# KOMBINATORIKA

Predkladaný učebný text v značnej miere vychádza zo skrípt významného slovenské matematika prof. RNDr. Štefana Známa, DrSc.[[1]](#footnote-1) Nami upravený učebný text je venovaný rozšíreniu poznatkov čitateľa z kombinatoriky, s ktorými sa stretol pri štúdiu na stredných školách. Odkloníme sa však od obvyklého stredoškolského postupu v kombinatorike, pretože sa budeme zaoberať nielen počtom skupín s určitou vlastnosťou, ale aj algoritmom na hľadanie všetkých skupín určitého druhu. Je to motivovane bohatstvom aplikácii kombinatoriky v súčasnej praxi, pričom finálny výsledok sa spravidla nájde pomocou PC techniky.

Kombinatorika je obor matematiky, ktorý sa zaoberá skupinami prvkov množín s definovanou vnútornou štruktúrou. Skupiny prvkov vo všeobecnosti rozdelíme do štyroch základných tried.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| V danej skupine | ***Nezáleží na poradí prvkov*** | ***Záleží na poradí prvkov*** |
| ***Prvky sa neopakujú*** | **Kombinácie** bez opakovania | **Variácie** bez opakovania |
| ***Prvky sa môžu opakovať*** | **Kombinácie** s opakovaním | **Variácie** s opakovaním |

***Poradie***: V prípade, že záleží na poradí prvkov, hovoríme o usporiadaných skupinách - variáciách. Ak na poradí nezáleží, hovoríme o neusporiadaných skupinách - kombináciách.

***Opakovanie***: V prípade, že každý prvok sa vyskytuje najviac jedenkrát hovoríme o skupinách bez opakovania. Ak sa môže ľubovoľný prvok vyskytnúť viac krát, hovoríme o skupinách s opakovaním.

## Kombinácie bez opakovania

Ak je prirodzene číslo, symbolom označujeme akúkoľvek - prvkovú množinu. Pretože vlastnosti prvkov množiny nemajú v ďalšom nijakú úlohu, spravidla budeme predpokladať, že prvkami množiny sú čísla (niekedy to zase budú písmená ) . V ďalšom budeme symbolom označuje akúkoľvek - prvkovú množinu .

***Definícia*** 1. Každú podmnožinu množiny nazývame kombináciou množiny Ak pozostáva z r prvkov, tak ju nazývame r-kombináciou.

Pri tvorení kombinácií nezáleží na poradí prvkov! Napríklad trojice 123 a 321 predstavujú tú istú kombináciu. Prvky v kombinácii obyčajne usporadúvame v tom poradí ako v základnej množine .

**Príklad 1**. Nájdite všetky kombinácie množiny .

Riešenie.

* Zrejme, každá množina má jedinú - kombináciu (je ňou prázdna množina ).
* Podľa definície - kombinácie sú všetky jednoprvkové podmnožiny množiny . Sú to množiny: . Pre kombinácie nepoužívame tento množinový zápis, ale ich píšeme jednoducho: . ***Ich počet je 5***.
* 2 - kombinácie utvoríme tak, že ku každej 1 - kombinácii pripojíme vpravo po jednom všetky prvky, ktoré sa v množine nachádzajú vpravo od . Dostaneme tieto 2 -kombinácie: 12, 13, 14, 15, 23, 24, 2?, 34, 35, 45. ***Ich počet je 10***.
* Obdobne získame všetky 3 – kombinácie. Ku každej 2 - kombinácii pripojíme po jednom každý prvok, ktorý leží v vpravo od (ak taký prvok existuje) . Dostaneme tieto 3 - kombinácie: 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345. ***Ich počet je 10***.
* Podobne postupujeme pri tvorbe 4 - kombinácií (je ich 5 a sú to 1234, 1235, 1245, 1345, 2345) a jedinej 5 - kombinácii 12345.
* Zrejme, množina nemá nijakú 6 - kombináciu.

Počet všetkých kombinácií množiny budeme označovať alebo a nazývame kombinačným číslom alebo tiež binornickým koeficientom. Zovšeobecnením niektorých vyššie uvedených úvah dostaneme nasledujúcu vetu (dôkaz prenechávame na čitateľa).

**Veta** 1. Pre ľubovoľné prirodzené číslo platí

**,** .

**Ak , tak .**

V ďalšom budeme predpokladať, že čísla a vyhovujú nerovnostiam .

***Definícia*** 2. Kombinácie a množiny sa nazývajú navzájom doplnková ak platí: .

**Veta** 2. Počet - kombinácií množiny sa rovná počtu jej – kombinácií:

.

*Dôkaz.* Označme resp. ) množinu všetkých - kombinácií resp. - kombinácií množiny . Skonštruujme zobrazenie na­sledovne: ak , tak nech jeho obrazom je doplnková kombinácia ku . Zrejme zobrazenie je bijekcia, preto množiny a majú rovnaký počet prvkov. Tým je dôkaz ukončený.

**Veta** 3. Nech je pevný prvok množiny . Ak , tak počet tých - kom­binácií množiny ,

ktoré prvok obsahujú sa rovná a počet tých, ktoré prvok neobsahujú sa

rovná .

*Dôkaz*. Ak prvok odstránime zo všetkých - kombinácií (ktoré ho obsahujú), dostaneme práve všetky - kombinácie množiny , ktorých po­čet je (podľa definície 1) rovný . Ďalej, ak nejaká - kombinácia množiny neobsahuje prvok , je vlastne - kombináciou množiny (počet týchto je ) . Tým je dôkaz ukončený.



Dôsledok. Ak , tak platí .

Posledná rovnosť je vlastne rekurentným vzťahom, v ktorom počet - kombinácií množiny je vyjadrený pomocou počtu kombinácií množiny . Toto nás privádza k myšlienke pokúsiť sa o explicitné vyjadrenie kombinačných čísel .

Aby sme zjednodušili vyjadrenie, zavedieme jeden symbol. Znakom označujeme súčin prvých prirodzených čísel: Teda je prirodzené číslo, ktoré nazývame **- faktoriál**. Symbol 0! kladieme definitoricky rovný 1.

**Veta** 4. Pre kombinačné číslo platí vzťah

*Dôkaz*. Pre pravdivosť tvrdenia vyplýva z vety 1.

Predpokladajme, že platí . Budeme dokazovať indukciou vzhľadom na číslo . Overenie pravdivosti tvrdenia v prípade prenechávame na čitateľa.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre . Dokážeme, že potom platí aj pre

. Na základe vety 2 a indukčného predpokladu bude platiť:

Všimnime si, že zaujímavý fakt: je celé číslo pre ľubovoľné .

**Príklad 2.** Nájdite .

Riešenie. Z vety 4 dostávame:



Pri výpočte nemusíme vždy takto rozpisovať, lebo vopred vidíme, čo sa tam vykráti (v našom príklade to bolo 8!). Krátenie možno vykonať vlastne už vo všeobecnom vzorci, potom bude platiť

Pri numerických výpočtoch využiť rovnosť z vety 2. Napríklad namiesto budeme počítať , čo sa podľa posledného vzorca rovná



S kombinačnými číslami sa stretávanie často aj v praktických úlohách. Pre väčšie hodnoty a ich dnes určujeme pomocou počítačov, ale pre malé hodnoty ich ľahko určíme pomocou nasledujúcej schémy, ktorá sa nazýva ***Pascalov troju­holník***



Zrejme, všetky čísla na "odvesnách" Pascalovho trojuholníka sú rovné 1 (pozri vetu 1) a každé číslo "vo vnútri" Pascalovho trojuholníka sa rovná súčtu dvoch čísel, ktoré sa nachádzajú nad ním vpravo a vľavo. Čísla v  riadku teda ľahko možno určiť, ak po­známe čísla riadku v Pascalovom trojuholníku.

Uvedieme len prvých 5 riadkov:



**Príklad** 3. Na majstrovstvách sveta v krasokorčuľovaní má ísť výprava pozostávajúca zo 4 pretekárov, 2 trénerov, 1 lekára, 2 masérov a 2 funkcio­nárov. K dispozícii je 5 pretekárov, 3 tréneri, 2 lekári, 4 maséri a 5 funk­cionárov. Koľkými spôsobmi možno výpravu zostaviť ?

Riešenie.

Z 5 pretekárov možno vybrať štyroch spôsobmi. Ku každému výberu pretekárov možno vybrať dvoch z troch trénerov spôsobmi (neberieme tu do úvahy prípadný súvis medzi trénermi a pretekármi), teda trénerov a prete­károv možno vybrať celkove

spôsobmi. Pokračujúc v tejto úvahe dôj­deme k záveru, že výpravu možno vybrať celkove

spôsobmi (kombinačné čísla sme našli v uvedenej časti Pascalovho trojuholníka).

**Cvičenia**

1. Koľko rôznych súčinov možno utvoriť z čísel 1, 2, 3, 5, 7, ak sa v jednom súčine činitele neopakujú?
2. V priestore máme 7 rovín, z ktorých sú tri navzájom rovnobežné a štyri prechádzajú jednou priamkou. Koľko priesečníc vytvoria?
3. Šiesti hráči hrajú turnaj štvorhier tenisu systémom každá dvojica s kaž­dou dvojicou (každý hráč utvorí dvojicu s každým zo zostávajúcich). Koľko zápa­sov sa zohrá?
4. Koľko je takých tipov v Športke, ktoré obsahujú číslo 1? Koľko je takých tipov, ktoré obsahujú dvojicu čísel 1, 2 ?
5. Koľko r-kombinácií množiny obsahuje dva pevne zvolené prvky ?
6. Ukážte, že postupom uvedeným v príklade 1 nájdeme všetky r-kombinácie množiny .
7. Dokážte vetu 1.
8. Ukážte, že zobrazenie definované v dôkaze vety 2, je bijekcia.
9. Dokážte dôsledok vety 3.
10. Vypočítajte pre .
11. Rozšírte Pascalov trojuholník po 10. riadok.

## Princíp zapojenia a vypojenia

Čitateľovi sú známe vzorce pre mocniny dvojčlena ak resp. pre . Pre umocňovanie s vyšším exponentom vzorce odvodíme pomocou tzv. ***binomickej vety***, ktorú teraz dokážeme.

**Veta** 5. ***Binomická veta***. Nech sú ľubovoľné reálne čísla a nech je prirodzené číslo, potom

Pre resp. dostaneme známe vzorce:

*Dôkaz vety 5.*

Pri dôkaze binomickej vety vychádzame z toho, že v súčine

člen dostaneme tak, že z dvojčlenov vyberieme reálne číslo a potom

 reálne číslo . To je možné práve spôsobmi, čím je dôkaz ukončený**.** Dôkaz binomickej vety môžeme urobiť aj pomocou úplnej matematickej indukcie.

Poznámky

1. V binomickej vete sa objavujú kombinačné čísla. Preto ich niekedy nazývame ***binomické koeficienty***.
2. Ak v binomickej vete položíme , dostaneme dôležitú identitu

***Počet všetkých kombinácií (podmnožín) množiny sa rovná*** .

1. Inú závažnú identitu dostaneme, ak v binomickej vete kladieme

Vychádzajúc z poslednej identity odvodíme jednu zo základných kombinatorických metód, tzv. *princíp zapojenia a vypojenia*.

Majme daných objektov a vlastností (označme ich ), kde a sú prirodzené čísla. Označme () počet tých objektov, ktoré ***majú vlastnosť*** . Označme počet tých objektov, ktoré majú súčasne aj vlastnosť aj vlastnosť (). Označme počet tých objektov, ktoré majú súčasne tri vlastnosti atď. Konečne, znakom označme počet tých objektov, ktoré nemajú ani jednu z daných vlastností.

**Príklad** 4. Písomnú prácu z matematiky písalo 35 študentov. Písomka obsahovala tri úlohy A, B, C.

Vieme, že

* Úlohu A vyriešilo 22 študentov, úlohu B vyriešilo 26 študentov, úlohu C vyriešilo 23 študentov.
* Úlohu A aj úlohu B vyriešilo 16 študentov, úlohu A aj úlohu C vyriešilo 14 študentov, úlohu B aj úlohu C vyriešilo 17 študentov.
* Všetky úlohy vyriešilo 10 študentov.

Zistite koľko študentov nevyriešilo ani jednu úlohu?

Riešenie.

Typické stredoškolské riešenie využíva grafickú schému - ***Vennov diagram***, pomocou ktorého sa graficky vyjadruje príslušnosť prvkov k množine. V našom prípade to bude Vennov diagram pre tri množiny



V diagrame postupne zapisujeme hodnoty

* 10
* 6 = 16 - 10, 4 = 14 - 10, 7 = 17 – 10
* 2 = 22 – (16 + 14) + 10, 3 = 26 – (16 + 17) + 10, 2 = 23 – (14 + 17) + 10
* 1 = 35 **-** (22 + 26 + 23) **+** (16 + 14 + 17) **–** 10 = 35 – 71 + 47

Všimnime si, že znamienka pri zátvorkách (vrátane posledného sčítanca sa striedajú. Môžeme ich určiť pomocou mocniny , kde .

**Veta** 6**.** ***Princíp zapojenia a vypojenia****.* Pre vyššie opísané symboly platí identita

*Dôkaz vety* 6.

1. Objekt, ktorý nemá ani jednu z vlastností prispieva jednotkou k číslu aj k číslu , ale vo zvyšných sčítancoch na pravej strane sa nevyskytuje.
2. Ak nejaký objekt má vlastností, kde , potom prispieva
	* jednotkou k číslu
	* jednotkami k sume (lebo prispieva jednotkou k sčítancom)
	* jednotkami k sume (Z vlastností daného objektu možno vybrať dvojíc, preto objekt prispieva k sume jednotkami), atď.

Teda objekt s vlastnosťami prispieva k pravej strane rovnosti hodnotou

Podľa poznámky 3 vieme, že táto hodnota (*striedavé sčítanie a odčítanie kombinačných čísel* ) ***je rovná nule***.

1. Preto celkový príspevok objektu s aspoň jednou vlastnosťou k obidvom stranám rovnosti vo vete 6 je rovný nule.

Tým je dôkaz ukončený.

Teraz môžeme riešenie príkladu 4 vyjadriť takto:

**Príklad** 4.

Zistite počet tých prirodzených čísel neprevyšujúcich 210, ktoré sú nesúdeliteľné s číslom 210.

*Riešenie.*

Kanonický rozklad čísla 210 je 2 . 3 .5 . 7. Teda každé číslo súdeliteľné s číslom 210 musí byť deliteľné aspoň jedným z prvočísel 2, 3, 5, 7. Objektmi tu budú prirodzené čísla a budeme hovoriť, že číslo má vlastnosť (resp. resp. resp. ), ak je deliteľné dvoma (resp. tromi, resp. piatimi, resp. siedmimi).

1. Dvoma je deliteľné každé druhé číslo, preto existuje 105 čísel deliteľných dvoma a nepresahujúcich 210, preto čiže .
2. Ďalej do 210 existuje 70 čísel deliteľných tromi, čiže .
3. Podobne dostaneme, že , .

Je známym faktom z teórie čísel, že nejaké číslo je deliteľné súčasne ne­jakými prvočíslami práve vtedy, keď je deliteľné ich súčinom. Pomocou tohto faktu už ľahko odvodíme, že

Z vety 6 dostaneme

.

Poznámka

Tento výpočet je trochu zdĺhavý. V teórii čísel na výpočet počtu čísel nesúdeliteľných s daným číslom a menších od neho existuje tzv. Eulerova funkcia[[2]](#footnote-2). Nech pre kanonický rozklad čísla platí (kde sú navzájom rôzne prvočísla, prirodzené čísla), potom pre počet čísel menších ako a nesúdeliteľných s ním platí

Táto funkcia sa nazýva Eulerova funkcia. Ľahko si možno overiť, že pri riešení príkladu 4 sme dostali správny výsledok. Podľa vyššie uvedeného vzorca dostaneme:

.

**Cvičenia**

1. V dvoch triedach je 50 žiakov. Z nich 20 hrá futbal, 18 volejbal, 15 basketbal.
Pritom 12 žiakov hrá súčasne futbal a volejbal, 12 súčasne futbal a basketbal,
8 súčasne volejbal a basketbal a konečne len 6 žiakov pestuje súčasne všetky
tri športy. Zistite, koľko je v triede takých žiakov, ktorí nepestujú ani jeden šport.
2. Zistite počet čísel nepresahujúcich 360 a nesudeliteľných s nim.
3. Zistite, koľko existuje v Športke takých ťahov, ktoré neobsahujú ani jedno z čísel 1, 2, 3.
4. Zistite, koľko existuje v Športke takých ťahov, že obsahujú aspoň jed­no z čísel 47, 48, 49.
5. Koľko existuje takých kombinácií 6 prvkovej množiny, že obsahujú aspoň jedno z troch pevne zvolených prvkov?

## Partície

Teória partícií predstavuje jednu z najpozoruhodnejších častí klasickej kombi­natoriky. V tomto odseku ukážeme len niekoľko zaujímavých výsledkov.

***Definícia*** 3. Partíciou prirodzeného čísla nazývame vyjadrenie čísla v tvare súčtu prirodzených čísel: .

Obyčajne sa pri štúdiu partícií rozlišujú dva prípady:

* partície, v ktorých záleží na poradí sčítancov , napríklad dve partície čísla 6 budeme považovať za ***rôzne***,
* partície, v ktorých nezáleží na poradí sčítancov - partície **,** budeme považovať ***totožné***.
1. Najprv sa budeme prvým prípadom.

Nech dve partície líšiace sa len poradím sčítancov považujeme za rôzne. Označme počet všetkých takýchto partícií čísla pozostávajúcich z presne sčítancov () symbolom . V ďalšom sa budeme snažiť určiť číslo .

Nakreslime na priamke vedľa seba *n* bodov. Medzi nimi máme medzier a zvoľme z nich medzier. Táto voľba sa dá zrejme uskutočniť spôsobmi. Vložme do nich zvislé čiarky. Napr.: Rozdeliť číslo 6 na 4 časti znamená zvoliť 3 medzery z 5.



Tým sa pôvodných bodov rozdelí na častí, pričom rôznym voľbám medzier zodpovedajú rôzne rozdelenia (aspoň čo do poradia ), čiže partícií čísla načastí. Dokázali sme vlastne vetu:

**Veta** 7**. *Počet partícií*** (navzájom rôznych aspoň poradím) čísla na častí sa rovná

**Príklad** 5. Číslo 6 má partícií z troch sčítan­cov. Sú to partície:

Teraz už ľahko určíme počet všetkých rôznych (aspoň) poradím partícií čísla ; ak si to číslo označíme , tak zrejme platí

Použitím vety 7 a identity potom dostávame:

1. Preskúmajme teraz partície, v ktorých ***nezáleží na poradí sčítancov*** .

Označme počet takýchto partícií čísla z sčítancov symbolom . Nech je nejaká partícia čísla na častí. Priraďme k nej partíciu čísla . Tak sa každej partícii čísla na častí priradí nejaká partícia čísla na alebo menej častí (pretože číslo sa môže rovnať aj nule). Zrejme platí tvrdenie:

Dvom partíciám čísla , ktoré sa navzájom líšia nielen poradím, prislú­chajú rôzne partície čísla .

To znamená, že počet partícií čísla na časti sa rovná súčtu partícií čísla na alebo menej častí. Teda

Keďže pre každé je , tak pomocou rekurentného vzťahu možno vypočítať hodnotu pre ľubovoľné prirodzené čísla a , .

**Príklad** 6. Vypočítajte .

*Riešenie.*

Najskôr určíme čísla pre. Ľahko však zistíme, že , , . Potom . Sú to partície .

Pomocou rekurentného vzťahu môžeme postupne určovať hodnoty . Uvedieme hodnoty pre formou tabuľky. Napríklad číslo nájdime v priesečníku piateho stĺpca a tretieho riadku.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 |  | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 3 |  |  | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| 4 |  |  |  | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 |
| 5 |  |  |  |  | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 |
| 6 |  |  |  |  |  | 1 | 1 | 2 | 2 | 5 |
| 7 |  |  |  |  |  |  | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 8 |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 1 | 2 |
| 9 |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 1 |
| 10 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 |

Ak znakom označíme počet všetkých takýchto partícií čísla (odhliadame od poradia), tak dostaneme

Teda možno vyjadriť tak, že sčítame všetky prvky v tom stĺpci predchá­dzajúcej tabuľky.

Napríklad

 - súčet prvých 3 prvkov 3. stĺpca vyššie uvedenej tabuľky

 - súčet prvých 5 prvkov 7. stĺpca vyššie uvedenej tabuľky

## Kombinácie s opakovaním

Nech je množina kategórií (druhov, prvkov). Vytvorme **-tice** z týchto prvkov, v ktorých nezáleží na poradí ale prvky (druhy) sa môžu opakovať. Zrejme môže nastať aj prípad .

**Príklad** 7. V obchode predávajú tri druhy mlieka: odtučnené , polotučné a tučné v litrovom balení. Vypíšte všetky možnosti pri nákupe 2 resp. 3 litrov mlieka.

*Riešenie.*

Pri nákupe

* ***dvoch litrov*** máme **6** možností
* ***troch litrov*** dostaneme **10** možností

***Definícia*** 4. **-*kombinácie s opakovaním*** definujeme ako -tice prvkov z druhov , v ktorých nezáleží na poradí ale prvky (druhy) sa môžu opakovať. Počet všetkých -kombinácií s opakovaním z prvkov budeme označovať symbolom .

Kombinácia s opakovaním bude ľubovoľná (neusporiadaná) -tica prvkov z množiny . Výber -tice predpokladá, že prvkov každého druhu je dostatočne veľa, teda aspoň .

Pri určovaní počtu všetkých -kombinácií s opakovaním z prvkov budeme využívať výsledky, ktoré sme odvodili pri partíciách.

Nech označuje počet výskytu prvku v -kombinácií s opakovaním. Potom zrejme musí platiť rovnosť

**.**

Ak k obidvom stranám tejto rovnosti pripočítame číslo , tak po menšej úprave dostaneme rovnosť

**,**

kde = +1 pre . Na poslednú rovnosť sa môžeme pozerať ako na rozdelenie čísla na častí alebo ako na partície (navzájom rôznych aspoň poradím) čísla na častí. Podľa vety 7 počet takýchto partícií je rovný číslu

**.**

Takýmto spôsobom sme dokázali nasledujúcu vetu.

**Veta** 8**.** Pre počet-kombinácií s opakovaním z prvkovplatí vzťah

**.**

Uvedieme iný spôsob dôkazu vety 8, ktorý uvádza Knor[[3]](#footnote-3).

Predstavme si, že už ***máme vybraných prvkov a uložili sme ich do radu***. Keďže v kombináciách nezáleží na poradí (výbery a sú rovnaké), tak môžeme predpokladať, že ak prvky prvého druhu sú medzi vybranými prvkami, tak budú na začiatku radu. Potom budú nasledovať prvky druhého druhu ak sú medzi vybranými prvkami. Na koniec uložíme prvky - teho druhu ak sú medzi vybranými prvkami. Aby sme tieto prvky rozlíšili, tak medzi prvky rôznych druhov vložme nejaké zvláštne objekty, "oddeľovače", ktorých zrejme použijeme . Napríklad  ... predstavuje kombináciu s opakovaním, kde máme dva prvky prvého druhu, žiaden prvok druhého druhu, jeden prvok tretieho druhu, atď. Takýmto spôsobom vytvoríme rad, v ktorom bude symbolov (prvkov množiny a oddeľovačov. Ľubovoľnú *r*-kombinácií s opakovaním z druhov získame tak, že vyberieme symbolov, ktoré budeme považovať za oddeľovače a zvyšné symboly za prvky množiny . Pričom prvky (ak sa tam nachádzajú) pred prvým oddeľovačom budú prvky kategórie atď. Napríklad rad

Bude predstavovať 7-kombináciu s opakovaním .

Z uvedeného vyplýva, že počet *r*-kombinácií s opakovaním z druhov sa rovná počtu umiestnení oddeľovačov na miest, Teda **.**

**Príklad** 7. V obchode predávajú tri druhy pečiva . Nájdite algoritmus na vypisovanie všetkých možnosti pri nákupe troch druhov pečiva.

*Riešenie.* Pri hľadaní algoritmu vytvoríme pomocné prvky a , ktoré budú predstavovať opakovanie pečiva v 3-kombinácii s opakovaním z 3-prvkov. Označme

* – opakuje sa pečivo nachádzajúce sa na prvom mieste trojice.
* – opakuje sa pečivo nachádzajúce sa na druhom mieste trojice alebo pečivo z prvého miesta sa opakuje druhý krát.

Potom naša úloha sa transformuje na vypísanie všetkých trojíc (3-kombinácií bez opakovania) z piatich prvkov .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Prvky  |  | Prvky  |
| **1** | A | B | C |  | A | B | C |
| **2** | A | B | O1 |  | A | B | A |
| **3** | A | B | O2 |  | A | B | B |
| **4** | A | C | O1 |  | A | C | A |
| **5** | A | C | O2 |  | A | C | C |
| **6** | A | O1 | O2 |  | A | A | A |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| **7** | B | C | O1 |  | B | C | B |
| **8** | B | C | O2 |  | B | C | C |
| **9** | B | O1 | O2 |  | B | B | B |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| **10** | C | O1 | O2 |  | C | C | C |

Všetkých 3- kombinácií s opakovaním je rovný číslu .

**Cvičenia**

1. Nájdite všetky partície čísla 7 (poradie sa berie do úvahy ) na 3 sčítance.
2. Riešte úlohu 1. v prípade, že partície líšiace sa poradím považujeme za totožné.
3. Pre obidva prípady nájdite všetky partície čísla 7.
4. Vypočítajte .
5. Rozšírte tabuľku pre po .
6. Rozšírte tabuľku pre po .
7. Koľko existuje prirodzených čísel n s nasledujúcimi vlastnosťami:
* je deliteľné číslom 210,
* v kanonickom rozklade čísla je súčet exponentov rovný 12 ?
1. Koľkými spôsobmi možno 20 korún rozdeliť medzi piatich ľudí, ak každý z nich má dostať aspoň dve koruny ?
2. Koľko je usporiadaných rozkladov čísla 10 na 4 nenulové sčítance.
3. V obchode predávajú štyri druhy pečiva A, B, C, D.
	1. Určte počet všetkých možných nákupov troch druhov pečiva.
	2. Vypíše všetky možnosti pri nákupe troch druhov pečiva.

## Permutácie, variácie

***Definícia*** 5. Nech označujeme akúkoľvek - prvkovú množinu. Permutáciou množiny nazývame jej bijektívne zobrazenie na seba.

Napríklad zobrazenie dané predpisom:

je bijekcia množiny na seba. Takúto permutáciu budeme symbolicky zapisovať pomocou matice alebo jednoducho ako postupnosť .

**Príklad** 8.

 Nájdite všetky permutácie ľubovoľnej štvorprvkovej množiny .

*Riešenie.*

Nech je bijekcia. Potom obraz prvku môže nadobúdať štyri rôzne hodnoty:

.

Ak , tak obraz prvku môže nadobúdať tri rôzne hodnoty

Ak už, tak obraz prvku môže nadobúdať dve rôzne hodnoty atď. Schematicky to môžeme znázorniť nasledovne

.

Pre sme dostali permutácie . Podobne budeme postupovať pre , , . Všetky permutácie prehľadne zapíšeme pomocou nasledujúcej tabuľky.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Na základe postupu použitého v predchádzajúcom príklade môžeme dokázať tvrdenie uvedené vo vete 9, v ktorej je uvedený vzorec pre určenie počtu všetkých permutácii ľubovoľnej množiny .

**Veta** 9**.** Pre počet permutácií množiny platí vzťah

Dôkaz tejto vety môžeme ľahko urobiť ak využijeme *kombinatorické pravidlo súčinu.*

**Veta** 10**. *Kombinatorické pravidlo súčinu****.* Nech sú množiny majúce po rade prvkov. Potom počet usporiadaných tíc, ktorých prvý prvok je z množiny , druhý z množiny a tý z množiny je rovný súčinu .

Dôkaz vety 10 prenechávame na čitateľa. Odporúčame použiť matematickú indukciu vzhľadom na počet množín .

***Definícia*** 6. Nech sú nezáporné celé čísla, pre ktoré platí . Permutácie - kombinácií množiny sa nazývajú -variácie množiny . Počet všetkých -variácií množiny budeme označovať symbolom .

**Veta** 10**.** Pre počet všetkých -variácií množiny platí vzťah

*Dôkaz vety* 10.

Zrejme z každej - kombinácie množiny je možné vytvoriť rôznych permutácií. Preto pre počet všetkých -variácií množiny bude platiť

**Príklad** 9. Koľkými spôsobmi možno umiestniť šesť rôznych šachových figúrok na šachovnicu?

*Riešenie.*

Nech sú danými figúrkami napríklad ***kráľ, dáma, veža, strelec, jazdec*** a ***pešiak***. Úlohe odpovedajú usporiadané výbery 6 polí šachovnice zo 64, pričom prvé vybrané pole predstavuje pozíciu pre kráľa, druhé pre dámu atď. Preto má úloha riešení.

**Príklad** 10. Koľko rôznych jedno až štvorciferných čísel môžeme vytvoriť z cifier ?

*Riešenie.*

Keby medzi ciframi nebola nula, tak počet všetkých jedno až štvorciferných čísel by bol súčet čísel

**.**

Pre počet všetkých jedno až štvorciferných čísel začínajúcich nulou bude zrejme platiť

**.**

Pre počet všetkých jedno až štvorciferných čísel z cifier je rovný .

## Permutácie, variácie s opakovaním

Z prvkov množiny je možné vytvoriť skupiny po prvkov najvoľnejšie tak, že na každé miesto v tejto skupine umiestnime ľubovoľný prvok množiny . Takto vzniknutým skupinám budeme hovoriť variácie s opakovaním.

***Definícia*** 7. Usporiadaná -tica prvkov množiny sa nazýva -variácia s opakovaním množiny . Počet všetkých -variácií s opakovaním množiny budeme označovať symbolom .

**Príklad** 11. Utvorte všetky -variácie s opakovaním množiny .

*Riešenie.*

Postupne vytvárajme -variácie s opakovaním množiny .

* -variácie s opakovaním množiny sú dve: . Ich počet je **.**
* -variácie s opakovaním množiny sú štyri: . Ich počet je **.**
* -variácii s opakovaním množiny je osem:

.

Pre ich počet platí: **.**

**Veta** 11**.** Pre počet všetkých -variácií s opakovaním množiny platí vzťah

*Dôkaz vety* 11.

Dôkaz je výhodné urobiť pomocou matematickej indukcie. Pre je tvrdenie pravdivé, pozri príklad 11. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre . Teda

Všetky usporiadané -tice s opakovaním množiny možno vytvoriť z -1)-tíc tak, že ku každej dodáme na koniec po jednom každý prvok množiny . Preto z každej -1)-tice získame rôznych -tíc. Využitím indukčného predpokladu dostaneme

**Cvičenia**

1. Nájdite všetky permutácie množiny .
2. Zistite počet takých permutácií množiny , ktoré nemajú ani jeden prvok na tom mieste ako v základnom usporiadaní .
3. Koľko jedno- až päťciferných čísel možno utvoriť pomocou cifier ak sa cifry nemajú opakovať.
4. Určte číslo tak, aby počet 3-variácií množiny bol o 60 väčší ako počet 3-variácií množiny
5. Aký je počet -variácií množiny , ktoré určitý prvok obsahujú resp. neobsahujú?
6. Aký je počet takých bijekcií množiny , ktoré majú nasledujúce dve vlastnosti:
	1.
	2. alebo .
7. Dokážte, že pre ľubovoľné je a .
8. Utvorte všetky 3- variácie s opakovaním resp.4-variácie s opakovaním množiny .
9. Koľko 6-ciferných čísel možno vytvoriť pomocou cifier 0, 1, 2, 3?
1. Znám, Š.: Kombinatorika a teória grafov. Vysokoškolský učebný text, UK Bratislava, 1978 [↑](#footnote-ref-1)
2. Eulerova funkcia vyjadruje počet čísel menších ako , ktoré sú s  nesúdeliteľné. To teda znamená, že napr. [↑](#footnote-ref-2)
3. Knor, M.: Kombinatorika a teória grafov. UK Bratislava, 2000 [↑](#footnote-ref-3)