

Kvantová, atómová a subatómová fyzika

RIEŠENIE DOMÁCEJ ÚLOHY 5

1. Najskôr sa pozrieme na klasický oscilátor. Ten má mať energiu odpovedajúcu základnému stavu, teda $E = \frac{\hbar\omega}{2}$. V maximálnej výchylke potom bude celá energia uložená v potenciálnej energii pružinky, a preto môžeme písať

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \\ \frac{1}{2}\hbar\omega &= \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \\ x &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\end{aligned}$$

Tento výraz odpovedá parametru x_0 . Pravdepodobnosť, že sa bude častica v kvantovom oscilátore nachádzať vo väčšej výchylke, ako x_0 , je potom daná vzťahom

$$P = \int_{-\infty}^{-x_0} |\Psi(x)|^2 dx + \int_{x_0}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx \quad (1)$$

Keďže vieme, že stacionárne stavy oscilátora sú vždy párne alebo nepárne, znamená to, že hustota pravdepodobnosti je vždy symetrická. To znamená, že oba integrály nám dajú rovnaký výsledok, a tak nám stačí spočítať jeden z nich.

$$\begin{aligned}P &= 2 \int_{x_0}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 2 \int_{x_0}^{\infty} (\pi x_0^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) dx = \left| x/x_0 = u, dx = x_0 du \right| = 2x_0 (\pi x_0^2)^{-1/2} \int_1^{\infty} \exp(-u^2) du = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 0.139 = 0.157 = 15.7\%\end{aligned}$$

2. V stave $n_x = n_y = n_z = 1$ je energia kvantového LHO daná vzťahom

$$E = \hbar\omega \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) = \frac{9}{2}\hbar\omega = 9\hbar\pi f = 186 \text{ meV} \quad (2)$$

Pre amplitúdu kmitov klasického oscilátora platí rovnaký vzťah ako v predchádzajúcom príklade

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \\ \frac{9}{2}\hbar\omega &= \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \\ x &= \sqrt{\frac{9\hbar}{m\omega}} = 12.8 \text{ pm}\end{aligned}$$

Nakoniec, celková energia sa dá vyjadriť cez teplotu pomocou vzťahu pre strednú energiu častice pohybujúcej sa v troch rozmeroch:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}k_B T &= \frac{9}{2}\hbar\omega \\ T &= \frac{3\hbar\omega}{k_B} = 1440 \text{ K}\end{aligned}$$

3. V tomto príklade stačí dosadiť n do vzorca:

$$\begin{aligned}H_0(x) &= \exp(x^2) \exp(-x^2) = 1 \\ H_1(x) &= -\exp(x^2) \frac{d}{dx} \exp(-x^2) = -\exp(x^2) (-2x \exp(-x^2)) = 2x \\ H_2(x) &= \exp(x^2) \frac{d^2}{dx^2} \exp(-x^2) = \exp(x^2) (4x^2 - 2) \exp(-x^2) = 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= -\exp(x^2) \frac{d^3}{dx^3} \exp(-x^2) = -\exp(x^2) (12x - 8x^3) \exp(-x^2) = 8x^3 - 12x\end{aligned}$$

4. Pre pravdepodobnosť prechodu sme si odvodili vzťah

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1 + \frac{U^2}{4E(U-E)} \sinh^2(\kappa d)} \quad (3)$$

kde $\kappa = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}$. Po dosadení hodnôt $E = 4.2 \text{ MeV}$, $U = 7 \text{ MeV}$, $d = 0.6 \text{ fm}$ a $m = 3.73 \text{ GeV}/c^2$ dostávame

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1 + 1.04 \sinh^2 0.439} = 0.824 = 82.4\%. \quad (4)$$

Cez takúto bariéru prejde viac ako 80% častíc.