# **Peanova axiomatika**

1. Spočítajte so zdôvodnením:

1. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla platí:
2. vlastnosť nuly
3. komutatívnosť sčítania
4. x . y = y . x komutatívnosť násobenia
5. vlastnosť jednotky

V úlohách 2a až 2e použije matematickú indukciu. V úlohe 2d stačí si uvedomiť, že .

1. Dokážte, že relácia je tranzitívna na
2. Zdôvodnite priamo podľa definície, prečo platí:

.

Definícia relácie „byť menší“:

*Hovoríme, že prirodzené číslo je menšie ako prirodzené číslo , vtedy a len vtedy, ak existuje také nenulové prirodzené číslo , že* .

# **Matematická indukcia**

1. Pomocou matematickej indukcie dokážte, že platí:

*.*  úvod

1. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla platí:



1. úvod



1. je násobkom čísla 3úvod
2. je násobkom čísla 23.



1. Dokážte, že počet uhlopriečok v -uholníku je .

# **Číselné sústavy**

1. Vypočítajte

|  |  |
| --- | --- |
| 1. 257368 + 435278, | 1. 2615413 – 95BA13, |
| 1. 45637 . 357, | 1. 5136249 : 69. |

1. Určte základ číselnej sústavy: úvod
2. Preveďte číslo (268)8 do dvanásťkovej číselnej sústavy.
3. Číslo (101B)12 zapíšte v číselnej sústave o základe 5. úvod
4. Doplňte miesto hviezdičiek číslice tak, aby výsledok bol správny:
   1. \*333 + 2\*22 + 66\*6 = \*\*9\* úvod
   2. 8\*06 – 78\*8 = \*\*8\*
   3. \*12BB13 + \*C\*613 + 357A\*13 = 113\*9513 .
5. Doplňte miesto hviezdičiek číslice tak, aby bol súčin správny

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 3 | \* | \* |
|  |  |  | \* | \* | 3 |
|  |  |  | \* | \* | \* |

1. Nájdite celé číslo a cifru y tak, aby . úvod
2. Trojciferné číslo zapísané v deviatkovej sústave je zakončené číslicou 1. Ak ju presunieme na prvé miesto dostaneme číslo, ktoré je v deviatkovej sústave o  menšie ako pôvodné. Určte pôvodné číslo.
3. Ak medzi číslice dvojciferného čísla vpíšeme číslicu 5, tak dostaneme 3-ciferné číslo, ktoré je o 24 väčšie, ako 9 násobok daného čísla. Nájdite ho.
4. Ak medzi číslice dvojciferného čísla vpíšeme 0, tak dostaneme trojciferné číslo, ktoré je o 11 väčšie ako 8 násobok pôvodného. Určte pôvodné číslo.
5. Nájdite všetky trojciferné čísla s danou vlastnosťou: ak pred hľadané číslo napíšeme číslicu, ktorá je na mieste jednotiek, tak dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je o 18 menšie ako 7 násobok hľadaného čísla.
6. Ak medzi číslice dvojciferného čísla vpíšeme 0, tak dostaneme trojciferné číslo, ktoré je o 11 väčšie ako 8 násobok pôvodného. Určte pôvodné číslo.
7. Nájdite v desiatkovej číselnej sústave aspoň tri dvojice trojciferných čísel väčších ako 200 a zároveň menších ako 300, ktorých súčet v 8-číselnej sústave má zápis (777)8.

Uvádzame jednu dvojicu: dvojica 283, 228 spĺňa požiadavky, lebo (283 + 228 = 511)10 a zároveň 511 = (777)8

1. Nájdite v desiatkovej číselnej sústave trojciferné číslo ( sú cifry tohto čísla), pre ktorého druhú mocninu platí: .
2. Určte racionálne číslo tak, aby jeho rozvoj v desiatkovej sústave mal tvar 2,12.
3. Ak pre trojciferné čísla platí , tak sa čísla zhodujú v poslednom trojčíslí. Dokážte to.

# **Deliteľnosť**

1. V čísle 837521584 vyškrtnite 4 číslice tak, aby ste dostali 5-ciferné číslo deliteľné číslami 9 a 5. Nájdite všetky možnosti.
2. V čísle doplňte za cifry tak, aby vzniknuté číslo bolo deliteľné číslom 3 a 4. Nájdite všetky riešenia.
3. Doplňte namiesto písmen cifry, aby čislo bolo v desiatkovej sústave deliteľné číslom 45.
4. Dokážte, že štvorec nepárneho čísla po delení číslom 8 dáva zvyšok 1.
5. Ukážte, že súčet „ľubovoľného nepárneho čísla a po ňom nasledujúceho párneho čísla“ zväčšený o 1 je deliteľný štyrmi.
6. Ukážte, že súčet ľubovoľných päť po sebe idúcich čísel je deliteľný piatimi.
7. Predné koleso voza má obvod 25 dm a zadné má obvod 3,2 metra. Na akej dráhe spravia prvýkrát celý počet otáčok.
8. Ukážte, že číslo je deliteľné číslom 4 (číslom 25) práve vtedy, keď číslo , t.j. jeho posledné dvojčíslie a1a0 je deliteľné číslom 4 (číslom 25).
9. Nech číslo má v desiatkovej číselnej sústave zápis . Ukážte, že
   1. 7 delí práve vtedy, keď 7 delí
   2. 7 delí práve vtedy, keď 7 delí .

# **Rovnice a nerovnice**

1. Dokážte, že pre platí
2. Riešte nerovnice:

1. Riešte rovnice:

1. V goniometrickom tvare s hlavnou hodnotou argumentu zapíšte číslo.
2. Dokážte, že pre každé n ∈ N+ je: 3
3. 1

3 2 3 1

1

4 7

1

1 4

1 









*n n*

.

4. Usporiadanie celých čísel.

a) Na množine Z definujte reláciu < tak, aby bola reláciou ostrého lineárneho

usporiadania.

b) Dokážte tranzitívnosť takto definovanej relácie a napíšte, ktorú ďalšiu vlastnosť musí

mať daná relácia.

c) Dokážte, že pre celé čísla *a, b, c* platí: ak *a* < *b*, tak *a* + *c* < *b* + *c*.

5. Konštrukcia poľa racionálnych čísel.

a) Na množine Z x (Z – {0}) definujte príslušnú reláciu ekvivalencie.

b) Zapíšte dôkaz tranzitívnosti tejto relácie.

c) Napíšte, ktorú množinu nazývame množinou všetkých racionálnych čísel.

d) Definujte príslušné operácie sčítania a násobenia racionálnych čísel.

e) Dokážte, že ku každému nenulovému prvku [*a*,*b*]*Q* existuje vzhľadom na násobenie

inverzný prvok.

**Výsledky**

1. Najprv treba experimentálne „objaviť“ a matematickou indukciou dokázať, že

3 23 13 1

1

4 7

1

1 4

1













*n*

*n*

*n n*

.

Potom stačí dokázať, že

3

1

3 1



*n* 

*n* .

2. a) 240015, b) 714658, c) 1986313, d) 2366617, e) 765489.

3. 37.

4. Pozrite v texte, resp. v poznámkovom zošite.

5. Pozrite v texte, resp. v poznámkovom zošite.