# **Peanova axiomatika**

1. Spočítajte so zdôvodnením:

$3 + 0 =$ $3 × 0 =$

$4 + 1 =$$4 × 1 =$

$4 + 3 =$ $4 × 3 =$

1. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla platí:
2. $x= 0+x$ vlastnosť nuly
3. $x+y=y+x$ komutatívnosť sčítania
4. x . y = y . x komutatívnosť násobenia
5. $x∙ 1=x$ vlastnosť jednotky

V úlohách 2a až 2e použije matematickú indukciu. V úlohe 2d stačí si uvedomiť, že $1=0'$.

1. Dokážte, že relácia $≈: \left(x,y\right)≈\left(x´,y´\right)⇔x+y´=x´+y$ je tranzitívna na $N×N.$
2. Zdôvodnite priamo podľa definície, prečo platí:

$2 < 8$ $4 < 6$ $3 < 7$.

Definícia relácie $< $ „byť menší“:

*Hovoríme, že prirodzené číslo* $x$ *je menšie ako prirodzené číslo* $y ( x<y)$*, vtedy a len vtedy, ak existuje také nenulové prirodzené číslo* $z$*, že* $x+z=y$.

# **Matematická indukcia**

1. Pomocou matematickej indukcie dokážte, že platí:

$1+3+5+...+\left(2n-1\right)=n^{2}$*.*  úvod

1. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla $n\geq 1$ platí:

1. $1^{2}+2^{2}+...+n^{2}=\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right) $ úvod

1. $1^{3}+2^{3}+...+n^{3}=\frac{1}{4}n^{2}(n+1)^{2} $
2. $n^{3}-10n$je násobkom čísla 3úvod
3. $3^{3n}-3.2^{2n+3}$je násobkom čísla 23.

1. Dokážte, že počet uhlopriečok $P\_{n}$ v $n$-uholníku je $P\_{n}=\frac{n\left(n-3\right)}{2}$.

# **Číselné sústavy**

1. Vypočítajte

|  |  |
| --- | --- |
| 1. 257368 + 435278,
 | 1. 2615413 – 95BA13,
 |
| 1. 45637 . 357,
 | 1. 5136249 : 69.
 |

1. Určte základ $z$ číselnej sústavy: $(332)\_{z}=170$ úvod
2. Preveďte číslo (268)8 do dvanásťkovej číselnej sústavy.
3. Číslo (101B)12 zapíšte v číselnej sústave o základe 5. úvod
4. Doplňte miesto hviezdičiek číslice tak, aby výsledok bol správny:
	1. \*333 + 2\*22 + 66\*6 = \*\*9\* úvod
	2. 8\*06 – 78\*8 = \*\*8\*
	3. \*12BB13 + \*C\*613 + 357A\*13 = 113\*9513 .
5. Doplňte miesto hviezdičiek číslice tak, aby bol súčin správny

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 3 | \* | \* |
|  |  |  | \* | \* | 3 |
|  |  |  | \* | \* | \* |

1. Nájdite celé číslo $x $a cifru y tak, aby $(360 + 3.x)^{2}= 492y04$. úvod
2. Trojciferné číslo zapísané v deviatkovej sústave je zakončené číslicou 1. Ak ju presunieme na prvé miesto dostaneme číslo, ktoré je v deviatkovej sústave o $(2157)\_{9}$ menšie ako pôvodné. Určte pôvodné číslo.
3. Ak medzi číslice dvojciferného čísla vpíšeme číslicu 5, tak dostaneme 3-ciferné číslo, ktoré je o 24 väčšie, ako 9 násobok daného čísla. Nájdite ho.
4. Ak medzi číslice dvojciferného čísla vpíšeme 0, tak dostaneme trojciferné číslo, ktoré je o 11 väčšie ako 8 násobok pôvodného. Určte pôvodné číslo.
5. Nájdite všetky trojciferné čísla s danou vlastnosťou: ak pred hľadané číslo napíšeme číslicu, ktorá je na mieste jednotiek, tak dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je o 18 menšie ako 7 násobok hľadaného čísla.
6. Ak medzi číslice dvojciferného čísla vpíšeme 0, tak dostaneme trojciferné číslo, ktoré je o 11 väčšie ako 8 násobok pôvodného. Určte pôvodné číslo.
7. Nájdite v desiatkovej číselnej sústave aspoň tri dvojice trojciferných čísel väčších ako 200 a zároveň menších ako 300, ktorých súčet v 8-číselnej sústave má zápis (777)8.

Uvádzame jednu dvojicu: dvojica 283, 228 spĺňa požiadavky, lebo (283 + 228 = 511)10 a zároveň 511 = (777)8

1. Nájdite v desiatkovej číselnej sústave trojciferné číslo $LIK$ ($L, I, K$ sú cifry tohto čísla), pre ktorého druhú mocninu platí: $(LIK)^{2}=BUBLIK$.
2. Určte racionálne číslo $\frac{p}{q}$ tak, aby jeho rozvoj v desiatkovej sústave mal tvar 2,12$\overbar{345}$.
3. Ak pre trojciferné čísla $a,b$ platí $a+b=1000$, tak sa čísla $a^{2},b^{2}$ zhodujú v poslednom trojčíslí. Dokážte to.

# **Deliteľnosť**

1. V čísle 837521584 vyškrtnite 4 číslice tak, aby ste dostali 5-ciferné číslo deliteľné číslami 9 a 5. Nájdite všetky možnosti.
2. V čísle $34x2y$ doplňte za $x,y$ cifry tak, aby vzniknuté číslo bolo deliteľné číslom 3 a 4. Nájdite všetky riešenia.
3. Doplňte namiesto písmen $A, B$ cifry, aby čislo $n = 251A8473B$ bolo v desiatkovej sústave deliteľné číslom 45.
4. Dokážte, že štvorec nepárneho čísla po delení číslom 8 dáva zvyšok 1.
5. Ukážte, že súčet „ľubovoľného nepárneho čísla a po ňom nasledujúceho párneho čísla“ zväčšený o 1 je deliteľný štyrmi.
6. Ukážte, že súčet ľubovoľných päť po sebe idúcich čísel je deliteľný piatimi.
7. Predné koleso voza má obvod 25 dm a zadné má obvod 3,2 metra. Na akej dráhe spravia prvýkrát celý počet otáčok.
8. Ukážte, že číslo $a=a\_{n}a\_{n-1}…a\_{1}a\_{0}$ je deliteľné číslom 4 (číslom 25) práve vtedy, keď číslo $a\_{1}.10 + a\_{0}$, t.j. jeho posledné dvojčíslie a1a0 je deliteľné číslom 4 (číslom 25).
9. Nech číslo $x$ má v desiatkovej číselnej sústave zápis $x = a\_{2}a\_{1}a\_{0}$. Ukážte, že
	1. 7 delí $x$ práve vtedy, keď 7 delí $2.a\_{2}+3.a\_{1}+a\_{0}$
	2. 7 delí $x $práve vtedy, keď 7 delí $a\_{2}a\_{1} – 2.a\_{0}$.

# **Rovnice a nerovnice**

1. Dokážte, že pre $x \geq 0, y \geq 0$ platí

$$\sqrt{yx}\leq \frac{x+y}{2}$$

1. Riešte nerovnice:

$\left|x +3\right|\leq \left|x-5\right|$ $|2x +1| > |x-3|$

1. Riešte rovnice:

$x +\left|x +3\right|= 5$ $\left|2x-3\right|-x = 24$

$x +\left|x-3\right|= 5$ $|5x +1|-2x =-2$

1. V goniometrickom tvare s hlavnou hodnotou argumentu zapíšte číslo$ z=5+5i$.
2. Dokážte, že pre každé n ∈ N+ je: 3
3. 1

3 2 3 1

1

4 7

1

1 4

1 









*n n*

.

4. Usporiadanie celých čísel.

a) Na množine Z definujte reláciu < tak, aby bola reláciou ostrého lineárneho

usporiadania.

b) Dokážte tranzitívnosť takto definovanej relácie a napíšte, ktorú ďalšiu vlastnosť musí

mať daná relácia.

c) Dokážte, že pre celé čísla *a, b, c* platí: ak *a* < *b*, tak *a* + *c* < *b* + *c*.

5. Konštrukcia poľa racionálnych čísel.

a) Na množine Z x (Z – {0}) definujte príslušnú reláciu ekvivalencie.

b) Zapíšte dôkaz tranzitívnosti tejto relácie.

c) Napíšte, ktorú množinu nazývame množinou všetkých racionálnych čísel.

d) Definujte príslušné operácie sčítania a násobenia racionálnych čísel.

e) Dokážte, že ku každému nenulovému prvku [*a*,*b*]*Q* existuje vzhľadom na násobenie

inverzný prvok.

**Výsledky**

1. Najprv treba experimentálne „objaviť“ a matematickou indukciou dokázať, že

3 23 13 1

1

4 7

1

1 4

1













*n*

*n*

*n n*

.

Potom stačí dokázať, že

3

1

3 1



*n* 

*n* .

2. a) 240015, b) 714658, c) 1986313, d) 2366617, e) 765489.

3. 37.

4. Pozrite v texte, resp. v poznámkovom zošite.

5. Pozrite v texte, resp. v poznámkovom zošite.