI] Hlinená, D. (2020). Lineárne transformácie. FEKT VUT Brno. Prenášky 7 až 10. Dostupné Tu.
13. [CHA] Chalmovianska, J. (2015).Afinný priestor. FMFI UK Bratislava. Dostupné Tu.
14. [CHP] Chalmoviansky, P. (2010). Geometria afinných zobrazení euklidovských priestorov. Dostupné Tu.
15. [KON] Končel, J. (2011). Využití internetu ve výuce analytické geometrie na střední škole. Diplomová práca. Univerzita Karlova v Praze. Dostupné Tu.
16. [KOT] Kontrová, L., Stachová, D. (2011). Matematický kufrík, ŽU Žilina, KEGA 046 ŽU – 4/2011. Dostupné Tu. Nastavte si kapitolu 3.
17. [KRS] Kršňák, P. (1975). Analytická geometria. PF Banská Bystrrica.
18. [MONa] Monoszová, G. (2010). Analytická geometria 1 - Kapitola I, Afinný priestor. FPV UMB B. Bystrica. Dostupné Tu.
19. [MONb] Monoszová, G. (2011). Analytická geometria 1 - Kapitola II, Euklidovský priestor. FPV UMB B. Bystrica. Dostupné Tu.
20. [MONc] Monoszová, G. (2012). Analytická geometria 2 - Kapitola III. FPV UMB B. Bystrica. Dostupné Tu.
21. [MOZa] Monoszová, G. (2012). Analytická geometria - Zbierka I. FPV UMB B. Bystrica. Dostupné Tu.
22. [Mou] Mouleová, B. (2021). Bakalárska práca. Symetrické matice. ZČU Plzeň 2021.
23. [OLS] Olšák, P. (2007). Lineární algebra. Praha, 2000-2007. Dostupné Tu.
24. [PTA] Ptáčková, T. (2016). Analytická reprezentace shodných zobrazení na středních školách. Diplomová práca MFF UK Praha. Dostupné Tu.
25. [TIS] Tisoň, K. (2011). Geometria 1. Materiály pre študentov na FMFI Bratislava. Dostupné Tu.
26. [VEL] Velichová, D. (2012). Geometria 1. Elektronocká vysokoškolská učebnica, STU, Bratislava. Dostupné Tu.
27. [VOD] Vodičková, V. (2010). Aplikácie vektorového súčinu. Dostupné Tu.
28. [VRA] Vranková, E. (20..). Geometria 2 – Analytická geometria lineárnych útvarov. Trnavská univerzita v Trnave. ISBN 978-80-8082-681-9. Dostupné Tu.
29. [ZLA] Zlatoš, P. (2011). Lineárna algebra a geometria. Marenčin PT, Bratislava 2011. ISBN 9788081141119. Dostupné Tu.

Zbierky.

1. [MOZ] Monoszová, G.: Zbierka úloh z analytickej geometrie, FPF 2008, B. Bystrica. Prvá časť Tu. Druhá časť Tu. Výsledky Tu.
2. [PRI Priklady.com - zbierka úloh s výsledkami. Kapitola - analyticka-geometria. Dostupné Tu.
3. [SLE] Sleziak: Vektorový priestor. Prezentácia Tu.
4. [SBI] Sbírka řešených úloh na Katedře didaktiky fyziky Matematicko-fyzikální fakulty UK. Dostupné: 1. časť Tu; 2. časť Tu.

Softvér.

1. [MAT] Matrix calculator, dostupné Tu.
2. [ROV] Kalkulačka rovníc, systémov a nerovníc, dostupné Tu.

Doplňujúce poznámky

Hermann Grassmann a jeho dielo "Die Lineale Ausdehnungslehre".


1878. 296.

Die Ausdehnungslehre von 1844

oder

Die lineale Ausdehnungslehre

ein

neuer Zweig der Mathematik

dargestellt

und

durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik,

wie auch

auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert

von

Hermann Grassmann.

Zweite, im Text unveränderte Auflage.

Mit 1 Tafel.

Leipzig

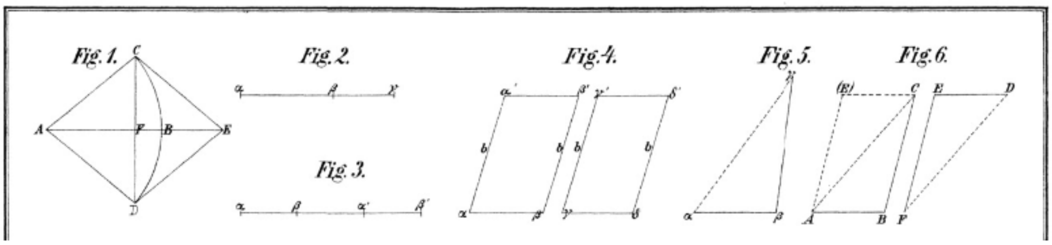
Verlag von Otto Wigand.

1878.

Teória expanzie z roku 1844 alebo lineárna teória expanzie. Otvorte Tu.

§ 15. Veľkosť expanzie

1. Ak si predstavíme, že nepretržité vytváranie úsečky bolo uprostred svojho priebehu prerušené, aby potom bolo znovu pokračované, objaví sa celá úsečka ako spojenie dvoch úsečiek, ktoré sa neprerušene spájajú a z ktorých jedna predstavuje pokračovanie druhej. Obidve úsečky, ktorých prvky tvoria toto spojenie, sú v rovnakom zmysle vytvorené (§ 8) a výsledkom spojenia je úsečka od počiatočného bodu prvej až po koncový bod druhej, pričom obidve časti sú na seba priložené tak, ako je to znázornené, takže koncový bod prvej slúži zároveň ako počiatočný bod pre druhú.
2. Označme predbežne úsečku od počiatočného bodu α (obr. 2) po koncový bod β ako $[\alpha\beta]$, a potom $[\alpha\gamma]$ a $[\gamma\beta]$ vytvorené v rovnakom zmysle, takže platí $[\alpha\beta]$ ako výsledok vyššie zobrazeného spojenia, pričom $[\alpha\gamma]$ a $[\gamma\beta]$ sú prvkami **tohto** spojenia. Už sme ukázali (§ 8), že toto spojenie, rovnako ako spájanie v rovnakom zmysle vytvorených veličín, predstavuje sčítanie, teda príslušné analytické pravidlo sa...



Ilustrácie H. Gassmann

§ 47. Vonkajšie násobenie

3. Samozrejme, pre túto vec musí byť preukázaná platnosť zákonov o sčítaní, aby takéto spojenie mohlo byť definované ako sčítanie. Je teda jasné, že ak vôbec existuje sčítanie nerovnakých rozmerových veličín vyšších stupňov, musí existovať tento zákon:

   $$A \cdot b + A \cdot c = A \cdot (b + c),$$

   kde b a c predstavujú úsečky.
4. Ak by sme už teraz označili toto spojenie za sčítanie, aby sme získali pohodlnejší výraz, mohli by sme formulovať túto definíciu:

   Dve vonkajšie produkty n-teho stupňa, ktoré majú spoločný faktor $(n-1)$-teho stupňa, sa sčítajú tak, že sa najskôr sčítajú ich jednotlivé faktory a k tomuto súčtu sa pripočíta spoločný faktor rovnakým spôsobom, akým bol pripojený k jednotlivým úsekom.