Kvantová, atómová a subatómová fyzika

Riešenie domácej úlohy 8

1. Operátor spinu v ľubovoľnom smere má tvar

$$\hat{s}_n = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

   Vlastné stavy spĺňajú podmienku

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

   Vlastné hodnoty λ sú dané nulovou hodnotou determinantu

$$\det\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

   odkiaľ

$$-(\cos\theta - \lambda)(\cos\theta + \lambda) - \sin^2\theta = 0$$

   Vyriešením tejto rovnice dostávame $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Vlastné stavy prislúchajúce týmto vlastným hodnotám sú potom dané rovnicami

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \pm 1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

   Vyriešením týchto rovníc dostaneme vlastné stavy

$$\lambda_1 = +1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

2. Najskôr si tento stav zapíšeme do vektorovej reprezentácie

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

   (a) Aplikáciou Hadamartovho operátora dostávame

$$\hat{H}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix} = \frac{a+b}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{a-b}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

   (b) Aplikáciou operátora $\sqrt{\text{NOT}}$ dostávame

$$\sqrt{\hat{\text{NOT}}}|\psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+b)+i(a-b) \\ (a+b)+i(b-a) \end{pmatrix} = \frac{(a+b)+i(a-b)}{2}|0\rangle + \frac{(a+b)+i(b-a)}{2}|1\rangle$$

3. Pravdepodobnosť, že špión ostane neodhalený pri porovnaní jedného qubitu je $3/4$. Pri porovnaní n qubitov je teda celková pravdepodobnosť, že špióna odhalia

$$P = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.999999$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n = 10^{-6}$$

$$n\log_{10}\frac{3}{4} = -6$$

$$n = \frac{6}{-\log_{10}\frac{3}{4}} = 48.02$$

   Stačí im porovnať 49 qubitov, aby získali danú pravdepodobnosť.

4. Najskôr si stavy zapíšeme do maticovej reprezentácie

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oba qubity môžeme zostaviť do bázy

$$|ba\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Aplikáciou operátora CNOT dostávame

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Môžeme si všimnúť, že výsledný stav je súbor qubitov $|b\rangle$ a NOT $|a\rangle$, čím sme ukázali, že hradlo naozaj neguje stav $|a\rangle$ pre prípad $|b\rangle = |1\rangle$. Ak bude stav $|b\rangle$ komplikovanejší, dostaneme:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$|ba\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\overline{a}\rangle$$

Inak povedané, hradlo vytvára stav, v ktorom je s pravdepodobnosťou 1/2 $|b\rangle = |0\rangle$ a stav $|a\rangle$ ostáva nezmenený, a s pravdepodobnosťou 1/2 je $|b\rangle = |1\rangle$ a $|a\rangle$ sa zneguje.